



Annalen der Physik

Sci 1085.15



Harvard College Library

FROM THE

PRICE GREENLEAF FUND

Residuary legacy of \$711,563 from E. Price Greenleaf,
of Boston, nearly one half of the income from
which is applied to the expenses of the
College Library.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 22.

ANNALEN DER P H Y S I K.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 22.

DER GANZEN REIHE 327. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINEM PORTRÄT UND VIER FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1907.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

1214

Sci 1085.15

Inhalt.

Vierte Folge. Band 22.

Erstes Heft.

	Seite
1. L. Holborn und S. Valentiner. Eine Vergleichung der optischen Temperaturskala mit dem Stickstoffthermometer bis 1600°	1
2. Otto Lummer. Die „Interferenzkurven gleicher Neigung“ im polarisierten Lichte	49
3. Albert Wigand. Über spezifische Wärme und spezifisches Gewicht der allotropen Modifikationen fester Elemente	64
4. Albert Wigand. Über Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme fester Elemente. (Hierzu Taf. I.)	99
5. Leo Grunmach. Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung von verflüssigtem Sauerstoff und verflüssigtem Stickstoff	107
6. Max Toepler. Über Funkenspannungen (Nachtrag).	119
7. W. Voigt. Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Eisenglanz	129
8. Leo Grunmach. Über den Einfluß transversaler Magnetisierung auf die elektrische Leitungsfähigkeit der Metalle (nach gemeinsam mit Hrn. Dr. Franz Weidert ausgeführten Versuchen)	141
9. A. Einstein. Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme	180
10. Friedrich Kohlrausch. Über Kapillarität und Tropfengröße; Nachtrag	191
11. Walter P. White. Bemerkungen über die Juliussche Galvanometeraufhängung	195
12. P. H. Eykman und A. P. H. Trivelli. Über die Lichtwirkung auf photographische Platten	199
13. Ludwig Schiller. Über die Poissonsche Konstante des Kautschuks	204

Ausgegeben am 28. Dezember 1906.

Zweites Heft.

	Seite
1. Otto Schönrock. Zur Abhängigkeit der Breite der Spektrallinien vom Druck	209
2. P. Dobler. Über die Sekundärstrahlung, welche entsteht, wenn die β -Strahlen des Radiums dünne Metallschichten treffen und den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit der primären Strahlen, Schichtdicke und Intensität der Sekundärstrahlen. (Hierzu Taf. II.)	227
3. Josef R. von Geitler. Über die Absorption und das Strahlungsvermögen der Metalle für Hertzsche Wellen . .	246
4. C. Fischer. Experimentelle Untersuchung gekoppelter Kondensatorkreise	265
5. Rudolf Ladenburg. Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck	287
6. J. S. Sachs. Elektrische Schwingungen in Spulen mit metallischen Kernen	310
7. Boris Weinberg. Über die innere Reibung des Eises. II.	321
8. Ernst Giesing. Untersuchungen ebener Reflexionsbeugungsgitter mit Rücksicht auf ihre Brauchbarkeit zur absoluten Messung von Lichtwellenlängen	333
9. Godfrey H. Thomson. Über den Durchgang Hertzscher Wellen durch Gitter	365
10. Géza Zemplén. Über die Oberflächenspannungen wässriger Lösungen. II	391
11. B. Walter. Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Heinrich Schnell: Untersuchungen am Funkeninduktor mit Quecksilberunterbrecher	397
12. P. Gruner. Bemerkungen zu der Arbeit: „Über den Zerfall von Radium A, B und C, II. Mitteilung“, von Herrn H. W. Schmidt	399

Ausgegeben am 5. Februar 1907.

Drittes Heft.

1. Emil Kohl. Über die dielektrischen Verschiebungsgleichungen für schnelle Schwingungen in ruhenden Mitteln	401
2. A. Bestelmeyer. Spezifische Ladung und Geschwindigkeit der durch Röntgenstrahlen erzeugten Kathodenstrahlen . . .	429
3. Léon Schames. Über die Abhängigkeit der Hysteresiswärme und der Permeabilität des Eisens von der Frequenz des Wechselfeldes	448
4. O. Lehmann. Über die van der Waalssche Formel und die Kontinuität der Aggregatzustände, Erwiderung an K. Fuchs	469
5. R. Gans. Zur Theorie des Ferromagnetismus. 1. Mitteilung: Gibt es wahren Magnetismus?	481

	Seite
6. Walter Block. Untersuchungen am stromliefernden Daniell-element	505
7. J. Traube. Volumen und Valenz. Atom und Elektron . .	519
8. Günther Schulze. Spannungsgefälle an Aluminiumanoden .	543
9. F. Dolezalek und H. G. Möller. Über Beseitigung der ungleichmäßigen Stromverteilung in Wechselstromleitern . . .	559
10. A. Einstein. Über die Gültigkeitsgrenze des Satzes vom thermodynamischen Gleichgewicht und über die Möglichkeit einer neuen Bestimmung der Elementarquanta	569
11. N. Schiller. Eine Bemerkung über die Beziehung zwischen der absoluten Temperatur und der kinetischen Energie eines thermodynamischen Systems	573
12. Ludwig Silberstein. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivекtorieller Behandlung.	579
13. F. W. Adler. Über die Mach-Lippmannsche Analogie zum zweiten Hauptsatz	587
14. R. Küch und T. Retschinsky. Temperaturmessungen im Quecksilberlichtbogen der Quarzlampe	595
15. J. D. van der Waals jr. Zur Frage der Wellenlänge der Röntgenstrahlen	603
16. V. Dvořák. Bemerkung zu der Arbeit von W. Zernov: „Über absolute Messungen der Schallintensität“	606

Ausgegeben am 5. März 1907.

Viertes Heft.

1. F. Henning. Über den Sättigungsdruck des Wasserdampfes. (Hierzu Taf. III.)	609
2. F. Henning. Über die Ausdehnung fester Körper bei tiefer Temperatur	631
3. H. Brandes. Über die Dämpfung und Energieausnutzung einiger Senderanordnungen der drahtlosen Telegraphie . . .	640
4. F. Conrat. Über Messung des Strahlungsdekrementes stabförmiger Leiter	659
5. Heinrich Glaser. Über die innere Reibung zäher und plastischer Körper und die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes .	694
6. O. Lummer und R. Kynast. Spektralapparat für Polarisations- und Phasendifferenzmessungen	721
7. R. Kynast. Über die bei der Reflexion an isotropen, durchsichtigen Medien auftretenden Phasenverschiebungen	726
8. K. Bädeker. Über die elektrische Leitfähigkeit und die thermoelektrische Kraft einiger Schwermetallverbindungen . .	749
9. Theodor Lohnstein. Weiteres zur Theorie der fallenden Tropfen, nebst einem Rückblick auf ältere theoretische Versuche	767
10. F. W. Adler. Über die Formulierung des ersten Hauptsatzes für Gase	782

	Seite
11. F. Hasenöhr. Zur Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraume	791
12. W. Wien. Über die Berechnung der Impulsbreite der Röntgenstrahlen aus ihrer Energie	793
13. Ernst Giesing. Berichtigung zu meiner Abhandlung: „Untersuchungen ebener Reflexionsbeugungsgitter etc.“	798
14. A. Einstein. Berichtigung zu meiner Arbeit: „Die Plancksche Theorie der Strahlung etc.“	800

Ausgegeben am 4. April 1907.

Fünftes Heft.

1. E. Grüneisen. Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen. I. Der dynamisch und statisch gemessene Elastizitätsmodul	801
2. R. Küch und T. Retschinsky. Untersuchung über selektive Absorption im Quecksilberlichtbogen. (Hierzu Taf. IV, Figg. 1 u. 2.)	852
3. Kurd von Mosengeil †. Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum	867
4. Bruno Monasch. Über den Energieverlust im Dielektrikum in wechselnden elektrischen Feldern	905
5. Franz Kiebitz. Interferenzversuche mit freien Hertzschen Wellen	943
6. Hans Geiger. Strahlungs-, Temperatur- und Potentialmessungen in Entladungsröhren bei starken Strömen	973
7. Hans Lohmann. Beobachtungen zur Hestellung und Messung hoher Spannungen	1008

Ausgegeben am 2. Mai 1907.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Porträt von P. Curie.

Tafel I. Wigand.

„ II. Dobler.

„ III. Henning.

„ IV. Küch u. Retschinsky, Figg. 1 u. 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 22. HEFT 1.

DEUT. GANZEN REIHE 327, BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HHERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1907.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den
Postbüchern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in
15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.*

(Ausgegeben am 28. Dezember 1906.)

Inhalt.

	Seite
1. L. Holborn und S. Valentiner. Eine Vergleichung der optischen Temperaturskale mit dem Stickstoffthermometer bis 1600°	1
2. Otto Lummer. Die „Interferenzkurven gleicher Neigung“ im polarisierten Lichte	49
3. Albert Wigand. Über spezifische Wärme und spezifisches Gewicht der allotropen Modifikationen fester Elemente	64
4. Albert Wigand. Über Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme fester Elemente. (Hierzu Taf. I.)	99
5. Leo Grunmach. Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung von verflüssigtem Sauerstoff und verflüssigtem Stickstoff	107
6. Max Toepler. Über Funkenspannungen (Nachtrag)	119
7. W. Voigt. Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Eisenglanz	129
8. Leo Grunmach. Über den Einfluß transversaler Magnetsierung auf die elektrische Leitungsfähigkeit der Metalle (nach gemeinsam mit Hrn. Dr. Franz Weidert ausgeführten Versuchen)	141
9. A. Einstein. Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme	180
10. Friedrich Kohlrausch. Über Kapillarität und Tropfengröße; Nachtrag	191
11. Walter P. White. Bemerkungen über die Juliussche Galvanometeraufhängung	195
12. P. H. Eykman und A. P. H. Trivelli. Über die Lichtwirkung auf photographische Platten	199
13. Ludwig Schiller. Über die Poissonsche Konstante des Kautschuks	204

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweiter Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.



J Curie

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 22.

1. *Eine Vergleichung der optischen Temperaturskala mit dem Stickstoffthermometer bis 1600°; von L. Holborn und S. Valentiner.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Die vorliegende Arbeit enthält zunächst Beobachtungen mit dem Stickstoffthermometer zwischen 1100 und 1600° C., die an ein Thermoelement aus Platin-Platinrhodium angeschlossen wurden. Das so geeichte Element haben wir sodann für die Messung des schwarzen Körpers benutzt, um auf photometrischem Wege das Gesetz der schwarzen Strahlung im sichtbaren Gebiet zu prüfen.

Der erste Teil bildet die Fortsetzung früherer Versuche¹⁾ mit dem Stickstoffthermometer, die bis 1130° reichten und ergaben, daß die Thermokraft des Elementes aus Platin-Platinrhodium zwischen 250 und 1100° mit großer Genauigkeit durch eine quadratische Formel dargestellt werden kann. Auch für die Thermoelemente aus anderen Platinmetallen wurde dasselbe Gesetz gültig befunden mit Ausnahme des Palladiums. Ferner zeigten verschiedene Thermoelemente bis 1500° untereinander noch keine Abweichungen, wenn ihre Angaben nach der zwischen 250 und 1100° gültigen quadratischen Formel extrapoliert werden.²⁾

Die durch die Formel des Thermoelementes bestimmte Temperaturskala, die durch die Bestimmung verschiedener Schmelzpunkte festgelegt wurde, liegt den Untersuchungen zugrunde, die einerseits Lummer und Pringsheim, andererseits Paschen und Wanner über die Gesetze der schwarzen Strahlung angestellt haben. Es kamen bei diesen Unter-

1) L. Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68. p. 817. 1899 und Ann. d. Phys. 2. p. 505. 1900.

2) Später hat Harker (Proc. Roy. Soc. A. 76. p. 235. 1905) diese Übereinstimmung bis zum Schmelzpunkt des Platins bewiesen.

suchungen Temperaturen bis 1400° in Frage, für die die Abweichungen vom Gesetz im allgemeinen innerhalb der Fehlergrenze lagen.¹⁾ Nur einmal wurde diese überschritten bei der Temperatur von 1373° . Hier fanden Lummer und Pringsheim²⁾ bei der Prüfung der Beziehung

$$E_m T^{-5} = \text{const.},$$

nach der das Maximum der Energie mit der absoluten Temperatur T ansteigt, daß die vom Thermoelement angezeigte Temperatur um $7,5^{\circ}$ zu vergrößern ist, wenn der aus den Messungen zwischen 250 und 1370° C. gemittelte Wert der Konstanten zugrunde gelegt wird.

Speziell bei der Untersuchung der schwarzen Strahlung im sichtbaren Gebiet, die sich einfach auf photometrischem Wege ausführen läßt, ergab sich die Gültigkeit des Wienschen Gesetzes

$$\log \text{nat} \frac{H_2}{H_1} = \frac{c}{\lambda} \left\{ \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right\}$$

für die Abhängigkeit der Helligkeit H einer bestimmten Wellenlänge λ von der absoluten Temperatur T . Für den Wert der Konstanten c fand Wanner³⁾ zwischen 720 und 1300° C. im Mittel die Zahl 14510 , während Lummer und Pringsheim⁴⁾ 14580 zwischen 790 und 1430° erhielten. Die beobachteten Wellenlängen lagen zwischen $0,64$ und $0,48 \mu$.

Bei der Wiederholung dieser Versuche sind wir zu einem etwas anderen Ergebnis gelangt. Zwischen 800 und 1450°

1) O. Lummer u. E. Pringsheim sprechen sich hierüber folgendermaßen aus: „Durch Extrapolation der empirischen Formeln für die thermoelektrische Kraft dieser Elemente konnten obige Gesetze (der schwarzen Strahlung) bis über 1400° C. bestätigt werden. Diese Versuche kann man als eine *Eichung der Thermoelemente zwischen 1150 und 1400° C. mit Hilfe der neuen strahlungstheoretischen Temperaturskale* betrachten, eine Eichung, welche ergeben hat, daß auf diesem Gebiete die thermoelektrische Kraft demselben Gesetze folgt, welches bei weniger hoher Temperatur mit dem Gasthermometer gefunden worden war.“ (Physik. Zeitschr. 3. p. 98. 1901.)

2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1899. p. 218 u. ff.

3) H. Wanner, Ann. d. Phys. 2. p. 141. 1900.

4) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1901. p. 42.

finden wir zwar bei Annahme derselben Temperaturskale einen Wert für c , der im Mittel etwa 14600 beträgt. Dieser Wert ist aber nicht konstant, sondern er wächst von etwa 14200 bis 15000 in dem untersuchten Bereich mit steigender Temperatur. Wir erklärten uns diese Abweichung durch einen Fehler in der Temperaturskale und fanden diese Vermutung durch die Fortsetzung der luftthermometrischen Messungen bestätigt.

Diese wurden mit zwei Gefäßen ausgeführt, und zwar mit einem schon früher bis 1130° benutzten Platiniridiumgefäß und mit einem neuen aus reinem Iridium. Sehen wir von den Beobachtungen mit dem letzteren ab, die aus verschiedenen Gründen nur eine geringere Genauigkeit beanspruchen können, so ist doch auch die jetzt mit dem ersten Gefäß über 1100° erreichte nicht so hoch zu schätzen, wie bei den tieferen Temperaturen.¹⁾ Es liegt dies nur zum geringeren Teil an der größeren Unsicherheit der Korrekturen des Luftthermometers, deren Einfluß bekanntlich mit wachsender Temperatur zunimmt. Bedeutendere Schwierigkeiten bereiteten die Ungleichmäßigkeit in der Temperaturverteilung des Ofens und das zu vergleichende Thermoelement. Dieses ist bei Temperaturen über 1100° , besonders in der Nähe anderer glühender Platinmetalle, wie Thermometergefäß und Heizblech, der Verunreinigung durch Zerstäubung ausgesetzt. Als Schutz hiergegen erwiesen sich allein Röhren aus Quarzglas geeignet. Die Grenze ihrer Brauchbarkeit, die uns bei 1600° erreicht schien, setzte zunächst auch den Messungen mit dem Luftthermometer ein Ziel.

Die optischen Messungen an dem schwarzen Körper wurden mit dem Lummer-Brodhunschen Spektralphotometer ausgeführt und reichen bis 1570° . Die Konstante c des Wienschen Gesetzes fanden wir im Mittel zu 14200.

Außerdem wurde noch das optische Pyrometer²⁾ zur Untersuchung herangezogen. Der Einfachheit halber werden hier

1) Soweit man aus der Übereinstimmung verschiedener Beobachter schließen kann, die teilweise verschiedene Methoden benutzen, beträgt die absolute Genauigkeit der Temperaturen bei 1000° etwa $2-3^{\circ}$; bei relativen Messungen mit dem Thermoelement erreicht man ungefähr die doppelte.

2) L. Holborn u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 10. p. 225. 1903.

farbige Gläser statt der spektralen Zerlegung benutzt. Dies ist kein Nachteil, solange man den Beobachtungen direkte Eichungen mit dem schwarzen Körper zugrunde legt. Die ungenaue Kenntnis der Wellenlänge führt aber zu Ungenauigkeiten, wenn man mit dem Instrument die Temperaturskala nach dem Strahlungsgesetz fortsetzen will. Wir haben deshalb die wirksame Wellenlänge des Apparates aus dem Strahlungsgesetz abzuleiten versucht. Unter der Annahme der alten Temperaturskala zeigt die Wellenlänge ebenso wie die Konstante c einen ausgesprochenen Gang mit der Temperatur, während sie sich innerhalb der Fehlergrenze als konstant erwies, wenn man der Temperaturmessung durchweg das Stickstoffthermometer zugrunde legte.

Im Anschluß an die Beobachtungen mit dem Stickstoffthermometer wurde der Schmelzpunkt des Palladiums neu bestimmt: er ergab sich zu 1575° . Auf optischem Wege erhielten wir 1570 und 1582° , je nachdem der schwarze Körper bei stationärer Temperatur mit Thermoelement oder bei veränderlicher Temperatur ohne Thermoelement beobachtet wurde. Für den Schmelzpunkt des Platins, der nur nach dem letzten Verfahren gemessen wurde, fanden wir 1790° .

I. Luftthermometrische Messungen.

A. Messungen mit dem Platiniridiumgefäß (20 Proz. Ir).

1. Versuchsanordnung.

Manometer. Wie in den früheren Arbeiten über das Luftthermometer bei hohen Temperaturen wurde auch jetzt das Verfahren mit konstantem Volumen angewandt. Für die Druckmessung diente der von Fuess bezogene Apparat, der früher beschrieben und l. c. p. 821 abgebildet ist. Um den schädlichen Raum möglichst zu verkleinern, ersetzten wir den Manometerschenkel A (Fig. 1), der mit dem Luftthermometergefäß in Verbindung steht, durch einen engeren. Das neue Rohr, das nahezu dasselbe Lumen besitzt, wie der offene Manometerschenkel, wurde nach dem Vorgang von Chappuis in derselben Weise wie das alte durch eine gut gepaßte Stahlkappe mit ebener Endfläche abgeschlossen, die auf das Glasrohr mit Siegelack sorgfältig aufgekittet wurde und eine nur 0,3 mm lange Spitze für die Einstellung trug; hierdurch wurde

der schädliche Raum über der Quecksilberkuppe (abgesehen von der Platinkapillare) von $0,4 \text{ cm}^3$ auf $0,2 \text{ cm}^3$ herabgedrückt. Die Verbindung des Raumes über der Kuppe mit der zum Gefäß führenden Platinkapillare war in gleicher Weise, wie früher, hergestellt.

Eine zweite wesentliche Veränderung bestand darin, daß die ursprünglich direkte kapillare Verbindung des Manometerschenkels mit dem Gefäß durch ein kleines kapilläres Glas-T-Stück B unterbrochen wurde. In zwei der drei Öffnungen waren die Enden der zum Manometer bez. zum Gefäß führenden Platinkapillare eingekittet, das dritte Ende war an eine Reihe von fünf auskalibrierten Gefäßen von abnehmendem Volumen ($5,9643$; $3,9950$; $2,5392$; $1,4864$; $0,9648 \text{ cm}^3$) angeblasen, die untereinander durch kurze, mit Teilungen versehene Kapillaren verbunden waren. Die in einem Wasserbad W befindlichen Zusatzvolumina dienten zu volumetrischen Zwecken und waren während der Temperaturmessungen mittels einer unten durch Gummischlauch angeschlossenen Füllkugel

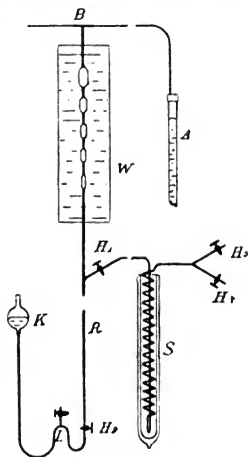


Fig. 1.

K mit Quecksilber gefüllt. Durch diesen Teil des Apparates geschah auch die Füllung des Gefäßes mit Stickstoff, indem ein durch den Hahn H_1 abschließbares, schräg nach oben gebogenes Ansatzstück unterhalb der Volumina zu dem Stickstoffentwickelungs- und Reinigungsapparat bez. zur Luftpumpe führte, so daß wir auf ein Ansatzrohr am Manometerschenkel A verzichten konnten. Um beim Einführen des Quecksilbers in die Volumina keine Luftbläschen mit hinaufzuführen, ließen wir das fünfteilige Gefäß in eine ca. 80 cm lange Röhre R endigen, die unten umgebogen und mit einem Luftfang L und einem Hahn H_2 versehen war. Vor dem Einleiten von Stickstoff in den Apparat wurde die Röhre zunächst nur bis zu geringer

Höhe mit Quecksilber gefüllt und nach Abschluß des Hahnes H_2 mit evakuiert. Nachdem ein bestimmtes Quantum Stickstoff eingeleitet worden war, ließen wir das Quecksilber zunächst so hoch steigen, daß es eben durch den Hahn H_1 hindurchtrat; nach Abschluß dieses Hahnes wurde das Quecksilber weiter gehoben, um die Volumina zu füllen.

Die Manometerablesung geschah wie früher.

Stickstofffüllung. Der zur Füllung dienende Stickstoff war aus einer Lösung von 10 Teilen Ammoniumchlorid, 10 Teilen Natriumnitrit, 10 Teilen Kaliumbichromat in 90 Teilen destilliertem Wasser gewonnen worden und in einem Gasometer über einer wässrigen Lösung von Pyrogallol und Ätzkali aufgefangen. Von hier wurde der Stickstoff durch Kalilauge, eine auf Weißglut erhitzte Platinkapillare, eine auf Rotglut erhitzte Verbrennungsröhre mit Kupfer und Kupferoxyd, ein Phosphor-pentoxydrohr, und endlich nach Passieren des Hahnes H_3 durch eine Glasspirale S , die in flüssige Luft tauchte, zu der oben erwähnten Eintrittsstelle geleitet; zwischen dem Hahn H_3 und der Spirale S zweigte eine Leitung mit dem Hahn H_4 zur Pumpe ab. Die Verbindungen waren sämtlich entweder durch Siegelackkittung oder Verblasen hergestellt. Vor der Füllung wurde zunächst der ganze Apparat (Luftthermometer und Reinigungsapparat), unter Erwärmung des Luftthermometergefäßes auf ziemlich hohes Vakuum ausgepumpt, dann mit etwas Stickstoff gespült, darauf nochmals ausgepumpt. Der Reinigungsapparat wurde alsdann durch den Hahn H_3 abgeschlossen und mit Stickstoff gefüllt, der andere Teil auf äußerstes Vakuum ausgepumpt unter gleichzeitigem Erwärmen des Gefäßes auf etwa 1300° , danach noch ein- zweimal gespült und dann endlich mit einem solchen Quantum gefüllt, daß bei ca. 1200° der Druck eine Atmosphäre betrug, damit während der Messung eine Deformation des Gefäßes durch starken Über- oder Unterdruck bei hoher Temperatur vermieden wurde.

Elektrische Heizung. Bei den früheren Messungen befand sich das Luftthermometergefäß in horizontaler Lage, so daß zugunsten einer gleichmäßigen Temperaturverteilung ein horizontal angeordneter, elektrisch geheizter Ofen zur Verwendung kommen konnte. Im Gegensatz hierzu mußten wir bei den vorliegenden Messungen auf den Vorteil der horizontalen

Lagerung verzichten; wir stellten Gefäß und Ofen vertikal, um einen Nebenschluß des Heizstromes durch das an das Stickstoffthermometer anzuschließende Thermoelement sicherer vermeiden zu können.¹⁾ Hierzu reichen bei Temperaturen über 1200° die gebräuchlichen Schutzröhren nicht aus, da alle in Betracht kommenden Materialien dann leitend werden. Nur Luft gewährt noch eine sichere Isolation; das Schutzrohr des Thermoelements darf deshalb nirgends die Wandung des Ofens oder die des Gefäßes berühren.

Das Gefäß ruhte, wenn es sich im Eis- oder im Siedeapparat befand, mit seinem Boden auf einem kleinen Messingdreifuß, der in dem betreffenden Bade stand; befand sich das Gefäß im Ofen, so stand es auf einem Schamottedeckel, der in solcher Höhe durch ein von unten in den Ofen geschobenes Schamotterrohr getragen wurde, daß das Gefäß eine ziemlich symmetrische Lage im Ofen einnahm. Dieser bestand aus drei konzentrischen Röhren aus Marckquardtscher Masse von je 50 cm Länge (Fig. 2), die durch $\frac{1}{2}$ cm breite Zwischenräume getrennt waren. Die Heizung geschah durch einen Zylinder aus Platinfolie von 0,01 mm Wandstärke und 5,5 cm Durchmesser, der über das innerste Rohr gezogen war. Eine Akkumulatorenbatterie von 16 oder 24 Volt Spannung lieferte den Heizstrom; im stationären Zustande gaben

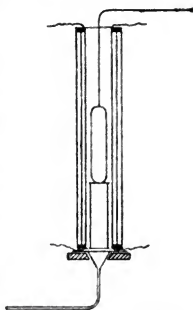


Fig. 2. $\frac{1}{13}$ nat. Größe.

100, 125 und 135 Amp. eine Temperatur von 1100, 1450 und 1600°. Nach dem Anheizen blieb die Temperatur ohne weitere Regulierung des Heizstromes befriedigend konstant. Die kleinen Schwankungen, die stetig verliefen, überstiegen während einer ganzen etwa 2 Std. dauernden Beobachtungsreihe durchschnittlich nicht den Betrag von 3°.

Einen Nachteil der vertikalen Anordnung des Ofens bildet die stärkere Ungleichmäßigkeit der Temperaturverteilung. Sie

1) Bei Anwendung von Wechselstrom, der uns bisher in ausreichender Konstanz nicht zur Verfügung stand, würde man vielleicht die vorteilhaftere horizontale Anordnung beibehalten können.

wurde bei jeder Beobachtungsreihe neu bestimmt und öfter durch Verschiebung der Asbesthüllen geändert, die das äußerste Schutzrohr des Ofens umgaben. Bei der Messung wurde so verfahren, daß die Lötstelle des Thermoelementes um bekannte Strecken längs des Gefäßes verschoben und an jeder Stelle die Thermokraft und gleichzeitig das Luftthermometer mehrfach abgelesen wurden. Nachdem alsdann alle Werte für die Thermokraft auf dieselbe Temperatur des Luftthermometers reduziert waren, wurden sie auf graphischem Wege gemittelt. Das Mittel entspricht alsdann der Temperatur des Luftthermometers unter der hier ohne Bedenken zulässigen Voraussetzung, daß die Thermokraft in dem beobachteten Bereiche linear von der Temperatur abhängt.

Zur Prüfung des Verfahrens haben wir das Gefälle oft geändert, ohne daß die Ergebnisse größere Abweichungen untereinander zeigten. Da der Unterschied zwischen der Mitteltemperatur und der maximalen Temperatur überall ungefähr im ganzen denselben Wert besaß, so genügt es, zur Beurteilung ein Beispiel für das Gefälle anzugeben. In der ersten Kolumne

3. Juli 1906	Temperatur des Luft- thermometers	Thermokraft	Lage der Lötstelle	Thermokraft red. a. 1124°
1 ^h 25,5 ^m	1122,7°	10745 MV	17,6 cm	10761 MV
12 22,5	1124,8	10857	16,4	10847
1 20	1122,8	10863	15,7	10877
12 29	1124,8	11001	14,3	10991
1 18,5	1122,9	10993	12,9	11006
12 35	1123,8	11033	12,3	11035
12 42	1123,5	11062	10,1	11068
1 14	1123,1	11023	8,55	11034
12 48	1123,6	11087	6,55	11092
1 9	1123,2	11054	5,8	11064
12 52,5	1123,4	11100	4,9	11107
1 5	1123,3	11081	1,15	11089
1 0	1123,4	11094	0,5	11101

der Zusammenstellung ist die Beobachtungszeit angegeben und in der zweiten die am Luftthermometer zu dieser Zeit beobachtete Temperatur (aus zwei Ablesungen gemittelt). Die dritte

Kolumne enthält die Thermokraft des benutzten Elementes *O*, wenn sich dessen Lötstelle in der aus der vierten Kolumne zu ersiehenden Höhe über dem Boden des Gefäßes befand. Die fünfte Kolumne enthält die elektromotorischen Kräfte für dieselben Stellen, befreit von dem Gang mit der Zeit, und zwar für eine konstante Temperatur von 1124° des Luftthermometers.

Die elektromotorische Kraft des Thermoelementes wurde in derselben Weise wie früher mit dem Kompensationsapparat gemessen. Die kalte Lötstelle befand sich stets auf der Temperatur von 0° .

Anordnung des Thermoelementes. Um das Thermoelement bequem im Ofen verschieben zu können, war zunächst zur Isolation der beiden Schenkel voneinander ein dünnes Schutzrohr über den einen Draht geschoben und das Ganze dann in eine weitere Röhre gesteckt, die aus dem Ofen herausragte. Sie war hier an einem Halter befestigt, der längs eines senkrechten, geteilten Stabes verschoben werden konnte.

Da eine Änderung der Thermokraft durch die Zerstäubung des Heizzylinders und des Gefäßes zu befürchten war, die bekanntlich bei Gegenwart von Sauerstoff in hoher Temperatur auftritt (vgl. unten), haben wir dieses Übel, das auch die Abnutzung des Heizbleches sehr befördert, zunächst dadurch eingeschränkt, daß wir durch den Ofen einen dauernden Strom von käuflichem Stickstoff leiteten. Er wurde durch konzentrierte Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet, anfangs auch durch glühendes Kupfer von Sauerstoff befreit, welches indessen als unnötig erkannt und später aufgegeben wurde. An das untere Ende des Ofens war möglichst luftdicht (Asbestdichtung) ein Nickeltrichter angesetzt (vgl. Fig. 2), in dessen Spitze der Stickstoff eintrat; in der Stunde wurden 10 Liter verbraucht.

Ferner wurden als Schutz für das Thermoelement Rohre aus Quarzglas gewählt; das äußere weitere Rohr, dessen im Ofen befindliches Ende geschlossen war, hatte einen Durchmesser von 4 mm und enthielt neben dem einen blanken Draht noch eine 1 bis 2 mm weite Kapillare, die den zweiten Schenkel einschloß. Später haben wir wohl auch eine einzige enge Röhre über das ganze Element gezogen und diese dann in der Knallgasflamme an der Lötstelle U-förmig gebogen.

Daß das Thermoelement unter diesen Vorsichtsmaßregeln bei der Messung mit dem Platiniridiumgefäß nicht merklich angegriffen wurde, konnten wir dadurch feststellen, daß vorher und nachher das Element bei genau gleicher Anordnung im Ofen für den Goldschmelzpunkt die gleiche elektromotorische Kraft zeigte:

26. Mai	. . .	10295 MV
27. Juni	. . .	10287 „

Der Differenz von 8 MV entspricht eine Temperaturdifferenz von $0,7^\circ$, die innerhalb der Fehlergrenze liegt. Dagegen ist zu vermuten, daß die unten beschriebenen, früher angestellten Versuche mit dem Gefäß aus reinem Iridium bei den höchsten Temperaturen wegen eines weniger wirksamen Schutzes eine ungenauere Bestimmung der Thermokraft geliefert haben.

Da das Quarzrohr im Ofen nirgends anliegen durfte, der verfügbare Raum zwischen Wand und Luftthermometergefäß aber nur eng war und später noch enger wurde, als das Ofenrohr nach der Heizung auf 1600° erst gar brannte und dabei schwand, so brachten wir in der Leitung des Heizstromes einen Kommutator an und kontrollierten nach jeder Verschiebung des Thermoelementes, ob ein Einfluß des Heizstromes auf das Thermoelement vorlag oder nicht. Wenn sich die Thermokraft nur unwesentlich beim Kommutieren änderte, wurde die Beobachtung fortgesetzt; traten dagegen größere bleibende Änderungen auf, so wurde die Lage des Elementes verbessert.

2. Schädlicher Raum.

Vor dem Zusammensetzen des Luftthermometers und Manometers wurde der schädliche Raum durch Ausmessen der Dimensionen gefunden. Er setzt sich zusammen aus folgenden Teilen:

Schädlicher Raum im Manometerschenkel über dem Quecksilber bis zur Stahlkappe: $0,15 \text{ cm}^3$;

Kapillare durch die Stahlkappe und Platinkapillare (Durchmesser $0,95 \text{ mm}$): $0,28 \text{ cm}^3$.

Raum in dem Glas-T-Stück über den Zusatzvolumina: $0,07 \text{ cm}^3$.

Platinkapillare von dort bis zum Gefäß pro 1 cm : $0,0073 \text{ cm}^3$.

Die letztgenannte Platinkapillare reichte bis dicht an das Gefäß, nachdem die bei den früheren Versuchen daran sitzende Platiniridiumkapillare bis auf 2 cm abgeschnitten und an ihrer Stelle die Platinkapillare angeschweißt worden war. Befand sich das Gefäß im Siedeapparat oder im elektrisch geheizten Ofen, so kam als schädlicher Raum 51 cm der Platinkapillare in Betracht ($= 0,37 \text{ cm}^3$), bei Eispunktsbestimmungen wegen größerer Eintauchtiefe 46 cm ($= 0,33 \text{ cm}^3$).

Als Temperatur des schädlichen Raumes vom Quecksilber des Manometerschenkels an bis einige Zentimeter der Platin- kapillare hinter dem Glas-T-Stück wurde die an einem Queck- silberthermometer in der Stahlkappe abgelesene Temperatur benutzt, für den Rest des schädlichen Raumes wurde das je nach der Höhe der Temperatur des Ofens verschieden starke, wiederholt elektrisch gemessene Temperaturgefälle längs der Kapillare berücksichtigt. Zum Schutz gegen die Strahlung des elektrischen Ofens stand zwischen Gefäß und Manometer eine doppelte Wand aus Asbest und Eisenblech, durch welche die Platinkapillare hindurchgeführt war.

Das Volumen des Gefäßes betrug bei Eispunktsbestim- mungen $208,52 \text{ cm}^3$.

Zur Kontrolle der ganzen Anordnung wurde der Aus- dehnungskoeffizient des Gases zwischen 0° und 100° bestimmt. Er ergab sich:

am 14. Mai 1906 für einen Druck von 147 mm zu:	0,0036627,
„ 16. „ 1906 „ „ „ 147 „ „	0,0036636,
„ 5. Juli 1906 „ „ „ 788 „ „	0,0036735,

in guter Übereinstimmung mit den Angaben von Chappuis, der für Stickstoff bei 147 mm: 0,0036636, bei 788 mm: 0,0036722 fand.

Die durch den schädlichen Raum bedingte Korrektion be- trägt unter den vorliegenden Verhältnissen bei einer Temperatur

von 1100° ca. 20°
„ 1400 „ 25
„ 1600 „ 28,

so daß ein Fehler in der Bestimmung des schädlichen Raumes von 10 Proz., was übrigens ganz ausgeschlossen erscheint, in der Temperaturbestimmung im vorliegenden Intervall ± 2 bis 3° betragen würde.

3. Bestimmung der Ausdehnung von Platiniridium und Iridium über 1000°.

Platiniridium (80 Pt, 20 Ir). Für die lineare Ausdehnung $\Delta l/l$ des Platiniridiums ist früher¹⁾ eine Formel aufgestellt worden, die die Beobachtungen zwischen 0 und 1000° befriedigend darstellt. Wir benutzen dieselbe Formel

$$\frac{\Delta l}{l} = \{8198 t + 1,418 t^2\} 10^{-9}$$

bis 1600° für die Berechnung der Ausdehnung des Luftthermometergefäßes, nachdem wir uns durch besondere Versuche überzeugt haben, daß die Extrapolation der Formel innerhalb der Genauigkeitsgrenze unserer luftthermometrischen Messungen gestattet ist.

Da der früher benutzte Apparat für die Bestimmung der Ausdehnung über 1000° hinaus nicht brauchbar ist, haben wir eine neue Vorrichtung benutzt. Ein 25 cm langer, 1 cm breiter und 0,02 cm dicker Streifen aus Platiniridium wurde elektrisch geglüht. Zu diesem Zweck war der Streifen horizontal auf einem Stativ (Fig. 3) mittels der Klemmen K_1 und K_2 eingespannt, so daß seine Ebene senkrecht stand. Die eine Klemme K_1 war fest, die andere K_2 beweglich mit kleinen Friktionsrollen gelagert; der Strom wurde der letzteren durch ein biegsames Silberband s zugeführt. Das Platiniridiumband war durch ein Gewicht G von 0,5 kg gespannt. Zur Beobachtung der Ausdehnung waren an jedem Ende des Bandes eine Gruppe von neun Teilstrichen in 1 mm Entfernung mit dem Diamanten gezogen, auf die zwei Mikroskope M_1 und M_2 eingestellt waren, welche in unveränderlicher Lage auf einer horizontalen Schiene N aus Nickelstahl (Invar) montiert waren. Das Ganze, sowohl Schiene wie das Stativ mit dem Platiniridiumband, standen sicher auf einem Steinpfeiler. Die Ausdehnung wurde in ähnlicher Weise wie früher mit dem Okularmikrometer der Mikroskope gemessen, die durch eine das Stativ bedeckende, geschwärzte Blechhaube und einen Schirm aus Eisenblech gegen die Strahlung des elektrisch geglühten Bandes geschützt waren.

1) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 4. p. 104. 1901.

Zunächst wurde in kaltem Zustande bei Zimmertemperatur gemessen, die an einem in die Blechhaube gelegten Quecksilberthermometer abgelesen wurde. Die Temperatur des glühenden Bandes bestimmten wir mit Hilfe des optischen

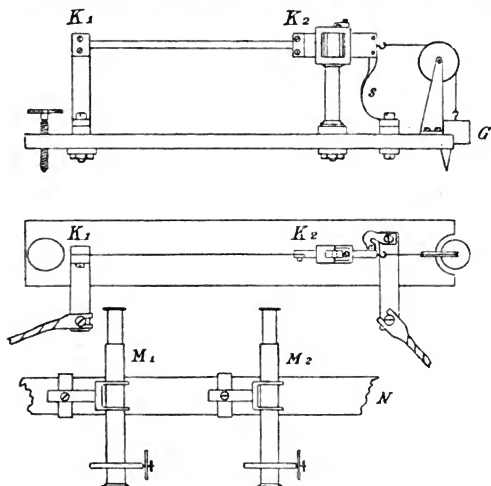


Fig. 3. $\frac{1}{7}$ nat. GröÙe.

Pyrometers, dessen Lampe wie gewöhnlich mit dem schwarzen Körper geeicht war. Aus den in dieser Weise gemessenen schwarzen Temperaturen berechnen wir dann die wahren Temperaturen des Platiniridiumbandes unter der Annahme, daß das Emissionsvermögen des Metalles (bezogen auf den schwarzen Körper) konstant ist. Dieser Satz ist früher¹⁾ für Gold, Silber und Platin in weiten Temperaturgrenzen innerhalb der Genauigkeitsgrenze, welche die Temperaturmessung liefert, bewiesen. Für Platin ergab sich das Emissionsvermögen im roten Licht zu 0,32 (l. c.), für Iridium liefern noch nicht ver-

1) L. Holborn u. F. Henning, Sitzungsber. der Berliner Akad. 1905. p. 311. Das Resultat dieser Abhandlung wird durch die vorliegende Arbeit nicht geändert.

öffentliche Versuche denselben Wert. Wir nehmen an, daß dieselbe Zahl für Platiniridium gilt. Hiernach ergibt sich für die Differenz der schwarzen und der wahren Temperatur

bei 1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600° S.T.
+91	106	123	141	160	181	203

Ein um 5 Proz. kleineres Emissionsvermögen würde eine Korrektur von +4,4° bei 1000°, von +9,0° bei 1500° ergeben und den Ausdehnungskoeffizienten um $\frac{1}{2}$ Proz. verkleinern.

Die Einstellung des optischen Pyrometers auf das glühende Platiniridiumband erfolgte an elf verschiedenen Stellen, wie folgendes Beispiel zeigt; aus diesen Einzelablesungen wird die Mitteltemperatur gebildet.

	Mitte	1160°		
2 cm	rechts	1158	2 cm	links 1158°
4 "	"	1158	4 "	" 1158
6 "	"	1165	6 "	" 1160
8 "	"	1163	8 "	" 1158
9 "	"	1169	9 "	" 1158
	Mitte	1158		Mitte 1163

Über 1200° hinaus beobachteten wir bei dem optischen Pyrometer mit einer Lichtschwächung durch zwei spiegelnde Prismen. Der Einstellungsfehler dürfte auch hierbei 5° nicht übersteigen.

In Tab. 1 sind die Ergebnisse der Beobachtungen zusammengestellt. Nimmt man an, daß der wahre Ausdehnungskoeffizient linear von der Temperatur abhängt, also

$$\alpha_w = a + 2bt,$$

so beträgt die Verlängerung der Längeneinheit $\Delta l/l$ bei der Erwärmung von der Temperatur t_1 auf t_2

$$\frac{\Delta l}{l} = \int_{t_1}^{t_2} \alpha_w dt = a(t_2 - t_1) + b(t_2^2 - t_1^2).$$

Hieraus folgt für den mittleren Ausdehnungskoeffizienten im Bereich t_1 bis t_2 :

$$\frac{\Delta l}{l(t_2 - t_1)} = a + b(t_1 + t_2)$$

und im Bereich 0 bis t :

$$\frac{\Delta l}{lt} = a + bt.$$

Tabelle I.

1906	Mittel der Verschiebung		Δl (mm)	l (mm)	t_2	t_1	$t_1 + t_2$	$l(t_2 + t_1)$		Differenz in Proz.
	rechts (mm)	links (mm)						beob.	ber.	
a) Platiniridium.										
4. Sept.	2,152	0,272	1,880	179,0	1108,0°	22,5°	1130,5°	9675.10 ⁻⁹	9801.10 ⁻⁹	+1,3
	2,147	0,279	1,868	179,0	1102,5	22,5	1125,0	9663	9793	+1,3
	2,526	0,313	2,213	179,0	1275,5	22,5	1298,0	9867	10039	+1,7
	2,541	0,327	2,214	179,0	1273,5	22,5	1296,0	9887	10036	+1,5
	3,403	0,406	2,997	178,5	1632,0	25,4	1657,4	10450	10548	+1,0
5. Sept.	2,805	0,277	2,528	179,0	1391,0	25,1	1416,1	10340	10206	-1,3
	2,815	0,286	2,529	179,0	1407,0	25,1	1432,1	10224	10229	—
	3,297	0,316	2,981	178,5	1605,2	24,9	1630,1	10568	10509	-0,6
	3,310	0,330	2,980	178,5	1609,2	24,9	1634,1	10538	10515	-0,2
b) Iridium.										
19. Juli	1,650	0,150	1,500	179,5	1070,5°	22,2°	1092,7°	7973.10 ⁻⁹	7962.10 ⁻⁹	-0,1
20. "	1,598	0,127	1,471	179,0	1061,5	21,8	1083,3	7903	7951	+0,6
21. "	1,912	0,073	1,839	179,5	1267,0	22,2	1289,2	8230	8190	-0,5
	2,001	0,168	1,833	179,5	1282,0	22,9	1304,9	8112	8208	+1,2
	2,453	0,110	2,343	179,0	1571,4	21,5	1592,9	8445	8542	+1,2
26. "	1,752	0,101	1,651	180,5	1146,0	21,2	1167,2	8132	8049	-1,0
	2,077	0,075	2,002	180,5	1357,0	21,2	1378,2	8304	8293	-0,1
	2,498	0,093	2,405	180,0	1571,4	21,2	1592,6	8618	8541	-0,9
	2,877	0,203	2,674	179,0	1730,5	22,2	1752,7	8746	8727	-0,2

Die Übereinstimmung zwischen den nach der früheren Formel berechneten und den jetzt beobachteten Werten ist befriedigend.

Es ist noch zu bemerken, daß eine heftige Zerstäubung des Platiniridiums bei der Messung nicht zu umgehen war. Es ist nicht ausgeschlossen, daß hiermit die bleibenden Verlängerungen (bis zu 0,1 mm) zusammenhängen, die nach der Erhitzung auf die höchsten Temperaturen im kalten Zustande beobachtet wurden. Die Ausdehnung ist stets auf den nachfolgenden kalten Zustand bezogen, wenn bleibende Änderungen auftraten.

Iridium. Nach derselben Methode wurde die Ausdehnung eines Iridiumbandes von denselben Abmessungen bis 1750° bestimmt. Die Beobachtungen unterscheiden sich nicht von den vorhergehenden, nur sei besonders hervorgehoben, daß bei Iridium auch nach dem Erwärmen auf die höchste Temperatur niemals eine bleibende Verlängerung stattfand. Tab. 1 enthält die Ergebnisse. Die beobachteten Werte sind mit den nach der Formel

$$\frac{\Delta l}{l t} = \{ 6696,7 + 1,158 t \} 10^{-9}$$

berechneten verglichen. Diese Gleichung, die nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet wurde, stellt die Beobachtungen befriedigend dar.

In dem Temperaturbereich von 0 bis 80° ist früher von Benoît¹⁾ die Formel

$$\frac{\Delta l}{l t} = (6358 + 3,21 t) 10^{-9}$$

für Iridium bestimmt worden. Extrapolieren wir unsere Gleichung auf 100°, so gibt sie für diese Temperatur einen Wert, der um 2 Proz. größer ist als der von Benoît.

4. Beobachtungen am Stickstoffthermometer.

Eispunkt. Die Messungen am Luftthermometer bei Siedetemperatur des Wassers sowohl, als bei hohen Temperaturen wurden stets durch Bestimmung des Eispunktes am Luftthermometer eingeschlossen. Derselbe zeigte im allgemeinen

1) R. Benoît, Travaux et Mém. du Bur. intern. 6. p. 1. 1888.

eine befriedigende Konstanz. Die nachfolgenden Zahlen geben den reduzierten Druck

$$H_0 \left(1 + \frac{v_s}{V_0} \frac{1}{1 + \alpha t_s} \right);$$

H_0 bezeichnet hier den am Eispunkt abgelesenen Druck, v_s und t_s das Volumen und die Temperatur des schädlichen Raumes, V_0 das Volumen des Gefäßes bei 0° .

14. Mai	147,05 mm,	danach 1 Messung bei 100°		
	147,05 „			
16. „	147,12 „			
	147,14 „	„ je 1 „	„	100 und 1100°
18. „	147,05 „	„ 2 „	„	1100
21. „	147,01 „	„ 1 „	„	1400
25. „	147,05 „	„ 1 „	„	1100
26. „	147,02 „			

Vor der nun folgenden Heizung war der Ofen verändert worden und infolgedessen wurden bei dieser Heizung gewisse Teile der äußeren Asbestpackung stärker erhitzt als früher geschehen war, so daß nach früheren Erfahrungen zu schließen, Wasserstoff abgegeben wurde, der in das Gefäß eindrang; so mag sich die Veränderung des danach ausgeführten Eispunktes gegen die früheren erklären.

29. Mai	147,36 mm,	danach 1 Messung bei 1450°		
30. „	147,35 „	„ 1 „	„	1600
31. „	147,51 „	„ 1 „	„	100
	147,56 „			
25. Juni	147,52 „	„ 1 „	„	1600
27. „	147,75 „	„ 1 „	„	1100

Bei dieser Temperatur von 1100° gab der Asbest vermutlich kein Gas mehr ab und infolgedessen müßte sich der frühere Eispunkt wieder herstellen, nachdem der eingedrungene Wasserstoff wieder nach außen diffundiert wäre.

30. Juni	147,01 mm,	danach 1 Messung bei 1100°		
2. Juli	146,70 „	„ 1 „	„	1100
4. „	146,70 „			

Bei der Berechnung der Temperatur des Luftthermometers wurde jedesmal der der Heizung folgende Eispunkt zugrunde gelegt; das scheint besonders auch aus dem Grunde am Platz

zu sein, weil die Zeit, die von Beginn des Heizens bis zu Beginn der Messung verstrich, wegen der großen Kapazität des Ofens etwa doppelt so lang war, als die der Beobachtung selbst; es war also zu erwarten, daß falls beim Heizen eine Änderung des Nullpunktes eintrat, sie sich schon nahezu vollständig bei Beginn der Messung eingestellt hatte.

Gang der Beobachtung. Zunächst wurde mittels eines bei der eigentlichen Messung nicht benutzten Thermoelementes festgestellt, daß sich ein stationärer Temperaturzustand eingestellt hatte. Danach wurde das zur Messung dienende Element *O* in der beschriebenen schützenden Hülle von oben verschiebbar in den Ofen eingeführt, so daß die Lötstelle sich ungefähr in der Höhe des Ansatzes der Kapillare an das Luftthermometergefäß befand. Dann nahmen wir abwechselungsweise dreimal eine Messung der Thermokraft und zweimal eine luftthermometrische Temperaturbestimmung vor. Für diese wurden genau gleichzeitig das Manometer des Luftthermometers und das im gleichen Raum befindliche, mit dem Normalbarometer verglichene Barometer eingestellt und abgelesen, woran sich die Ablesungen der Temperaturen des Quecksilbers von Manometer und Barometer und des schädlichen Raumes schloß. Nach Kommutieren des Heizstromes wurde die Messung wiederholt. Zeigten sich hierbei Änderungen der Thermokraft, so wurde versucht, das Thermoelement einwandsfreier anzubringen, d. h. so daß möglichst jede Berührung desselben mit Ofen oder Gefäß ausgeschlossen war, und die Messung von neuem begonnen. Nach Beendigung wurde das Element an eine um wenig tieferere Stelle gebracht und hier dieselbe Messung vorgenommen u. s. f., bis wir auf diese Weise an der untersten Stelle des Gefäßes angelangt waren. Dann wurde das Element wieder hinaufgeschoben und auf diesem Rückweg in gleicher Art an ein paar Punkten beobachtet. Nach dem Verschieben des Thermoelementes wurde mit der ersten Ablesung der Thermokraft mindestens 2 Minuten gewartet, in welcher Zeit die Lötstelle, wie die Beobachtung zeigte, die Temperatur der Umgebung angenommen hatte.

Resultate. In der folgenden Tabelle sind unter Angabe des Beobachtungstages die Temperatur des Luftthermometers und die aus den Beobachtungen sich hierfür ergebende durch

Integration gewonnene Thermokraft des Elementes *O* aus Platin-Platinrhodium aufgeführt. In der vorletzten Kolumne sind die Thermokräfte auf die darüber angegebene Mitteltemperatur umgerechnet unter Benutzung der Empfindlichkeit, welche die weiter unten mitgeteilte Formel ergibt; daneben stehen die Abweichungen vom Mittel in Celsiusgrad.

Tabelle 2.

1906	Temperatur des Luft- thermometers	Thermokraft (MV)		Abw. vom Mittel
		beob.	red. auf 1096°	
17. Mai	1096°	10737	10737	-0,4°
19. "	1096	10716	16	+1,3
	1096	10732	32	0
25. "	1086	10588	05	+2,3
29. Juni	1100	10772	25	+0,6
30. "	1100	10800	53	-1,8
3. Juli	1124	11035	54	-1,9

Mittel: 10732

red. auf 1440°

25. Mai	1440	14748	14748	-3,1
28. "	1440	14704	14704	+0,8
29. "	1455	14847	14688	+2,2

Mittel: 14713

red. auf 1600°

31. Mai	1591	16322	16422	+0,8
26. Juni	1598	16419	16441	-0,9

Mittel: 16431

Um die vorliegenden Beobachtungen mit den früheren vergleichen zu können, ist das jetzt benutzte Thermoelement *O* mit dem früher an das Stickstoffthermometer angeschlossenen Normalelement verglichen worden. Hiernach ergeben sich folgende Werte für die Thermokraft des Elementes *O*:

300°	2290	600°	5191	900°	8403
400	3222	700	6228	1000	9543
500	4189	800	7299	1100	10716

Wir erhalten jetzt für 1100° 10780 MV, also eine größere Thermokraft, demnach für dieselbe Thermokraft eine kleinere

Temperatur. Der Unterschied beträgt 5° . Die Abweichung vom Mittel würde auch noch in die Fehlergrenze der früheren Bestimmungen fallen. Wir halten es jedoch für richtiger, jenen Messungen, die bei kleinerem Temperaturgefälle ausgeführt wurden, ein größeres Gewicht beizulegen als den jetzigen.

Bei 1440° und 1600° sind dagegen die Thermokräfte jetzt erheblich kleiner beobachtet, als der Extrapolation der quadratischen Formel über 1100° hinaus entspricht; die vorliegenden Bestimmungen geben also eine höhere Temperatur für die gleiche Thermokraft: der Unterschied beträgt 19° bei 1440° und 48° bei 1600° C.

Zur Festlegung der luftthermometrischen Skale haben wir den Palladiumschmelzpunkt gemessen. Zu dem Zweck wurde in die Lötstelle des Elementes *O* ein kurzer Draht aus Palladium eingeschmolzen. Das Element befand sich im Ofen in genau gleicher Anordnung, wie bei der Vergleichung mit dem Luftthermometer, nur war das Gefäß entfernt worden. Beim Schmelzpunkt wurde die Thermokraft 16140 MV gemessen, welcher eine Temperatur von 1575° nach den Luftthermometermessungen entspricht.

B. Messungen mit dem Iridiumgefäß.

Außer dem Gefäß aus Platiniridium stand uns noch ein anderes aus reinem Iridium von 54 cm^3 Inhalt zur Verfügung. Wir haben mit diesem zwei Messungsreihen angestellt, die bis 1680° C. reichen. Die luftthermometrischen Messungen stießen nirgends auf Schwierigkeiten und werden sich voraussichtlich noch ebensogut bei höheren Temperaturen fortsetzen lassen. Nur müßte alsdann statt des Thermoelementes ein anderes Vergleichsthermometer gewählt werden. Es liegt nahe, die photometrischen Messungen alsdann direkt an das Stickstoffthermometer anzuschließen. Doch ist hierfür ein langer Ofen mit sehr gleichmäßiger Temperaturverteilung notwendig. Bei dem Vorhandenen war das Temperaturgefälle so groß, daß ein verschiebbares Thermoelement nicht entbehrt werden konnte. Wegen dieser größeren Ungleichmäßigkeit der Heizung und ferner wegen der kleineren Größe des Gefäßes beanspruchen die Messungen geringere Genauigkeit als die mit dem Platiniridiumgefäß. Beide stimmen jedoch befriedigend überein.

Versuchsanordnung. Das Gefäß und der Ofen sind von der Firma Heräus bezogen. Das Gefäß war ein Zylinder von 10 cm Länge und 2,5 cm Durchmesser, der sich in eine starkwandige, rechtwinklig gebogene Kapillare von 32 cm Länge fortsetzte. Da diese ebenfalls aus reinem Iridium bestand, so war sie wegen der schwierigen Bearbeitung dieses Materials nicht besonders gleichmäßig und im Durchschnitt weiter als man die Platinkapillare zu wählen pflegt. Ferner erwies sich das Gefäß auch nach mehrfachen Dichtungsversuchen immer noch etwas undicht, wie aus den Beobachtungen des Nullpunktes zu ersehen ist; ein Druck von 137 mm stieg pro Tag um 0,017 mm.

Die Iridiumkapillare war mit der zum Manometer führenden Platinkapillare durch Einkitten in ein kurzes Glaskapillarstück verbunden. Bei der ersten Reihe (von Nov. bis Dez. 1905), war das Manometer des Luftthermometers in seiner ursprünglichen Form verwandt worden, d. h. mit dem weiteren Schenkel versehen. Für die Beobachtungen der zweiten Reihe (Jan. u. Febr. 1906) war der weitere durch den auch später benutzten engeren ersetzt worden.

Die Ausmessungen ergaben als Volumen des Gefäßes, wenn es sich in Eis befand: 54,33, im Ofen: 54,24 cm³. Für die 1. bez. 2. Reihe kamen für den schädlichen Raum in Betracht:

Raum über dem Quecksilber im Manometerschenkel bis zum Glas-T-Stück, samt der Platinkapillare, die von hier bis zur Iridiumkapillare führte, 0,71 bez. 0,52 cm³.

Raum in dem Glas-T-Stück über den Zusatzvolumina: 0,07.

Raum in dem die Kapillaren verbindenden Glasstück: 0,02.

Raum in der Iridiumkapillare, wenn das Gefäß sich im Eis befand: 0,28, im Ofen: 0,37 cm³.

Die durch den schädlichen Raum bedingte Korrektur beträgt daher:

bei den Temperaturen	bei der 1. Reihe	bei der 2. Reihe
800°	ca. 85°	ca. 70°
1100	110	90
1400	135	110
1600	150	125

Die Stickstofffüllung geschah in der oben angegebenen Weise.

Der vertikal stehende elektrische Ofen (Fig. 4), der zur Heizung diente, bestand aus einem Iridiumrohr JJ' von 25 cm Länge und 3,3 cm innerer Weite, welches von einem 1 cm dickwandigen Magnesiarohr MM' umgeben war. Der Raum zwischen diesem und dem äußeren Schutzmantel NN' aus Schamotte war durch grobe Stücke geschmolzener Magnesia

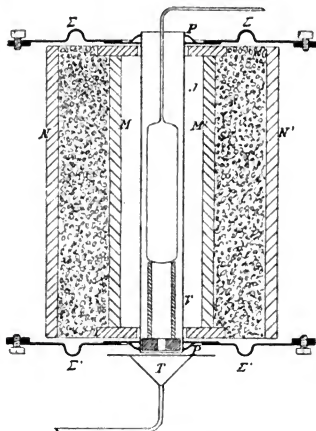


Fig. 4. $\frac{1}{6}$ nat. Größe.

ausgefüllt. Zur Stromzuführung waren oben und unten an das Iridium 3 cm breite Platinringe PP' angelötet, an welche sich starke Silberscheiben $\Sigma\Sigma'$ für die Zuleitung des Heizstromes schlossen. Von unten wurde wiederum durch den Trichter T Stickstoff eingeleitet, der die Zerstäubung des Iridiums stark herabsetzte. Bei einer Spannung von 8 Volt erforderte der Ofen im stationären Zustande folgende Stromstärken:

bei 1200°	ca. 570 Amp.
1400	650
1600	770

Die Temperaturverteilung war wegen der Kürze des Ofens weniger günstig und wurde auch durch aufgesetzte, besonders

elektrisch geheizte Deckel nicht wesentlich verbessert. Als Beispiel diene die Beobachtung vom 20. Jan. 1906:

	Temperatur des Luft- thermometers	Thermokraft (MV)	Lage der Lötstelle	Thermokraft red. a. 1680°
1 ^b 18 ^m	1683,5°	16644	8,4 cm	16606
1 25	1683,3	17086	6,9	17050
2 13	1680,7	17174	6,6	17166
1 30	1683,2	17316	5,6	17281
1 35	1682,8	17430	4,45	17400
1 40	1682,6	17426	3,25	17398
2 0	1681,5	17400	3,05	17384
1 45	1682,6	17392	2,0	17364
1 50	1682,4	17208	0,55	17182
1 55	1681,9	17145	0,2	17124

Beobachtungen. Wir geben auch hier die reduzierten Eis-
punktbestimmungen an mit Hinzufügung der dazwischen vor-
genommenen Heizungen.

1905. I. Reihe

11. Nov.	250,55 mm,			
13. "	250,60			
15. "	250,56	danach 1 Messung bei	100°	
	250,65			
17. "	250,54	" 1 "	" 100	
	250,55	" 1 "	" 800	
18. "	250,68			
21. "	250,54	" 1 "	" 100	
	250,63	" je 1 "	" 1000 u. 1200°	
23. "	250,47			
25. "	250,45	" 1 "	" 1430	
	250,37	" 1 "	" 1540	
28. "	250,63			
2. Dez.	250,85			
11. "	250,91			
15. "	251,35	" 1 "	" 1560	
18. "	251,75			

1906. II. Reihe

17. Jan.	136,19 mm,	danach 1 Messung bei 1670°
19. „	136,19	„ 1 „ „ 1680
22. „	136,22	
31. „	136,67	„ 1 „ „ 1685
1. Febr.	136,31	
2. „	136,36	„ 1 „ „ 1670
3. „	136,31	„ 1 „ „ 1460
6. „	136,25	„ je 1 „ „ 1200 u. 1450°
8. „	136,65	„ 1 „ „ 100
	136,75	
12. „	136,76	„ 1 „ „ 100
	136,76	„ 1 „ „ 1200
14. „	136,62	
7. Mai	138,00	

Der Gang der Beobachtungen war der oben beschriebene. Einen Kommutator konnten wir bei diesen Reihen allerdings nicht verwenden. Es erschien dies auch weniger notwendig, da der Zwischenraum zwischen dem Gefäß und der Ofenwandung größer war als bei dem Platiniridiumgefäß, so daß eine Berührung des Thermoelementes mit den Wänden weniger zu befürchten war. Indessen wurde zuweilen von einem Versuch zum andern die Stromrichtung gewechselt. Einen Einfluß schien diese nicht auszuüben.

Für die Vergleichung mit dem Iridiumgefäß wurden nacheinander zwei Elemente benutzt, die vor ihrer Verwendung ebenfalls an das Normalelement angeschlossen waren. In Tab. 3 sind die Ergebnisse zusammengestellt, und zwar sind hier die Thermokräfte auf das bei dem Platiniridiumgefäß benutzte Element *O* umgerechnet, damit man die mit diesem Gefäß erhaltenen Resultate, die am Schluß der Tabelle angefügt sind, leichter vergleichen kann. In der letzten Kolumne von Tab. 3 sind die Werte der Temperatur aufgeführt, die sich durch Rechnung für die beobachteten Thermokräfte *E* aus der Formel

$$E = 30000 \log_{10} \left(1,25 + \left(\frac{t}{1000} \right)^2 \right) - 1015$$

ergeben. Diese Gleichung stellt alle neuen Beobachtungen bis 1680°, sowie die alten zwischen 600 und 1100° befriedigend dar.

Tabelle 3.

		$E(MV)$	t	
			beob.	ber.
I. Reihe	18. Nov. 1905	7220	795°	795°
	23. "	9953	1034	1034
		12332	1238	1239
	25. "	14582	1430	1435
	28. "	15787	1539	1544
	16. Dez.	15866	1557	1550
II. Reihe	18. Jan. 1906.	17297	1670	1682
	20. "	17270	1680	1679
	31. "	17324	1685	1684
	2. Febr.	17228	1670	1675
	5. "	14776	1462	1453
	7. "	11898	1203	1201
		14750	1452	1451
	13. "	11808	1203	1194

Beobachtungen mit dem Platiniridiumgefäß (Mittelwerte):

1906	10732	1096	1101
	14713	1440	1445
	16431	1600	1601

Beobachtung des Goldschmelzpunktes im Platiniridiumofen:

10290	1063,5
-------	--------

II. Das Thermoelement.

Über die Veränderung, die die Thermoelemente aus Platinmetallen bei dem Gebrauch in hoher Temperatur erleiden können, ist schon früher¹⁾ berichtet worden. Später²⁾ wurden die Stäubungserscheinungen glühender Platinmetalle untersucht, in denen man hauptsächlich die Ursache für die Veränderung vermuten mußte, nachdem sich durch Einführung der elektrischen Heizung der Einfluß schädlicher Gase besser vermeiden ließ. Es hat sich dabei herausgestellt, daß die Stäubung des Iridiums bei Erhitzung über 1100° in solchem Maße gegen die des Platins zunimmt, daß Drähte aus Platin-

1) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 538, 1906.

2) L. Holborn, F. Henning u. L. Austin, Wissensch. Abhandl. der Physik.-Techn. Reichsanstalt 4. p. 88. 1903.

iridium infolge der veränderten Zusammensetzung ihre Thermokraft wesentlich ändern. Aber auch Platin und Rhodium zeigen im verminderten Grade dieselbe Erscheinung. Das Übel wird für die Elemente natürlich verschlimmert, wenn sie sich in der Nähe der glühenden Heizbleche aus Platin befinden. So z. B. ändert sich oft das Thermoelement im schwarzen Körper um mehrere Grad, wenn er lange Zeit bei 1400° benutzt worden ist.

Im Ofen des Luftthermometers, wo noch das Gefäß hinzukommt, war die Gefahr für das Thermoelement am größten, als wir reines Iridium für das Heizblech und das Gefäß benutzten. Am wirksamsten wurde die Stäubung, deren Grad leicht aus der Schwärzung der aus dem Ofen herausragenden Teile beurteilt werden kann, dadurch vermindert, daß man käuflichen Stickstoff durch das Heizrohr leitete. Immerhin war aber auch dann noch eine merkliche Änderung der Thermoelemente vorhanden, die wir durch Schutzröhren aus Marckquardtscher Masse zu verhindern hofften. Wir zogen deshalb das Element entweder in einem langen dünnwandigen Rohr aus dieser Masse durch den ganzen Ofen der Länge nach hindurch oder führten die Drähte in einem kurzen dickwandigen Rohr mit geschlossenem Ende einseitig ein. Aber beide Male war Iridium an das Thermoelement gelangt¹⁾, was vermuten läßt, daß sich innerhalb gewisser Temperaturgrenzen ein flüchtiges Iridiumoxyd bildet, das durch die poröse Wand des Schutzrohres hindurchgeht und erst an kälteren Stellen in eine feste Verbindung verwandelt wird.

Es war deshalb ein undurchlässiges Glas zum Schutze der Thermoelemente notwendig. Quarzglas, das wir versuchten, entsprach dem Zweck, hat aber den Nachteil, daß es nach kurzem Gebrauch beim Erkalten kristallisiert und brüchig wird.

Es ist uns nicht gelungen, in dem an das Luftthermometer angeschlossenen Bereich von 0 bis 1600° eine durchgehende Formel für die Abhängigkeit der Thermokraft von der Temperatur aufzustellen. Da die früher benutzte quadratische Gleichung, die für das Normalelement zwischen 250 und 1100° gültig war,

$$(I) \quad E = -310 + 8,048t + 0,00172t^2$$

1) Vgl. auch A. Day u. E. S. Shepherd, Am. Journ. of Sc. 22. p. 286. 1906.

über 1100° hinaus versagt, haben wir andere Formeln probiert. Als Interpolationsformel bis 1450° ist vielfach von uns bei dem schwarzen Körper die folgende angewendet worden:

$$(II) \quad E = 18743 + 28,820 \left(\frac{1}{2}t + 273\right) - 10923 \log_{10} \left(\frac{1}{2}t + 273\right),$$

deren Form Stansfield¹⁾ gegeben hat. Bis zu derselben oberen Grenze und in der Tiefe bis zu 100° paßt noch besser die Formel

$$(III) \quad E = 2,5285 t^{1,1910}.$$

Der letzte Ausdruck ist neben anderen von Holman²⁾ zur Darstellung von Thermoelementen vorgeschlagen. Es wurde noch versucht, Formel II und III für andere Thermoelemente, wie Platin-Iridium und Platin-Palladium, zu verwenden. Doch erzielt man hier keine Übereinstimmung in einem so großen Temperaturgebiet wie bei Platin-Platinrhodium.

Tabelle 4.

<i>t</i>	I.	II.	III.	IV.
0°		0	0	
100		646	609	
200		1403	1391	
300	2260	2247	2255	
400	3185	3157	3177	
500	4145	4122	4143	
600	5139	5130	5149	5145
700	6168	6173	6186	6147
800	7231	7249	7251	7217
900	8328	8350	8343	8333
1000	9460	9473	9460	9479
1100	10626	10618	10597	10640
1200		11779	11755	11805
1300		12956	12930	12965
1400		14147	14123	14115
1500		15350	15330	15247
1600				16360
1700				17450

1) A. Stansfield, Phil. Mag. 46. p. 59. 1898.

2) W. Holman, Proc. of the American. Academy 23. p. 193. 1895.

Endlich möge noch die Interpolationsformel für das Normalelement angegeben werden, die derjenigen entspricht, welche für das Element *O* aus Vergleichung mit dem Stickstoffthermometer zwischen 1100 und 1600° abgeleitet wurde. Sie lautet:

$$(IV) \quad E = 30600 \log_{10} \left(1,3 + \left(\frac{t}{1000} \right)^2 \right) - 1590.$$

Tab. 4 gibt die nach den verschiedenen Formeln berechneten Werte des Normalelementes, das an das Element *O* bis 1100° durch die oben mitgeteilte Vergleichung und ferner durch den Palladiumschmelzpunkt angeschlossen worden ist.

III. Prüfung des Wienschen Gesetzes.

Zur Erzeugung der schwarzen Strahlung diente gewöhnlich der elektrisch geheizte schwarze Körper von Lummer und Kurlbaum in der Form, wie er früher¹⁾ beschrieben worden ist. Mehrfach wurde jedoch auch ein verkleinertes Modell verwendet²⁾, dessen inneres Strahlungsrohr nur eine Länge von 14 cm und einen Durchmesser von 2 cm besaß. Entsprechend seinen geringeren Abmessungen gebrauchte dieser kleine schwarze Körper weniger Energie, bei 1500° z. B. waren 70 Amp. bei 16 Volt Spannung notwendig. Bei richtiger Anordnung des Thermoelementes geben beide Formen dasselbe Ergebnis. Da ihre Rohre aus Marckquardtscher Masse bestanden, durften sie über 1500° hinaus nicht geheizt werden. Für höhere Temperaturen haben wir später einen kleinen Körper aus reiner Magnesia³⁾ benutzt, der in dem gemeinsamen tieferen Temperaturgebiet ebenfalls mit den beiden anderen übereinstimmte. Die Thermoelemente, die in den einzelnen schwarzen Körpern angebracht wurden, waren vor deren Zusammensetzung stets an das Normalelement angeschlossen. Ein Element später nach längerem Gebrauch im schwarzen Körper auf eine einwandfreie Weise nachzuprüfen, bietet aus verschiedenen Gründen Schwierigkeiten. Es ist deshalb vorteil-

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 17. p. 106—111. 1898 u. Ann. d. Phys. 5. p. 829. 1901.

2) Dieser kleine schwarze Körper ist schon früher von Holborn u. Kurlbaum bei Messungen mit dem optischen Pyrometer benutzt worden.

3) Körper aus dieser Masse fertigt die hiesige königl. Porzellanmanufaktur an; bei gleichmäßiger Heizung haben sie sich gut bewährt.

haft, noch einen zweiten weniger benutzten Körper zur Vergleichung heranziehen zu können.

Für die Untersuchung der schwarzen Strahlung im sichtbaren Gebiet bedienen wir uns des Spektralphotometers von Lummer und Brodhun.¹⁾ In der Versuchsanordnung hatten wir uns anfangs an Lummer und Pringsheim²⁾ angeschlossen, indem wir vor den einen Spalt des Photometers den von ihnen benutzten schwarzen Körper brachten, und seine Strahlung mit der einer Glühlampe verglichen, die sich hinter einer Mattscheibe vor dem anderen Spalt befand und mit Hilfe des während der Rotation verstellbaren, rotierenden Sektors³⁾ geschwächt werden konnte. Nachher setzten wir, um uns nicht auf die unkontrollierbare Konstanz der Glühlampe verlassen zu müssen, vor den zweiten Spalt den kleinen schwarzen Körper. Da seine Temperatur auf 2 bis 3° konstant gehalten werden konnte, so schwankte seine Helligkeit in engen Grenzen; diese Änderungen wurden bei der Berechnung der Versuche nach den Ablesungen des Thermoelementes in Rücksicht gezogen. Der rotierende Sektor wurde später nach dieser Veränderung vor den ersten Spalt gesetzt, um den zur Vergleichung dienenden kleinen schwarzen Körper nicht unnötigerweise auf für ihn gefährlichen, sehr hohen Temperaturen halten zu müssen. Es wurde also die Helligkeit des großen schwarzen Körpers bei diesen Beobachtungsreihen durch den Sektor auf die des kleinen geschwächt, die übrigens für verschiedene Versuchsreihen zweckmäßig variiert wurde. In den Reihen, in welchen die Glühlampe noch Verwendung gefunden hatte, wurde der Glühlampenstrom mit Hilfe des Kompensationsapparates kontrolliert und konstant gehalten.

Berechnung der Beobachtungen. Bei einer Auswertung der Versuche zur Bestimmung der Konstante c in dem Wienschen Strahlungsgesetz könnte am einfachsten in folgender Weise verfahren werden. Man beobachtet das Verhältnis der

1) O. Lummer u. E. Brodhun, Zeitschr. f. Instrumentenk. 12. p. 133—140. 1892.

2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 3. p. 36—46. 1901.

3) E. Brodhun, Zeitschr. f. Instrumentenk. 24. p. 304. 1904.

Helligkeit: $H_1', H_2', \dots, H_i', H_k', \dots$ des großen schwarzen Körpers von der Temperatur: $T_1', T_2', \dots, T_i', T_k', \dots$ mit der Helligkeit: $H_1'', H_2'', \dots, H_i'', H_k'', \dots$ des kleinen von der Temperatur: $T_1'', T_2'', \dots, T_i'', T_k'', \dots$, und es ergibt sich für jede solche Vergleichung nach dem Wienschen¹⁾ Gesetz die Beziehung:

$$(1) \quad \lg \operatorname{nat} \frac{H_i'}{\varepsilon H_i''} = \frac{c}{\lambda} \left(\frac{1}{T_i''} - \frac{1}{T_i'} \right).$$

Der Faktor ε ist hinzugefügt, da man die Strahlung durch verschiedene Teile des Spektralphotometers hindurchgehen lassen muß und daher nicht annehmen kann, daß auf diesen verschiedenen Wegen von der Strahlung ein gleicher Bruchteil absorbiert werden wird, wenn es auch angenähert der Fall ist. Wäre T_i'' für alle Beobachtungen einer Reihe konstant, so stellte die obige Gleichung eine Gerade dar, wenn man $\lg(H_i'/\varepsilon H_i'')$ als Ordinate, $1/T_i'$ als Abszisse aufträgt, deren Neigung die gesuchte Konstante c bestimmt. Nun ist freilich T_i'' nicht vollkommen konstant zu halten, indessen wird man es so einrichten können, daß $(1/T_i'') - (1/T_k'')$ eine sehr kleine Größe ist, so daß man in der Beziehung:

$$\lg \operatorname{nat} \frac{H_k'}{\varepsilon H_k''} = \frac{c}{\lambda} \left\{ \frac{1}{T_i''} - \frac{1}{T_k''} \right\} - \frac{c}{\lambda} \left\{ \frac{1}{T_i''} - \frac{1}{T_k'} \right\}$$

den letzten Term als Korrektionsglied auffassen kann und hier für c einen angenähert richtigen Wert einsetzen darf. Dann stellt wieder die Gleichung:

$$(2) \quad \lg \operatorname{nat} \frac{H_k'}{\varepsilon H_k''} + \frac{c}{\lambda} \left\{ \frac{1}{T_i''} - \frac{1}{T_k''} \right\} = \frac{c}{\lambda} \frac{1}{T_i''} - \frac{c}{\lambda} \frac{1}{T_k'}$$

eine Gerade dar, wenn man für alle verschiedenen k den Ausdruck

$$\lg \operatorname{nat} \frac{H_k'}{\varepsilon H_k''} + \frac{c}{\lambda} \left\{ \frac{1}{T_i''} - \frac{1}{T_k''} \right\}$$

1) Eine Entscheidung für das Wiensche oder das Plancksche Strahlungsgesetz durch Messungen im sichtbaren Spektralgebiet unter Benutzung der bisher bekannten Methoden zu geben ist bekanntlich nicht möglich.

als Ordinate, $1/T_k'$ als Abszisse aufträgt, indem $(c/\lambda)(1/T_i'')$ für alle verschiedenen k dieselbe GröÙe bleibt.

Diese Methode der Bestimmung von c aus der Neigung der Isochromaten ist bequem und übersichtlich und wird bei genügender Zahl von Beobachtungen ohne Zweifel einen brauchbaren Wert von c ergeben, wenn c , wie das Gesetz annimmt, eine Konstante ist und die benutzte Temperaturskale sich innerhalb der Fehlergrenze von der absoluten nicht unterscheidet. Man wird aber auch dann noch die Beobachtungen ziemlich gut durch eine Gerade darstellen können, wenn c sich wenig mit der Temperatur ändert oder die Temperaturskale kleine Abweichungen zeigt. Denn die dadurch bedingten Abweichungen der beobachteten Punkte von der Geraden werden leicht in der graphischen Darstellung durch Einstellungsfehler überdeckt. Wir haben deshalb diese graphische Methode nur angewandt, um einen Anschluß an die früheren Beobachter zu gewinnen. Aus den Beobachtungen vom 14.—16. März z. B. konnten wir in Übereinstimmung mit den früheren Beobachtern auf diese Weise im Temperaturintervall von 800° bis 1300° C. die folgenden Werte von c ableiten:

Für die Wellenlänge $\lambda = 0,656 \mu$	$c = 14460$
0,590	14560
0,546	14550
0,501	14630
0,478	14650

Um indessen Aufschluß über einen Einfluß der Temperatur auf c zu erhalten, haben wir unsere Beobachtungen in anderer Weise ausgerechnet. Wir kombinierten nämlich immer je zwei Versuche zur Berechnung eines Wertes von c mit Hilfe der Gleichung:

$$(3) \quad \lg \text{nat} \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{c}{\lambda} \left[\left\{ \frac{1}{T_1''} - \frac{1}{T_2''} \right\} - \left\{ \frac{1}{T_1'} - \frac{1}{T_2'} \right\} \right],$$

die durch Subtraktion zweier Gleichungen von der Form (1) entsteht, indem dort:

$$\frac{H_i'}{H_i''} = \varphi_i$$

gesetzt ist. Hierbei ergab sich unter Zugrundelegung der alten Temperaturskala, die nur bis 1100° an das Stickstoffthermometer angeschlossen war, ein deutlicher Gang der Konstante c mit der Temperatur; c wuchs in dem Temperaturintervall von 800 bis 1450° von dem Wert 14200 bis 15000 . Es liegt nahe, diesen Gang auf die Extrapolation der Thermokraft zu schieben und als wahrscheinlichsten Wert von c den anzunehmen, der sich aus den Beobachtungen im Temperaturgebiet bis 1100° ergibt, der etwa bei 14200 liegt. Nach Beendigung der luftthermometrischen Messungen, durch die der Anschluß des Thermoelementes an das Stickstoffthermometer bis 1600° gewonnen war, wurde c unter Zugrundelegung dieser Skala neu berechnet und im Mittel zu 14200 gefunden; ein Gang war dabei nicht mehr zu bemerken.

Beobachtungen. Die Eichung des Spektralphotometers bezüglich der Wellenlänge geschah durch Beobachtung der Spektrallinien von Helium, Natrium, Quecksilber und Wasserstoff und wurde mehrmals während der Untersuchung kontrolliert. Der Objektivspalt war möglichst eng gewählt und blieb stets unverändert, während der Okularspalt bei den Beobachtungen im grünen und blaugrünen Teil des Spektrums wegen der geringeren Intensität etwas weiter geöffnet werden mußte, als im roten und gelben, so daß die in Rechnung zu ziehende Wellenlänge in jenen Teilen weniger genau definiert ist, als in diesen, wo sie auf $\pm \frac{1}{2}$ Proz. sicher ist.

Der rotierende Sektor besteht aus zwei Teilen, so daß zwei sich diametral gegenüberstehende Schlitzte gebildet werden, die von 0 bis 90° geöffnet werden können. Der Quadrant ist in 100 Teile geteilt, von denen jeder mittels Unterteilung und Nonius wieder auf $\frac{1}{100}$ abgelesen werden kann. Es wurden bei jeder Beobachtung drei Einstellungen des rotierenden Sektors auf gleiche Helligkeit der beiden Lichtquellen ausgeführt, und vorher und nachher die Temperaturen der schwarzen Körper gemessen. Bei großen Helligkeitsunterschieden der Lichtquellen wurden zur Vermeidung sehr kleiner Sektoröffnungen Rauchgläser vorgesetzt, deren Schwächung vorher bei verschiedenen Helligkeiten mit dem Sektor bestimmt worden war. Die drei benutzten Rauchgläser sind aus derselben Glasplatte geschnitten.

Für die Wellenlänge $0,656\mu$ wurde beobachtet:

Rauchglas	Datum	Zahl der Beob.	Temp. d. S.-K.	Schwächung ¹⁾
1,2	18. IV.	5	1200°	21,9
	24. III.	3	1295	22,4
	23. III.	2	1388	22,2
	26. III.	2	1400	21,7
1,3	18. IV.	2	1200	22,2
1	23. III.	2	1380	4,58
3	18. IV.	2	1070	4,71

Die Beobachtungen berechtigen zu der Annahme, daß die drei Gläser innerhalb der Fehlergrenze gleich stark schwächen, so daß sich im Mittel als Schwächung von

1 Glas	4,69
2 Gläsern	22,0
3 „	103,16

ergibt. Bei der Wellenlänge $0,590\mu$ erhält man unter der gleichen Annahme für 1, 2, 3 Gläser die Schwächung 5,27, 27,8, 146,0; bei der Wellenlänge $0,546\mu$ 4,57, 20,9, 95,5.

Die Beobachtungen von c sind in den Tab. 5—9 für die Wellenlängen $0,656$, $0,590$, $0,546$, $0,501$ und $0,478\mu$ zusammengestellt; und zwar befinden sich in zwei Kolonnen die beobachteten Temperaturen T'' und T' in Celsiusgraden (mit t'' und t' bezeichnet) des zur Vergleichung und des zur eigentlichen Messung dienenden schwarzen Körpers, daneben die Logarithmen des Verhältnisses der Helligkeiten. In der letzten Kolonne sind die mit der Formel:

$$c = \frac{\lambda \lg \frac{\varphi_1}{\varphi_2}}{\lg e} : \left[\left\{ \frac{1}{T_1''} - \frac{1}{T_2''} \right\} - \left\{ \frac{1}{T_1'} - \frac{1}{T_2'} \right\} \right]$$

berechneten Werte von c aufgeführt, die aus der daneben angegebenen Kombination der Versuche gewonnen sind.

1) Wir geben für die Schwächung stets den reziproken Wert an.
Annalen der Physik. IV. Folge. 22. 3

Tabelle 5.

 $\lambda = 0,656 \mu$.

1906	Nr. des Vers.	t''	t'	$\lg \varphi$	Kom- bination	c
14. März	1	1071,0 ⁰	767,7 ⁰	2,0294	1 2	14230
	2	1071,7	865,7	1,2541	1 3	14200
	3	1071,5	927,6	0,8293	1 4	14200
	4	1071,9	1012,2	0,3160	2 3	14130
15. März	5	1293,4	902,2	2,0022	2 4	14170
	6	1292,7	1096,1	0,8733	3 4	14200
	7	1292,1	1174,0	0,5065	5 6	14130
	8	1290,8	1198,1	0,3909	5 7	14100
16. März	9	1453,0	1046,8	1,7024	5 8	14140
	10	1451,1	1261,2	0,7084	6 7	14020
	11	1448,5	1363,0	0,3160	6 8	14170
	12	1450,1	1266,7	0,6684	7 8	14680
26. März					9 10	14100
					9 11	14160
					9 12	14300
					10 11	13950
					12 11	13950
					Mittel:	14160
	1	Glühlampe	980,0	0,5263	1 2	14590
	2		1059,6	0,9872	1 3	14280
	3		1151,2	1,4338	1 4	14230
	4		1320,7	2,1335	1 5	14220
	5		1476,2	2,6584	2 3	14290
					2 4	14080
					2 5	14130
					3 4	13980
					3 5	14180
					4 5	14210
27. und 28. April					Mittel:	14215
	1	805,1	855,9	0,4054	1 2	14190
	2	805,5	926,5	0,8938	1 3	14070
	3	805,5	1001,9	1,3493	2 3	13960
	4	941,1	1002,2	0,3683	4 5	13830
	5	941,1	1098,9	0,8745	6 7	14440
	6	1019,7	1101,1	0,4005	6 8	14300
	7	1015,8	1145,4	0,6395	6 9	14310
	8	1014,8	1263,6	1,1761	6 10	14290
	9	1013,0	1359,1	1,5276	7 8	14250
	10	1012,0	1474,8	1,9154	7 9	14270
					7 10	14260
					8 9	14310
					8 10	14280
					9 10	14250
					Mittel:	14220
Gesamtmittel:						14200

Tabelle 6.

 $\lambda = 0,590 \mu$.

1906	Nr. des Vers.	t''	t'	$\lg \varphi$	Kom- bination	c
14. März	1	1070,5 ⁰	768,0 ⁰	2,3365	1 2	14510
	2	1071,0	866,3	1,4533	1 3	14590
	3	1070,6	927,6	0,9652	1 4	14430
	4	1071,2	1011,8	0,4031	2 3	14730
15. März	5	1293,2	902,3	2,2753	2 4	14370
	6	1292,1	1096,8	1,0086	3 4	14060
	7	1291,3	1174,2	0,5877	5 6	14210
	8	1289,5	1198,4	0,4771	5 7	14280
16. März	9	1452,5	1047,6	1,9299	5 8	14140
	10	1450,0	1262,0	0,8096	6 7	14480
	11	1449,5	1266,9	0,7924	6 8	14000
					9 (10, 11)	14240
					Mittel:	14340
26. März	1	Glühlampe	979,9	0,8385	1 2	14170
	2		1059,9	0,8382	1 3	14210
	3		1151,0	1,3424	1 4	14170
	4		1321,6	2,1139	1 5	14280
	5		1476,9	2,7217	2 3	14240
10. April	6	918,3	1094,4	1,0712	2 4	14180
	7	918,3	1155,4	1,4082	2 5	14310
					3 4	14140
					3 5	14340
11. April	8	918,3	1084,2	1,0394	4 5	14590
	9	918,3	1165,8	1,4771	6 7	14330
					8 9	14230
					Mittel:	14260
23. April	1	805,3	856,8	0,4402	1 2	13780
	2	805,4	926,8	0,9624	1 3	13920
	3	805,3	1002,2	1,4742	2 3	14080
	4	941,1	1002,2	0,3838	4 5	14060
	5	941,0	1099,8	0,9614	6 7	14170
	6	1020,1	1101,0	0,4281	6 8	14190
	7	1015,8	1145,2	0,6920	6 9	14330
	8	1014,5	1268,9	1,2911	6 10	14150
	9	1013,2	1359,2	1,6866	7 8	14200
	10	1011,8	1483,3	2,1303	7 9	13730
					7 10	14140
					8 9	14640
					8 10	14110
					9 10	13670
					Mittel:	14150
					Gesamtmittel:	14250

Tabelle 7.

$$\lambda = 0,546 \mu.$$

1906	Nr. des Vers.	t''	t'	$\lg \varphi$	Kom- bination	c
14. März	1	1070,7°	768,4°	2,4942	1 2	14140
	2	1070,6	866,3	1,5658	1 3	14180
	3	1070,6	927,6	1,0550	1 4	14200
	4	1071,1	1011,6	0,4440	2 3	14270
15. März	5	1293,0	902,5	2,4742	2 4	14260
	6	1292,0	1096,9	1,1004	3 4	14250
	7	1291,3	1174,0	0,6571	5 6	14260
	8	1289,4	1198,4	0,5185	5 7	14250
16. März	9	1452,4	1048,0	2,0945	5 8	14250
	10	1449,8	1261,9	0,8871	6 7	14220
	11	1447,1	1362,5	0,4200	6 8	14230
	12	1449,5	1266,8	0,8686	7 8	14280
					9 10	14270
					9 11	14280
					9 12	14190
					10 11	14320
				12 11	14540	
Mittel:						14260
26. März	1	Glühlampe	1058,9	0,7135	1 2	14020
	2		1150,0	1,2485	1 3	14140
	3		1321,7	2,1048	1 4	14310
	4		1476,9	2,7586	2 3	14220
				2 4	14410	
				3 4	14670	
10. April	5	918,3	1094,5	1,1399	5 6	14110
	6	918,3	1155,3	1,4900		
Mittel:						14270
28. April	1	941,2	1002,2	0,4057	1 2	13820
	2	940,9	1100,5	1,0245	3 4	13760
	3	1020,2	1100,9	0,4518	3 5	14220
	4	1015,6	1145,3	0,7308	3 6	14310
	5	1014,2	1269,0	1,3909	3 7	14060
	6	1012,9	1359,2	1,8129	4 5	14430
	7	1011,4	1474,3	2,2516	4 6	14460
				4 7	14120	
				5 6	14490	
				5 7	13890	
				6 7	13350	
Mittel:						14080
Gesamtmittel:						14200

Tabelle 8.

 $\lambda = 0,501 \mu$.

1906	Nr. des Vers.	t''	t'	$\lg \varphi$	Kombination	c
14. März	1	1070,7°	866,3°	1,7168	1 2	13910
	2	1070,9	927,5	1,1790	1 3	13950
	3	1070,9	1011,4	0,5198	2 3	13980
15. März	4	1291,9	1097,0	1,1987	4 5	13830
	5	1291,0	1173,8	0,7300	4 6	13890
	6	1289,2	1198,4	0,5798	5 6	14090
16. März	7	1452,2	1048,0	2,2810	7 8	14260
	8	1449,6	1261,9	0,9661	7 9	14250
	9	1446,9	1361,8	0,4639	7 10	14190
	10	1449,7	1266,7	0,9479	8 9	14230
					10 9	14430
					Mittel: 14090	
28. April	1	1020,2	1100,9	0,4639	1 2	13650
	2	1015,4	1145,1	0,7657	1 3	14080
	3	1013,9	1268,9	1,4783	1 4	14130
	4	1012,7	1359,0	1,9299	1 5	14020
	5	1011,2	1474,2	2,4200	2 3	14270
					2 4	14250
					2 5	14090
					3 4	14230
					3 5	13960
					4 5	13720
					Mittel: 14040	
					Gesamtmittel: 14070	

Tabelle 9.

 $\lambda = 0,478 \mu$.

1906	Nr. des Vers.	t''	t'	$\lg \varphi$	Kombination	c
15. März	1	1291,5°	1096,9°	1,2577	1 2	14250
	2	1290,6	1173,6	0,7528	1 3	14180
	3	1288,8	1198,3	0,5955		
16. März	4	1452,0	1047,9	2,3766	4 5	14130
	5	1449,1	1261,9	1,0086	4 6	14130
	6	1450,1	1266,5	0,9890		
					Mittel: 14170	

Aus den Beobachtungen im roten Licht ($\lambda = 0,656 \mu$) ergibt sich für c der Mittelwert 14200, welchen wir auf ± 1 Proz. sicher halten. Um übersichtlich zu zeigen, daß jeder merkbare Gang von c mit der Temperatur verschwunden ist, sind in Fig. 5 die Werte von c für die entsprechenden Temperaturgrenzen, die zu der Beobachtung eines solchen Wertes gedient

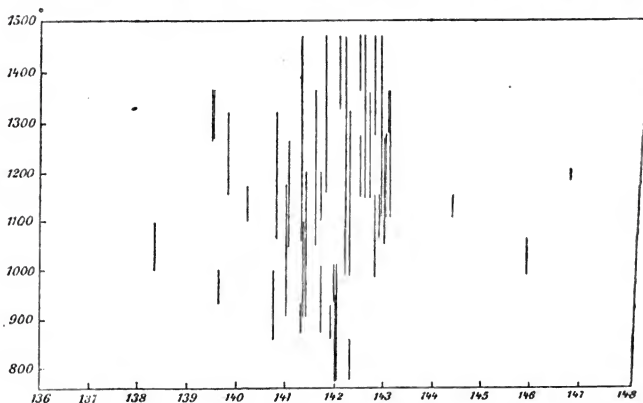


Fig. 5.

haben, eingezeichnet; als Abszisse ist der Wert von $c \cdot 10^{-2}$, als Ordinate die Temperatur in Celsiusgraden aufgetragen; die einzelnen beobachteten Werte sind durch Strecken dargestellt, die in den entsprechenden Temperaturordinaten endigen. Man erkennt zugleich aus dieser Darstellung, daß die Übereinstimmung der Beobachtungen befriedigend ist und die größeren Abweichungen kleinen Temperaturgrenzen entsprechen, bei denen ein Beobachtungsfehler stärker eingeht.

Auch die Bestimmungen in den anderen Farben ergeben ein konstantes c , wenn auch die Übereinstimmung wegen der geringeren Helligkeit in tiefen Temperaturen weniger gut ist. Ebenso wenig ist eine Abhängigkeit des c von der Wellenlänge in dem untersuchten Gebiet anzunehmen; die Abweichungen der Mittelwerte liegen in der Fehlergrenze.

Beispiel einer optischen Temperaturmessung. Im Anschluß an die Bestimmung der Konstante c mögen hier noch zwei Beobachtungsreihen mitgeteilt werden, die sich auf die optische Temperaturmessung an einem schwarzen Körper beziehen und bis 1570° reichen. Die Temperatur konnte außerdem in gewöhnlicher Weise durch ein Thermoelement bestimmt werden, so daß man die optische Messung mit der luftthermometrischen bis 1570° vergleichen kann.

Der benutzte schwarze Körper war der erste, den wir aus reiner Magnesia zusammensetzten und mit einem dem Thermoelement O gleichen Element versahen. Wir bestimmten das Verhältnis der Helligkeiten dieses Körpers bei sechs Temperaturen für die Wellenlängen $0,656$, $0,590$ und $0,546 \mu$ mit dem Spektralphotometer. Als Vergleichskörper diente der oben erwähnte schwarze Körper. Aus dem Helligkeitsverhältnis und der niedrigsten Temperatur (972° bez. 1006°) wurden nach Gleichung (3) die fünf höheren Temperaturen nach dem Strahlungsgesetz ($c = 14200$) berechnet. Sie sind neben dem Logarithmus des beobachteten Helligkeitsverhältnisses in Tab. 10 aufgeführt. Zur Vergleichung sind die Werte daneben gesetzt, die sich aus der beobachteten Thermokraft nach der Formel:

$$E = 30000 \log_{10} \left(1,25 + \left(\frac{t}{1000} \right)^2 \right) - 1015$$

(vgl. p. 24) berechnen.

Die Übereinstimmung zwischen den optisch und den luftthermometrisch bestimmten Werten ist befriedigend.

Der Thermokraft 16140 MV, die dem Schmelzpunkt des Palladiums entspricht, kommt nach der optischen Messung eine Temperatur von 1570° zu.

Schmelzpunkte. Um neben dieser Vergleichung der optischen Temperaturmessung mit dem Luftthermometer, die eine einwandfreie thermoelektrische Messung voraussetzt, noch einen anderen Anhaltspunkt zur Beurteilung der Übereinstimmung zu gewinnen, haben wir mit dem Spektralphotometer unter Benutzung des rotierenden Sektors und der Rauchgläser die Helligkeitsverhältnisse bei den Schmelztemperaturen von Gold, Palladium und Platin bestimmt. An Stelle des bei der

Tabelle 10.

1906	λ	Nr.	t''	$\lg \frac{q_i}{q_1}$	t'	
					optisch	lufttherm.
3. Okt.	0,656	1	912,2°		[972]°	
		2	910,2	0,7098	1098	1099°
		3	909,5	1,0842	1176	1177
		4	908,1	1,6887	1323	1326
		5	907,5	2,2213	1480	1488
		6	907,2	2,4944	1574	1580
	0,590	1	912,1			
		2	909,9	0,7750	1096	1097
		3	909,3	1,1990	1176	1174
		4	907,7	1,8835	1325	1327
		5	907,2	2,4791	1484	1487
		6	906,9	2,7735	1574	1580
	0,546	1	912,0			
		2	909,6	0,8332	1094	1095
		3	909,0	1,2912	1173	1172
		4	907,4	2,0498	1326	1328
		5	906,8	2,6870	1484	1487
		6	906,5	3,0053	1574	1580
5. Okt.	0,656	1	923,3		[1006]	
		2	922,1	0,7354	1147	1147
		3	921,3	1,2020	1253	1253
		4	920,3	1,5619	1346	1345
		5	919,7	1,9021	1445	1448
		6	919,1	2,2998	1578	1583
	0,590	1	923,1			
		2	921,9	0,8173	1146	1146
		3	920,8	1,3379	1253	1252
		4	919,8	1,7421	1347	1345
		5	919,3	2,1242	1448	1447
		6	919,1	2,5542	1578	1584
	0,546	1	922,9			
		2	921,6	0,8820	1145	1146
		3	920,5	1,4442	1252	1252
		4	919,5	1,8837	1347	1344
		5	919,0	2,2920	1446	1447
		6	918,8	2,7653	1578	1584

Bestimmung von c verwandten schwarzen Körpers, setzten wir vor den Spalt einen schwarzen Körper aus reiner Magnesia in einem Iridiumrohr; letzteres hatte eine Länge von 18 cm und einen Durchmesser von 2,5 cm und war von der Firma Heräus freundlichst zur Verfügung gestellt worden. Es war an seinem Ende mit Platinscheiben versehen, denen Akkumulatorenstrom durch angeschweißte Silberbänder zugeführt wurde; nach außen war es durch einen doppelten Mantel aus Schamotte geschützt. Das durchzuschmelzende Drahtstück befand sich auf der vorderen Seite der mittleren Querwand, die anvisiert wurde. Es war in einen längeren Draht aus Platinrhodium (10 Proz. Rh) eingeschmolzen, dessen freie Enden durch enge Löcher in der Wand nach hinten hinausführten und dort zu einem Stromkreis mit einem empfindlichen Zeigergalvanometer geschlossen waren, welches das Durchschmelzen anzeigte. Die Stärke des Heizstromes konnte man in gewünschter Weise steigern, indem die einzelnen Teile eines Vorschaltwiderstandes bis zum Kurzschluß nebeneinander geschaltet wurden. Zum Schmelzen von Platin waren z. B. 350 Amp. bei einer Spannung von 8 Volt nötig. Da wir wegen der Stäubung des Iridiums kein Thermoelement in den schwarzen Körper einführen konnten, haben wir die Helligkeitsmessungen nach dem Vorgang von Nernst auf den Schmelzpunkt des Goldes (1064°) bezogen, der zwischen durch häufiger bestimmt wurde. Durch Beobachtungen an dem großen schwarzen Körper (mit Thermoelement) hatten wir uns überzeugt, daß die Bestimmung der Helligkeit auch im nicht stationären Zustand für die Temperaturmessung annähernd brauchbar bleibt. Freilich ist die Genauigkeit nicht so groß, wie bei den obigen Messungen von c an dem stationären schwarzen Körper. Es liegt dies wohl zum großen Teil an der ungenauen Einstellung des Photometers, mit dem das Steigen der Helligkeit bis zum Momente des Durchschmelzens verfolgt werden muß. Einmal ermüdet das Auge mehr, sodann ist auch eine Wiederholung der Einstellung unmöglich, da die Helligkeit nach dem Durchschmelzen weiter steigt.

Die durchzuschmelzenden Drahtstücke wurden dick genug (meistens 0,6 mm) gewählt, um eine merkliche Legierung durch das zerstäubte Iridium des Heizrohres zu verhindern.

Tabelle 11.
Platinschmelzpunkt.

λ	1906	Sektorstellung bei			Zahl der Rauchgläser		Helligkeitsverhältnis		t
		Au-Sm	Mittel	Pt-Sm	Mittel	Au-Sm	Pt-Sm	beob.	red. auf 0,656 μ
0,656	12. April	94,19		6,81		1	3		
	•	94,39		6,76		1	3		
		93,13	93,9	6,96	6,84	1	3	302	—
	14. Sept.	26,85		9,82					
		26,88		9,25					
0,590		27,46							
		26,90	27,0		9,28	—	3	300	—
	17. Sept.	67,8		17,57					
		67,4		17,47					
		65,5		17,18					
0,546		66,9							
		65,2							
		64,0							
		66,5	66,2		17,41	—	3	556	294
	18. Sept.	92,5		9,88					
1781		86,7		9,67					
		90,4		9,72					
		96,7							
		92,7							
		94,0							
1781		85,6							
		94,4	91,6		9,76	—	3	895	287
	20. Sept.	68,1		6,99					
		68,9		6,90					
		69,9	69,9	7,00	6,96	—	9		

Tabelle 12.
Palladiumschmelzpunkt.

λ	1906	Sektorstellung bei			Zahl der Rauchgläser		Helligkeitsverhältnis		t	
		Au-Sm	Mittel	Pd-Sm	Mittel	Au-Sm	Pd-Sm	beob.		red. auf 0,656 μ
0,656	12. April	s. o.	93,9	4,59 4,88	4,73	1	2	93,1	—	1584°
	19. April	98,40 97,91	98,15	4,98 4,95 4,99	4,97	1	2	92,6	—	1583
	14. Sept.	s. o.	27,0	6,59	6,59	—	2	90,3	—	1579
	17. Sept.	s. o.	66,2	11,94 12,35 12,34	12,18	—	2	153,5	92,4	1583
0,546	18. Sept.	s. o.	91,6	8,22 8,54 8,31	8,36	—	2	229	92,0	1582

In den Tab. 11 und 12 sind die Sektoreinstellungen beim Schmelzpunkt des Goldes und dem des Platins bez. des Palladiums nach Reduktion der Beobachtungen eines Tages auf gleiche Temperatur des Vergleichskörpers angegeben, daneben die Anzahl der Rauchgläser und die daraus berechnete Gesamtschwächung von der Temperatur des Platin- bez. Palladiumschmelzpunktes auf die des Goldschmelzpunktes. Für die Farben $0,590 \mu$ und $0,546 \mu$ ist zur Vergleichung das Helligkeitsverhältnis durch Multiplikation seines Logarithmus mit $\frac{0,590}{0,656}$ bez. $\frac{0,546}{0,656}$ auf die Wellenlänge $0,656 \mu$ reduziert.

Als Mittel folgt hieraus:

Platinschmelzpunkt	1789°
Palladiumschmelzpunkt . . .	1582°

Es sei hier noch eine Bestimmung des Platinschmelzpunktes angeführt, bei der wir statt vom Goldschmelzpunkt von der mit dem Thermoelement gemessenen Temperatur von 1477° ausgingen. Es wurden die Wellenlängen $0,656 \mu$ und $0,478 \mu$ beobachtet. Für die erste ergab sich zwischen 1477° und dem Platinschmelzpunkt eine Helligkeitssteigerung um das 6,29fache, für die zweite um das 13,44fache. Hieraus folgt im Mittel für den Schmelzpunkt 1788° . Unter Annahme der alten Temperaturskale und des Wertes 14600 für c würde man 1750° berechnen.

Nernst und v. Wartenberg¹⁾, welche dieselbe Methode für die Bestimmung von Schmelzpunkten früher anwandten, finden für die Wellenlänge $0,590$ eine 517fache Steigerung der Helligkeit zwischen dem Gold- und dem Platinschmelzpunkte. Unter der Annahme, daß $c = 14600$ ist, erhalten sie für den Schmelzpunkt des Palladiums und des Platins 1541 und 1745° ; auf $c = 14200$ umgerechnet würden die Zahlen 1563 und 1775° lauten.

IV. Das optische Pyrometer.

Schwächt man eine schwarze Strahlung von der absoluten Temperatur T_1 auf die Temperatur T_2 , so kann man das Schwächungsverhältnis φ nach dem Strahlungsgesetz

1) W. Nernst u. H. v. Wartenberg, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 1906, p. 48 u. 146.

$$\log \text{nat } \varphi = \frac{c}{\lambda} \left\{ \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right\}$$

berechnen, wenn c und λ gegeben sind. Da die wirksame Wellenlänge bei der Verwendung farbiger Gläser aus deren Durchlässigkeit nur ungenau zu entnehmen ist, so leitet man sie vorteilhafter aus dem Strahlungsgesetz ab, indem man φ anderweitig bestimmt. Wir haben dies für eine Reihe von Temperaturen T_1 ausgeführt, um gleichzeitig zu untersuchen, ob die wirksame Wellenlänge von der Temperatur abhängt.

Zu den Versuchen diente der große schwarze Körper. Die Schwächungen wurden durch Spiegelung bewirkt, und zwar kam einmal eine doppelte Schwächung φ_1 durch zwei reflektierende Prismen, ferner eine einfache φ_2 durch ein Prisma zur Verwendung. Um beide Male denselben Strahlen-

gang zu haben, fügten wir im letzteren Falle noch ein total reflektierendes Prisma hinzu (Fig. 5). Die Schwächungsverhältnisse beider Systeme wurden wiederholt mit dem rotierenden Sektor gemessen,

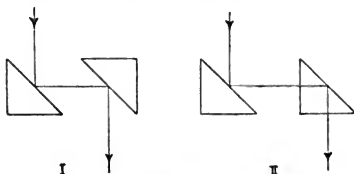


Fig. 6.

wobei wir mit Benutzung des optischen Pyrometers System II durch einfache Vertauschung, I aber unter Zwischenschaltung von II beobachteten, weil sonst die Sektoröffnung zu klein geworden wäre. Als Beispiel mögen die folgenden Beobachtungen dienen, die bei verschiedenen Helligkeiten angestellt wurden.

Im roten Licht		Im grünen Licht	
φ_1	φ_2	φ_1	φ_2
223	20,95	218	21,61
227	20,97	210	21,53
225	21,44	204	21,42
215	20,95	212	21,73
225	22,45	214	21,95
231	21,05		
	21,15		
Mittel 224,5	21,28	Mittel 212	21,65

Die Messungen der Wellenlänge sind in Tab. 13 und 14 enthalten. Es kam uns zunächst auf die Beobachtungen im roten Licht an, welches am gleichmäßigsten ist, da das Kupferoxydulglas nur Wellenlängen zwischen $0,694$ und $0,602\mu$ durchläßt. Es sind hier je zwei verschiedene Werte von φ_1 und φ_2 zugrunde gelegt, die durch Änderungen an den schwächenden Prismen bedingt sind. Die für λ gefundenen Werte sind innerhalb der Fehlergrenze, die durch die Genauigkeit der Einstellung mit dem optischen Pyrometer gezogen ist, konstant; im Mittel ist $\lambda = 0,650\mu$ für $c = 14200$.

Tabelle 13.

Im roten Licht.

T_1	T_2	$\lambda (\mu)$	T_1	T_2	$\lambda (\mu)$
$\varphi_1' = 256$			$\varphi_1 = 224,5$		
1377°	1020°	0,658	1418°	1053°	0,641
1504	1083	0,662	1478	1082	0,650
1650	1165	0,647	1483	1083	0,654
1691	1189,5	0,654 ¹⁾	1597	1146,5	0,646
Mittel 0,654			1616	1152,5	0,653
$\varphi_2' = 21,98$			1726	1215	0,640
1172,5	1007,5	0,642	1734	1217	0,643
1179	1011,5	0,647	1749	1223,5	0,644
1241	1053	0,661	Mittel 0,645		
1314,5	1107	0,656	$\varphi_2 = 21,28$		
1356	1138,5	0,641	1417	1183,5	0,648
1378	1151	0,659	1484	1228,5	0,651
1434	1193,5	0,649	1598	1305	0,652
1504,5	1239,5	0,653	1616	1318	0,649
1650,5	1341	0,643	1634	1329	0,652
1693	1364	0,654	1726	1390	0,650
Mittel 0,650			1732	1394	0,651
			1749	1408	0,644
			Mittel 0,649		

1) Hier gilt der Wert $\varphi_1 = 224,5$.

Tabelle 14.
Im grünen Licht.

T_1	T_2	$\lambda (\mu)$	T_1	T_2	$\lambda (\mu)$
$\varphi_1 = 211,6$			$\varphi_2 = 21,65$		
1418°	1084°	0,576	1417°	1206,5°	0,570
1479	1122,5	0,569	1480	1250,5	0,573
1616	1196	0,576	1615	1346,5	0,570
1633	1207,5	0,572	1633	1352,5	0,586
1725	1259	0,569	1725	1423	0,567
1749	1270	0,572	1748	1439	0,567
Mittel 0,572			Mittel 0,572		

Auch für das grüne Glas, dessen Durchlässigkeit das große Gebiet von 0,656 bis 0,446 μ umfaßt, ergeben die Versuche noch eine konstante Wellenlänge von 0,572 μ innerhalb des beobachteten Temperaturbereichs.

Das optische Pyrometer wurde auf den oben beschriebenen schwarzen Körper aus Magnesia gerichtet, der ein Thermoelement enthielt und bei stationärer Temperatur beobachtet wurde. Eine Temperatur, die die Messung mit dem Spektralphotometer zu 1570° ergab, wurde mit dem optischen Pyrometer an verschiedenen Tagen zu 1567 und 1571° bestimmt. Die beiden Apparate sind also bei dieser hohen Temperatur noch in guter Übereinstimmung. Die Einstellung des optischen Pyrometers geschah im roten Licht mit der Prismenschwächung φ_1 .

Das Ergebnis der Arbeit läßt sich dahin zusammenfassen, daß das Thermoelement bis 1600° C. an das Stickstoffthermometer angeschlossen ist; der Fehler, der hauptsächlich durch die ungleichmäßige Temperaturverteilung des Gefäßes bewirkt wird, dürfte auch bei der höchsten Temperatur 10° nicht überschreiten. Die Konstante c des Strahlungsgesetzes wäre damit auf etwa 1 Proz. sichergestellt. Streng genommen wäre an den Angaben des Luftthermometers noch die Korrektur auf die absolute Temperatur anzubringen gewesen, bevor sie auf das Strahlungsgesetz angewandt wurden. Es ist unterblieben, weil die immerhin noch ziemlich ungenau

bekannte Verbesserung bei dem geringen Anfangsdruck des Luftthermometers vollständig in die Fehlergrenze fällt.

Zu den früher festgelegten Schmelzpunkten, mit denen man ein Thermoelement an die Stickstoffskale anschließen kann, tritt als neuer Fixpunkt der Schmelzpunkt des Palladiums, der sich zu 1575° ergeben hat. Für die optische Temperaturmessung genügt die Bestimmung einer einzigen Temperatur, sei es mit einem geeichten Thermoelement, sei es mit einem Schmelzpunkt. Von da aus rechnet man mit dem Wert 14200 für die Konstante c nach dem Strahlungsgesetz weiter.¹⁾

Charlottenburg, den 1. November 1906.

1) Die Physikalisch-Technische Reichsanstalt behält für die amtliche Prüfung der Thermoelemente und der optischen Pyrometer die bisherigen Grundlagen vorläufig bei.

(Eingegangen 3. November 1906.)

2. Die „Interferenzkurven gleicher Neigung“ im polarisierten Lichte; von Otto Lummer.

Als Haidinger¹⁾ im Jahre 1849 am Glimmer und 1854 auch an planparallelen Glasplatten „Plattenringe“ beobachtete²⁾ und sie in richtiger Erkenntnis ihrer Entstehung den „Berührungsringen“ des Newtonschen Farbglases gegenüberstellte, ahnte er nicht, welche bedeutsame Entdeckung er gemacht hatte, da er den prinzipiellen Unterschied beider Erscheinungen in seiner Tragweite nicht erkannte. So kam es, daß die Haidingerschen Ringe wenig Beachtung fanden und Fizeau³⁾ noch im Jahre 1862 das Entstehen von Interferenzstreifen an planparallelen Platten überhaupt als unmöglich hinstellte. Auch Mascart⁴⁾, welcher die Theorie der Ringe genauer studierte, zog aus ihr keine Konsequenzen.

Unabhängig von beiden Beobachtern habe auch ich⁵⁾ diese Ringe gefunden, ihre Theorie gegeben und schon damals die Bedeutung der „Kurven gleicher Neigung“ (Plattenringe) gegenüber den „Kurven gleicher Dicke“ (Berührungsringe) voll erkannt und ausgesprochen. Diese besteht in ihrer Anwendung auf die Untersuchung planparalleler Platten auf gleiche Dicke innerhalb $\frac{1}{20000}$ mm, und in dem Umstande, daß sie bei jeder beliebigen Dicke der Platte auftreten müssen, vorausgesetzt, daß diese absolut planparallel, das benutzte Licht absolut homogen und bis zu beliebig hohem Gangunterschied interferenzfähig ist.⁵⁾ Auf dieser Erkenntnis fußt die Verwirklichung der Interferenz bei hohem Gangunterschied, die Untersuchung des Lichtes auf seine Homogenität und die moderne Interferenzspektroskopie überhaupt.

1) W. Haidinger, Pogg. Ann. 77. p. 219—228. 1849.

2) W. Haidinger, Pogg. Ann. 96. p. 453—468. 1855.

3) H. Fizeau, Ann. de chim. et phys. (3) 66. p. 429. 1862.

4) E. Mascart, Ann. de chim. et phys. 23. p. 128. 1871.

5) O. Lummer, Inaug.-Dissert. Berlin 1884 und Wied. Ann. 23. p. 49—84. 1884.

Als der Begründer der Interferenzspektroskopie muß Fizeau¹⁾ angesehen werden, welcher aus dem Verlauf der Newtonschen Ringe am Farbenglase bei kontinuierlich wachsendem Abstand beider Bestandteile (Linse und Planglas) auf die Duplizität der Natriumlinie schloß und das Verhältnis der Wellenlängen der beiden *D*-Linien berechnete. Ganz der gleichen Methode bediente sich A. A. Michelson²⁾, nur daß er statt der Fizeauschen Kurven gleicher Dicke die Kurven gleicher Neigung der Untersuchungsmethode zugrunde legte. Mittels seines zu einem ganz anderen Zwecke konstruierten und verwendeten Interferometers erzeugte er die Haidinger-Mascart-Lummerschen Ringe an einer *planparallelen Luftplatte von kontinuierlich veränderlicher Dicke*³⁾ und studierte wie Fizeau beim Newtonschen Farbenglase das Aussehen und den Verlauf der Planparallelitätsringe bei wachsendem Gangunterschiede. Die hieraus gezogenen Schlußfolgerungen auf die Art und Zusammensetzung der benutzten Lichtquelle sind aber nur in ganz speziellen Fällen eindeutig und zwingend. Es bedeutete daher einen großen Fortschritt, als Perot und Fabry⁴⁾ auf Grund einer von Boulouch⁵⁾ aufgestellten Theorie die Interferenzspektroskopie ihres hypothetischen Charakters entkleideten und die Auflösung feinsten Spektrallinien auf eine sichere Basis stellten. Sie bedienen sich wie Michelson einer Luftplatte von variabler Dicke, nur mit dem Unterschiede, daß sie die Luftplatte mit Hilfe zweier schwach pris-

1) H. Fizeau, l. c.

2) A. A. Michelson, Phil. Mag. (5) 31. p. 338—346. 1891; 34. p. 280—299. 1892; Journ. de phys. (3) 3. p. 5—22. 1894; vgl. auch H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie. Verlag von S. Hirzel, Leipzig 1900.

3) Das hierzu verwendete Interferometer hatte Michelson schon viel früher erdacht, um die Frage zu entscheiden, ob sich der Äther mit den Körpern bewegt oder in absolute Ruhe verharret (Phil. Mag. [5] 13. p. 236—242. 1882). Die Bedeutung der bei *planparalleler* Luftplatte entstehenden Ringe ist nicht erkannt.

4) A. Perot und Ch. Fabry, Ann. de chim. et phys. (7) 12. p. 459—501. 1897; Compt. rend. 1897, 1898, 1899 und 1900; Ann. de chim. et phys. (7) 16. 1899 und Bulletin Astron. Janvier 1899; vgl. auch M. Hamy, Compt. rend. 125. p. 1092—1094. 1897. Näheres vgl. in Kayzers Handbuch der Spektroskopie, p. 482 ff.

5) A. Boulouch, Journ. de Phys. (2) 2. p. 316—320. 1893.

matischen Platten erzeugen und die sie bildenden Oberflächen mit einer durchsichtigen *Silberschicht* überziehen. Dadurch kommen auch die *vielfach reflektierten* Strahlen zur Mitwirkung, wodurch die Interferenzringe an Schärfe und Deutlichkeit sehr gewinnen, so daß die Ringsysteme zweier Wellen sich nicht auslöschen, wenn die Minima des einen mit den Maximis des anderen koinzidieren, sondern *nebeneinander getrennt sichtbar* bleiben.

Die durch diese „versilberte“ Luftplatte erreichte Auflösungskraft benachbarter Spektrallinien suchte Michelson später durch die Konstruktion seines „Stufengitters“ zu erreichen¹⁾, welches aus einem treppenartigen Satz von planparallelen Platten besteht und in der Wirkung einem Gitter mit Spektren hoher Ordnungszahl gleichkommt.

Auf indirektem Wege gelangte auch ich fast gleichzeitig zur Lösung desselben Problems. Beim Studium der von mir beobachteten „komplementären Interferenzerscheinungen im reflektierten Lichte“²⁾ lernte ich zunächst den Einfluß der vielfach reflektierten Strahlen auf den Intensitätsabfall vom Maximum zum Minimum der Kurven gleicher Neigung kennen, da diejenige Komplementärserscheinung, welche die scharfen und linienförmigen Interferenzen zeigt, ihre Existenz lediglich den *vielfach* reflektierten Strahlen verdankt. Von da war es nur ein kleiner Schritt zu der Erkenntnis, daß auch eine planparallele Glasplatte von genügender Dimension bei streifender Inzidenz Interferenzringe mit steil abfallender Intensität erzeugen und demnach eine große Auflösungskraft erlangen müsse.³⁾ Tatsächlich sah ich hierbei unter Anwendung von Quecksilberlicht, z. B. bei Benutzung der hellgrünen Linie, mehrere Ringsysteme nebeneinander, wo ich früher mit Natriumlicht nur „neutrale“ Stellen beobachten konnte.

Denn schon in meiner Inauguraldissertation hatte ich die planparallele Platte auch bei streifender Inzidenz der Strahlen benutzt und beim Übergang von dieser zu senkrechter Inzidenz unter Anwendung von Natriumlicht periodisches Verschwinden und Wiedererscheinen der Plattenringe beobachtet. Bei Be-

1) A. A. Michelson, *Astrophys. Journ.* 8. p. 36—47. 1898; *Journ. de phys.* (3) 8. p. 305—314. 1899.

2) O. Lummer, *Sitzungsber. d. Berl. Akad.* v. 3. Mai 1900. p. 504—513.

3) O. Lummer, *Verh. d. Deutsch. Phys. Ges.* 3. Nr. 7. p. 85—98. 1901.

nutzung von Quecksilberlicht und im Besitz längerer Plattenstreifen hätte ich schon 1884 beobachten müssen, was ich bei meinem Interferenzspektroskop auf Grund theoretischer Überlegung gesucht und auch gefunden habe. Statt der „neutralen“ Stellen zeigt dieses die Ringsysteme der verschiedenen im Lichte enthaltenen Lichtsorten getrennt nebeneinander.

Um den bei streifender Inzidenz der Lichtstrahlen eintretenden Lichtverlust zu eliminieren, wurde auf den Plattenstreifen ein kleines rechtwinkliges Prisma aufgekittet, so daß nur 4 Proz. der einfallenden Intensität verloren gehen und die wirksamen Strahlen doch den Plattenstreifen streifend treffen; so entstand das Lummer-Gehrckesche „Interferenzspektroskop“, mit Hilfe dessen die von Perot und Fabry als dreifach hingestellte hellgrüne Quecksilberlinie zum ersten Male als komplizierter und zwar als *achtfach* erkannt wurde¹⁾.

Bei allen Interferenzspektrometern und Apparaten hoher Auflösungskraft ist diese von zwei Faktoren abhängig, dem Gangunterschied der interferierenden Strahlen (Ordnung des Spektrums, Dicke der Platte etc.) und dem Intensitätsabfall vom Maximum zum Minimum der Interferenz- oder Beugungsstreifen, d. h. der Schärfe des Maximums. Im folgenden teile ich eine Studie mit, welche den Zweck verfolgte, die Abhängigkeit der Schärfe der Kurven gleicher Neigung im *polarisierten Lichte* vom Azimut des Polarisators und Analysators festzustellen und die hierbei beobachtete auffallende Veränderung des Intensitätsabfalls und die merkwürdige *Verdoppelung* der Streifenanzahl theoretisch zu erklären.

Die maximale Schärfe der Kurven gleicher Neigung
(„Airysche Schärfe“).

Gewöhnlich betrachtet man bei den Interferenzerscheinungen planparalleler Platten nur die Interferenz des an der vorderen und hinteren Fläche der Platte reflektierten Strahles (1 und 2 Fig. 1) und erhält so auch die Lage und Gestalt der Interferenzkurven ganz richtig. Will man aber außerdem die Helligkeitsverteilung im Ringsystem bestimmen, so muß man notwendig auch die *vielfach reflektierten* Strahlen (3, 4, 5 etc.

¹⁾ O. Lummer u. E. Gehrcke, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1902, p. 11—17.

bis ∞) in die Berechnung ziehen. Für die Orte der Maxima und Minima ist dies auf eine Einwendung Poissons hin zuerst von Fresnel geschehen.

Ganz allgemein für einen beliebigen Einfallswinkel hat für die sogenannten „Farben dünner Blättchen“ Airy diese Berechnung durchgeführt. Seine Theorie gilt aber nicht nur für

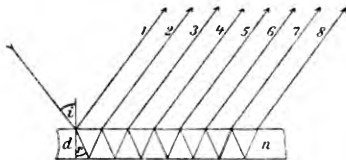


Fig. 1.

dünne Blättchen, sondern sie ist auch auf die im Unendlichen betrachteten Haidinger-Mascart-Lummerschen Ringe an dicken planparallelen Platten anwendbar.

So kommt es, daß die vollkommene Theorie da war, noch ehe diese Ringe überhaupt beobachtet waren.

Ist i der Einfallswinkel des ankommenden Strahles und r der zugehörige Brechungswinkel, so ist $n = \sin i / \sin r$ der Brechungsindex der Platte und $\beta = 4\pi n d \cos r / \lambda$ die Phasendifferenz zwischen je zwei benachbarten Strahlen des Komplexes (1 bis ∞), wenn d die Plattendicke und λ die Wellenlänge des Lichtes bedeuten. Bezeichnen wir ferner mit „Eins“ die Intensität des einfallenden Lichtes und mit σ^2 den Reflexionsfaktor, so ist nach Airy die Intensität im Vereinigungspunkt *aller* Strahlen 1 bis ∞ im reflektierten Lichte proportional dem Ausdruck:

$$I = \frac{4\sigma^2 \sin^2 \beta/2}{(1 - \sigma^2) + 4\sigma^2 \sin^2 \beta/2} = \frac{1}{1 + \frac{(1 - \sigma^2)}{4\sigma^2 \sin^2 \beta/2}}.$$

Der Wert von σ^2 gibt an, welcher Bruchteil vom auffallenden Licht reflektiert wird. Bedenkt man, daß $\sin^2 \beta/2$ vom Maximum zum Minimum zwischen den Werten Eins und Null schwankt, so erkennt man ohne viel Rechnung, daß der Intensitätsverlauf vom hellen zum dunklen Ring ein *sinus-artiger* sein wird, solange der Wert von σ genügend klein ist, während der Intensitätsabfall ein um so steilerer wird, je näher σ dem Werte Eins kommt.

Diese Überlegungen sind im wesentlichen auch von Perot und Fabry angestellt worden und vor ihnen hatte schon Boulouch die beiden Fälle genannt, in denen der Reflexions-

faktor σ hohe Beträge erreicht: nämlich *streifende Inzidenz* oder *durchsichtige Versilberung* der Plattenoberflächen.

Aber weder bei der Perot-Fabry'schen versilberten Platte, noch bei streifender Inzidenz am Lummer-Gehrckeschen Plattenstreifen großer Länge wird die theoretisch größtmögliche Schärfe der Ringe erreicht. Nur in einem für die Interferenzspektroskopie wertlosen Falle wird die volle „Airy'sche Schärfe“ ($\sigma = 1$) erreicht: Wenn man die Ringe an einer *planparallelen* Luftplatte von geringer Dicke zwischen zwei rechtwinkligen Glasprismen erzeugt und in unmittelbarer Nähe der Totalreflexion beobachtet. Hier kommen bei genügender Dünne und Länge der Luftplatte nicht nur *alle* vielfach reflektierten Strahlen zur Wirksamkeit, sondern es wird der Reflexionskoeffizient auch nahezu gleich Eins. Ich benutzte diese Ringe, um an ihnen die Komplementärserscheinung im reflektierten Lichte experimentell zu erweisen, welche ihre Entstehung dem Strahlenkomplex 3 bis ∞ verdankt. Wir wollen diese Ringe auch der folgenden Erörterung zugrunde legen, wenngleich die neue Erscheinung auch an den Ringen einer planparallelen Glasplatte bei schräger Inzidenz demonstriert werden kann. Auch bei ihr spielen die vielfach reflektierten Strahlen die Hauptrolle, da ihre gegenseitige Intensität beim Drehen des Polarisators oder Analysators geändert und so die Airy'sche Schärfe verändert wird.

Anordnung des Versuches: Die in Fig. 2 skizzierte Versuchsanordnung ist ähnlich derjenigen zur Beobachtung der Komplementärscheinung im reflektierten Lichte, in die sie bei Weglassung der beiden Nicolschen Prismen N_1 und N_2 übergeht. Vor dem weitgeöffneten Spalt des Kollimators S steht die Aronssche Quecksilberlampe in der vom Verfasser angegebenen Form.¹⁾ Die aus dem Kollimator austretenden parallelen Strahlen treffen auf die Blende S_1 , durchsetzen den Polarisator N_1 und treffen die Luftplatte AC unter nahe dem Winkel der totalen Reflexion. Die sämtlichen aus dem auffallenden engen Strahlenzylinder entstehenden vielfach reflektierten Anteile 1, 2, 3 etc. werden nach Durchgang durch den Analysator N_1 vom Fernrohrobjektiv aufgenommen und in einem Punkte vereinigt.

1) O. Lummer, Zeitschr. f. Instrumentenk. 21. p. 201—204. 1901.

Hat man das Fernrohr auf Unendlich eingestellt, so sieht man ein System scharf ausgeprägter Interferenzstreifen, welche parallel zur totalen Reflexionsgrenze verlaufen und deren Abstand voneinander von der Wellenlänge, der Dicke der planparallelen Luftschicht und dem Einfallswinkel abhängt.

Bei enger Blende des Schirmes s_1 verlaufen die aus dem einfallenden Bündel (Strahl) durch innere Reflexion entstehenden vielfachen Bündel *getrennt* voneinander, so daß man sie mit Hilfe der Blende s_2 einzeln abbilden und unwirksam machen kann. Ohne Okular sieht der Beobachter die einzelnen Bündel des Komplexes, d. h. die verschiedenen virtuellen Bilder der Blendenöffnung s_1 nebeneinander liegen. Bei Abbildung von 1 und 2 des Strahlenkomplexes tritt dann die erwähnte Komplementärserscheinung im reflektierten

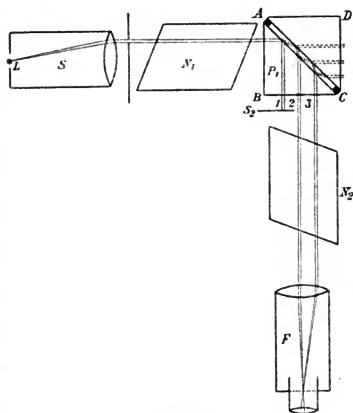


Fig. 2.

Licht auf. Davon sehen wir jetzt ab; vielmehr benutzen wir eine so dünne Luftplatte, daß alle vielfachen Strahlen mitwirken, und ändern die Intensität oder Größe der Mitwirkung der einzelnen Strahlen lediglich durch die Stellung von Polarisator und Analysator. Eine so dünne planparallele Luftplatte stellt man sich dadurch her, daß man die Hypotenuse des einen Prismas P_1 durchsichtig versilbert und das Silber bis auf zwei schmale seitliche Streifen bei A und C fortnimmt.

Erscheinung. Beobachtet man *ohne* Okular die virtuellen Bilder der Öffnung s_1 , so sieht man, wie sich deren Helligkeitsabstufung beim Drehen des Analysators ändert und erkennt, daß nacheinander alle einzelnen Bündel oder mehrere zugleich ganz ausgelöscht und der Mitwirkung entzogen werden.

Beobachtet man mit Okular, so wird das Streifensystem beim Drehen des Analysators (außer wenn der Polarisator eine der Hauptstellungen in oder senkrecht zur Einfallsebene annimmt) gleichsam *beweglich*. Die Streifen scheinen zu wandern! In Wirklichkeit aber ändert sich nur die Intensitätsverteilung vom Maximum zum Minimum, die absolute Intensität der Maxima und die Anzahl dieser.

Theorie. Um uns von diesen Erscheinungen durch die Theorie Rechenschaft zu geben, wollen wir den allgemeinen

Fall behandeln, daß eine *ebene* Welle $\mathcal{QM}$ (Fig. 3) unter dem Winkel i auf die planparallele Platte $\mathcal{P}$ falle, deren Dicke d und deren Brechungsindex n sei. Ist a die Amplitude der einfallenden Welle und λ die Wellenlänge des Lichtes, so werde der Schwingungszustand dargestellt durch den Ausdruck:

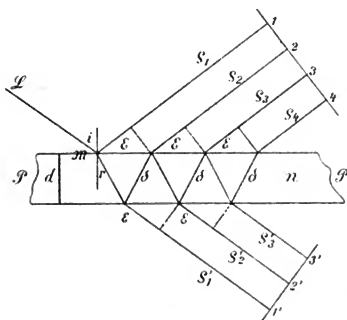


Fig. 3.

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) = a \sin \left(2\pi \frac{t}{\lambda} + \Phi \right),$$

wo $\Phi = 2\pi t/T$ gesetzt ist.

Bedeutet σ den Koeffizienten der Veränderung, welche die Amplitude bei der äußeren Reflexion erleidet, s denjenigen beim Eintritt in die Platte, σ' den bei der inneren Reflexion und s' denjenigen beim Austritt, so erhalten wir für den Schwingungszustand der längs $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ etc. gespiegelten Wellen für die beiden Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene:

1. $a s_{\perp} \cos \alpha \sin x$	$a s_{\parallel} \sin \alpha \sin x,$
2. $a s_{\perp} \sigma'_{\perp} s'_{\perp} \cos \alpha \sin (x + \beta)$	$a s_{\parallel} \sigma'_{\parallel} s'_{\parallel} \sin \alpha \sin (x + \beta),$
3. $a s_{\perp} \sigma'^3_{\perp} s'^3_{\perp} \cos \alpha \sin (x + 2\beta)$	$a s_{\parallel} \sigma'^3_{\parallel} s'^3_{\parallel} \sin \alpha \sin (x + 2\beta),$
.	

wo $\sigma_{\perp}$ und $s_{\perp}$ bez. $\sigma_{\parallel}$ und $s_{\parallel}$ die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten für senkrecht bez. in der Einfallsebene polarisiertes Licht bedeuten. Bildet der *Analysator* mit der Einfallsebene der Strahlen den Winkel δ , so ist der Schwingungszustand der einzelnen reflektierten Anteile nach Verlassen des Analysators:

1. $a(\sigma_{\perp} \cos \alpha \sin \delta + \sigma_{\parallel} \sin \alpha \cos \delta) \sin x$,
2. $a(s_{\perp} s'_{\perp} \sigma'_{\perp} \cos \alpha \sin \delta + s_{\parallel} s'_{\parallel} \sigma'_{\parallel} \sin \alpha \cos \delta) \sin(x + \beta)$,
3. $a(s_{\perp} s'_{\perp} \sigma'^2_{\perp} \cos \alpha \sin \delta + s_{\parallel} s'_{\parallel} \sigma'^2_{\parallel} \sin \alpha \cos \delta) \sin(x + 2\beta)$.

Um die Intensität im Schnittpunkte (Brennebene) aller dieser Anteile zu finden, müssen wir diese addieren und diese Summe in die Form bringen:

$$A_0 \sin \chi + B_0 \cos \chi.$$

Wir übergehen diese Summenbildung, da sie ganz analog der von Airy für eine der beiden Komponenten ausgeführten ist. Bedenken wir, daß beim Durchgang durch planparallele Platten die Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\perp} &= -\sigma_{\perp}; & \sigma'_{\parallel} &= -\sigma_{\parallel}; \\ s_{\perp} s'_{\perp} &= 1 - \sigma^2_{\perp}; & s_{\parallel} s'_{\parallel} &= 1 - \sigma^2_{\parallel} \end{aligned}$$

und setzen wir zur Abkürzung ferner:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \cos \alpha \sin \delta, \\ Q &= \sin \alpha \cos \delta, \end{aligned}$$

so nehmen in dem Ausdruck:

$$A_0 \sin \chi + B_0 \cos \chi$$

die Größen A_0 und B_0 folgende Werte an:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2 a \mathfrak{M} \sigma_{\perp} (1 + \sigma^2_{\perp}) \sin^2 \beta / 2}{1 - 2 \sigma^2_{\perp} \cos \beta + \sigma^4_{\perp}} \\ &+ \frac{2 a Q \sigma_{\parallel} (1 + \sigma^2_{\parallel}) \sin^2 \beta / 2}{1 - 2 \sigma^2_{\parallel} \cos \beta + \sigma^4_{\parallel}} = \mathfrak{M} A_{\perp} + Q A_{\parallel}; \\ B_0 &= \frac{\mathfrak{M} a \sigma_{\perp} (1 - \sigma^2_{\perp}) \sin \beta}{1 - 2 \sigma^2_{\perp} \cos \beta + \sigma^4_{\perp}} \\ &+ \frac{Q a \sigma_{\parallel} (1 - \sigma^2_{\parallel}) \sin \beta}{1 - 2 \sigma^2_{\parallel} \cos \beta + \sigma^4_{\parallel}} = \mathfrak{M} B_{\perp} + Q B_{\parallel}. \end{aligned}$$

Demnach ist die Intensität der Gesamtheit *aller* reflektierten Einzelwellen, welche aus dem unter dem Azimut α polarisierten einfallenden Strahle entstehen und aus dem Analysator mit dem Azimut δ austreten:

$$J_{1 \text{ bis } \infty} = A_0^2 + B_0^2 = \mathfrak{M}^2(A_{\perp}^2 + B_{\parallel}^2) + Q^2(A_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2) \\ + 2 \mathfrak{M} Q (A_{\parallel} A_{\perp} + B_{\parallel} B_{\perp}).$$

In dieser Gleichung ist die Intensitätsverteilung der Plattenringe für alle möglichen Stellungen des Polarisators und des Analysators enthalten. Tatsächlich geht sie für die Grenzfälle über in die für die Hauptschnitte abgeleitete Formel von Airy.

Für die zahlenmäßige Berechnung und Beurteilung der Erscheinung ist es zweckmäßig und wichtig, die Drehung der Schwingungsebene zu kennen, welche die einzelnen reflektierten Wellen erfahren.

Strahl 1 zerfällt in die beiden Komponenten:

$$a \sigma_{\perp} \cos \alpha \quad \text{und} \quad a \sigma_{\parallel} \sin \alpha.$$

Somit bildet die Schwingungsebene nach der Reflexion aber noch vor dem Eintritt in den Analysator (Fig. 3) mit der Einfallsebene den Winkel $90^\circ - \vartheta_1$, welcher gegeben ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sigma_{\perp} \cos \alpha}{\sigma_{\parallel} \sin \alpha} = \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} \operatorname{ctg} \alpha = - \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Strahl 2 zerfällt in die Komponenten:

$$a s_{\perp} s'_{\perp} \sigma'_{\perp} \cos \alpha \quad \text{und} \quad a s_{\parallel} s'_{\parallel} \sigma'_{\parallel} \sin \alpha.$$

Demnach gilt für Strahl 2:

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \operatorname{ctg} \alpha \frac{(1 - \sigma_{\perp}^2)(-\sigma_{\perp})}{(1 - \sigma_{\parallel}^2)(-\sigma_{\parallel})} = - \operatorname{ctg} \alpha \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)^3}$$

und, wie man leicht sieht, für Strahl 3:

$$\operatorname{tg} \vartheta_3 = - \operatorname{ctg} \alpha \frac{\cos(i+r)^3}{\cos(i-r)^5},$$

für Strahl 4:

$$\operatorname{tg} \vartheta_4 = - \operatorname{ctg} \alpha \frac{\cos(i+r)^5}{\cos(i-r)^7}.$$

.

Zum Beispiel betrage die Inzidenz $i = 80^\circ$ (Fig. 4) und es sei $n = 1,52$; dann wird:

$$\sigma_{\parallel} = -0,7392 \quad \text{und} \quad \sigma_{\perp} = -0,4853.$$

Ist die Schwingungsebene des Polarisators um 45° geneigt gegen die Einfallsebene, so betragen die in Fig. 4 eingetragenen Ablenkungen der einzelnen Wellen:

$$\vartheta_1 = + 33^\circ 17' 16'',$$

$$\vartheta_2 = + 47^\circ 53' 32'',$$

$$\vartheta_3 = + 25^\circ 29' 56'',$$

$$\vartheta_4 = + 11^\circ 37' 7'',$$

$$\vartheta_5 = + 5^\circ 3' 55'',$$

$$\vartheta_6 = + 2^\circ 11' 17'',$$

$$\dots$$

Schon aus solchen für verschiedene Azimute des einfallenden Lichtes gebildeten Tabellen kann man ohne weiteres ersehen, wie die Intensität der verschiedenen Einzelstrahlen beim Drehen des Analysators geändert wird.

Je nachdem die Schwingungsebene des Analysators auf derjenigen des ersten, zweiten, dritten etc. Einzelstrahles senkrecht steht, wird der erste, zweite, dritte etc. Einzelstrahl ganz ausgelöscht.

Wir geben im folgenden die Berechnung der Intensitätsverteilung von Minimum ($\sin \beta/2 = 0$ bez. $\beta/2 = k\pi$, wo k eine beliebige ganze Zahl ist) bis zum Maximum ($\sin \beta/2 = 1$ bez. $\beta = (2k + 1)\pi$) für die Werte von

$$\sin \beta/2 = 0; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3 \text{ etc. bis } \sin \beta/2 = 1,$$

und zwar bei einigen Analysatorstellungen, wobei außer den Hauptlagen $\delta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ auch noch diejenigen ausgewählt worden sind, bei denen der eine oder der andere der vielfachen Strahlen 1, 2, 3 etc. gerade ganz ausgelöscht sind.

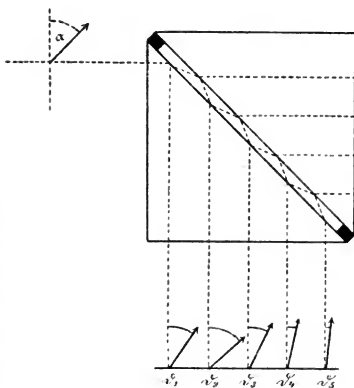


Fig. 4.

Einfallswinkel $i = 80^\circ$. Azimut des Polarisators $\alpha = 45^\circ$.

$\sin \beta/2$	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 45^\circ$ Nicols parallel	$\delta = 90^\circ$	$\delta = 135^\circ$ Nicols gekreuzt	$\delta = 137^\circ 53' 32''$ Nr. 2 ausgelöscht
0,05	0,012	0,012	0,002	0,002	0,007
0,1	048	047	008	009	011
0,2	149	154	030	025	032
0,3	244	271	063	037	047
0,4	315	376	102	041	053
0,5	363	468	144	039	051
0,6	396	546	183	034	046
0,7	419	613	220	027	038
0,8	436	669	254	020	031
0,9	448	717	283	013	024
1	457	758	308	007	017

Wo in den Vertikalreihen die Intensitäten ein Maximum durchschreiten (in den Tabellen fett gedruckt), tritt eine *Verdoppelung* der Streifen ein.

Einfallswinkel $i = 88^\circ$. Azimut des Polarisators $\alpha = 45^\circ$.

$\sin \beta/2$	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 45^\circ$ Nicols parallel	$\delta = 90^\circ$	$\delta = 135^\circ$ Nicols gekreuzt	$\delta = 149^\circ 17' 48''$ Nr. 3 ausgelöscht	$\delta = 153^\circ 9' 43''$ Nr. 2 ausgelöscht
0,05	0,200	0,202	0,056	0,0038	0,076	0,091
0,08	316	403	110	0232	096	121
0,09	348	445	139	0417	116	143
0,10	363	490	167	0389	113	143
0,11	382	532	188	0376	114	143
0,2	457	767	333	0237	099	133
0,3	480	874	409	0129	083	118
0,4	489	926	444	0074	074	110
0,5	493	951	463	0044	069	106
0,6	495	966	474	0027	067	103
0,7	496	975	480	0016	065	101
0,8	497	981	485	0009	064	099
0,9	498	985	488	0004	063	099
1,0	498	988	490	00001	062	098

Einfallswinkel $i = 89^\circ$. Azimut des Polarisators $\alpha = 45^\circ$.

$\sin \beta/2$	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 25^\circ 5' 52''$ Nr. 2 u. Nr. 3 gleichhell	$\delta = 45^\circ$	$\delta = 90^\circ$	$\delta = 135^\circ$ Nicols gekreuzt	$\delta = 153^\circ 5' 53''$ Nr. 3 aus- gelöscht	$\delta = 154^\circ 54' 8''$ Nr. 2 aus- gelöscht
0,03	0,25	0,31	0,39	0,077	0,034	0,108	0,117
0,05	36	50	49	167	039	141	155
0,08	44	66	69	281	031	140	156
0,09	45	69	73	310	027	136	153
0,10	46	72	77	334	024	132	150
0,11	47	75	80	355	022	131	149
0,2	49	83	93	445	008	110	129
0,3	495	86	96	474	004	103	122
0,4	497	87	980	485	002	100	119
0,5	498	875	987	490	001	099	118
0,6	4988	878	991	493	0007	098	117
0,7	4990	879	994	495	0004	097	1168
0,8	4993	880	995	496	0002	097	1165
0,9	4994	881	996	497	00009	096	1163
1,0	4995	882	997	498	000002	096	1162

Einfallswinkel $i = 89^\circ 30'$. Azimut des Polarisators $\alpha = 45^\circ$.

$\sin \beta/2$	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 45^\circ$ Nicols parallel	$\delta = 90^\circ$	$\delta = 135^\circ$ Nicols gekreuzt	$\delta = 155^\circ 45' 19''$ Nr. 2 ausgelöscht
0,01	0,150	0,165	0,037	0,022	0,078
0,02	316	400	122	038	148
0,03	397	471	210	037	166
0,05	457	767	334	024	159
0,08	482	889	419	013	142
0,09	486	909	434	010	140
0,1	489	923	442	008	138
0,11	491	938	453	006	135
0,2	497	980	485	002	129
0,3	499	991	493	001	128
0,4	499	996	497	0005	126
0,5	500	997	498	0003	126
0,6	500	998	498	0002	126
0,7	500	998	499	0001	126
0,8	500	999	499	00004	126
0,9	500	999	499	00002	126
1,0	500	999	499	00000006	126

Um den Verlauf der Erscheinung beim Drehen des Analysators in dem Falle $i = 89^\circ 30'$ und $\alpha = 45^\circ$ anschaulich darzustellen, ist in Fig. 5 der Intensitätsabfall zwischen den Werten $\sin \beta/2 = 0$ und $\sin \beta/2 = 1$ für verschiedene Azimute δ des Analysators graphisch aufgetragen. Man erkennt so viel deutlicher als aus der Tabelle, daß eine Verdoppelung der Streifen

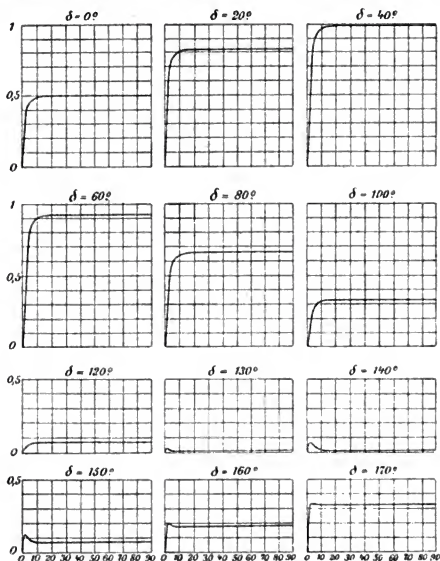


Fig. 5.

erst bei $\delta = 130^\circ$ deutlich wird und bei $\delta = 170^\circ$ kaum noch merklich ist. Zugleich sieht man, daß diese Verdoppelung am schärfsten ausgeprägt ist ungefähr bei gekreuzter Stellung des Polarisators und Analysators. Zugleich ergibt sich, daß bei keiner möglichen Stellung der Nicolschen Prismen eine Schärfe der Streifen auftritt, die über die „Airysche“ hinausgeht.

In Fig. 6 ist versucht worden, das Aussehen der Erscheinung bei einigen charakteristischen Stellungen des Analysators bildlich darzustellen.

Diese Erscheinung ist berufen, Aufschluß über die kurz vor der Totalreflexion, bei der Reflexion an isotropen und kristallinischen Medien, an Metallen etc. stattfindenden Phasen-

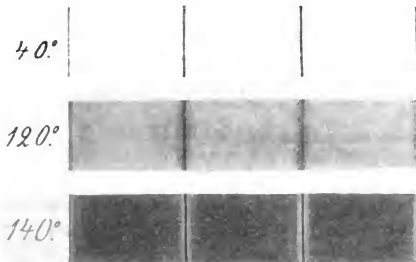


Fig. 6.

verluste zu geben. Hr. H. Schulz, welcher die ziemlich langwierigen Berechnungen obiger Beispiele ausgeführt hat, wird diese speziellen Fragen und auch die Entstehung der Ringe an planparallelen Kristallplatten behandeln.¹⁾

Breslau, Physik. Institut, 22. Oktober 1906.

1) *Anmerkung bei der Korrektur:* Im neuesten Heft des Philos. Magazine (Nr. 71. 12. p. 489—493. Nov. 1906) beschäftigt sich Lord Rayleigh ebenfalls mit den Ringen an einer planparallelen Kristallplatte unter Benutzung auffallenden natürlichen Lichtes.

Die historischen Bemerkungen in bezug auf die „Haidingerschen“ Ringe bringen insofern nichts wesentlich neues, als auch ich schon in meiner Dissertation (Wied. Ann. 23. p. 49—84. 1884) Haidinger als Entdecker der „Kurven gleicher Neigung“ angeführt habe. Die Frage ist vielmehr die, ob Haidinger, Mascart oder Michelson schon die von mir nach meiner Meinung zuerst aufgedeckte prinzipielle Bedeutung dieser Ringe erkannt hatten, eine Frage, die nach meinen obigen Darlegungen entschieden zu verneinen ist. Auch habe ich schon früher (Berl. Akad. Ber. p. 504—513. 1900) darauf hingewiesen, daß die Airysche Theorie der Farben dünner Blättchen nicht auf die Newtonschen Ringe „gleicher Dicke“, sondern nur auf die Haidingerschen Ringe anwendbar ist und diese nicht nur ihrem Orte und ihrer Gestalt nach, sondern auch in bezug auf ihre Intensitätsverteilung bei jedem Einfallswinkel darstellt.

(Eingegangen 24. Oktober 1906.)

3. Über spezifische Wärme und spezifisches Gewicht der allotropen Modifikationen fester Elemente; von Albert Wigand.

[Auszug aus der Inaug.-Diss. des Verf.¹⁾ und der von der *Société Batave de Rotterdam* preisgekrönten Arbeit über die spez. Wärme der Schwefel- und Phosphormodifikationen²⁾ sowie Mitteilung weiterführender Studien.]

I. Theoretischer Teil.

Im Gegensatze zur kinetischen Gastheorie ist die *kinetische Theorie fester Körper* noch äußerst wenig ausgebildet. Während es gelungen ist, die physikalischen Eigenschaften der Gase und ihre Gesetze von *einer* Grundvoraussetzung aus in Zusammenhang zu bringen und mathematisch zu begründen, hat bis jetzt nur das *Gesetz von Dulong und Petit* Anlaß gegeben, die kinetische Theorie auf die festen Körper auszudehnen. Eine theoretische Begründung dieses Gesetzes hat zuerst Boltzmann³⁾ geliefert. Er behandelt mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Zustandsverteilung für die Atombewegung in einem festen Körper, den er als *eine* vielatomige Gasmolekel betrachtet, und findet so die Gleichheit der Atomwärmen für die festen Elemente, allerdings unter den beschränkenden Voraussetzungen seiner speziellen kinetischen Theorie. Auch lassen sich die Bedingungen für die zahlreichen Abweichungen aus der Boltzmannschen Ableitung nicht erkennen.

1) Marburg 1905; F. Richarz, Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg 6. p. 61. 1904; 7. p. 100. 1905.

2) Abhandl. der Batav. Gesellschaft, Rotterdam 1906 (W. J. van Hengel).

3) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 63. Abt. 2. p. 731. 1871.

Von diesen Mängeln ist die einfachere von F. Richarz¹⁾ aufgestellte Theorie frei. Mit Hilfe des *Clausius'schen Virialsatzes* begründet sie unter ganz allgemeinen Annahmen über die Art der Atombewegung das Dulong-Petitsche Gesetz und erklärt auch vollkommen die kleineren und größeren Abweichungen.²⁾ Sie hat ferner den Vorzug, einer *elementaren Darstellung*³⁾ fähig zu sein, wenn man für die Wärmebewegung der Atome gewisse vereinfachende Annahmen trifft. Des Näheren sei auf die zitierten Abhandlungen verwiesen.⁴⁾

Ferner sind noch von Staigmüller⁵⁾, Puschl⁶⁾ u. a.

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 708. 1893; 67. p. 704. 1899.

2) Entgegen A. Klaus, Inaug.-Diss. Freiburg 1904. p. 87.

3) F. Richarz, Naturw. Rdsch. 9. p. 221 u. 237. 1894; 15. p. 221. 1900; Limpricht-Festschr., Greifsw. 1900; Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg 6. p. 61. 1904; 7. p. 100. 1905; A. Wigand, Inaug.-Diss. Marburg 1905.

4) Es sei gestattet, hier einige Richtigstellungen und Widerlegungen von Einwänden gegen die Richarzsche Theorie anzuführen: Was H. Happel (Ann. d. Phys. 13. p. 359. 1904) an der strengen Richarzschen Theorie vermißt, ist bereits in der Originalabhandlung (Wied. Ann. 48. p. 710. Anm. 2. 1893) berücksichtigt. Es heißt dort, daß die mittlere Gleichgewichtslage eines Atoms unverändert bleibt. Happel hat dies noch mathematisch nachgewiesen. Die Annahme Happels, daß für feste Körper $C_p = C_v$ sei, ist nach Theorie und Versuchen unbegründet (vgl. p. 68). Die hier wirkenden Kräfte werden als Newtonsche Kräfte nur im allgemeinen Sinne, d. h. als Kräfte von Atom zu Atom, gedacht. Ihr Gesetz muß also nicht etwa notwendig das Newtonsche Gravitationsgesetz sein, wie J. H. van't Hoff (Vorlesungen über theor. u. phys. Chemie 1903, 3. Heft. p. 67) der Richarzschen Theorie entnommen hat, sondern die Kraft wird durch eine unbekannte Funktion ausgedrückt. Es kommt ferner bei diesen Betrachtungen nur auf die Abstände der Schwerpunkte der Atome an, nicht aber auf den von dem Atom wirklich erfüllten Raum, wie J. Traube (Grundr. d. phys. Chemie 1904. p. 41) glaubt. Daß Traube die Berücksichtigung der Arbeit gegen den inneren Druck (die Kohäsionskräfte) vermißt, erscheint vollkommen unverständlich, da es sich bei der Richarzschen Theorie ja nur um C_v (die spezifische Wärme bei konstantem Volumen) handelt. Diese Ausdehnungsarbeit wird repräsentiert durch die Größe $C_p - C_v$, welche Differenz Richarz ebenfalls in den zitierten Abhandlungen ausführlich behandelt hat.

5) H. Staigmüller, Wied. Ann. 65. p. 670. 1898.

6) C. Puschl, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 112. [2a] p. 1230. 1903; Beibl. 28. p. 955. 1904.

Theorien zur Erklärung des konstanten Wertes der Atomwärme aufgestellt worden, die zum Teil komplizierter sind als die Richarzsche Theorie, ohne die angeführten Mängel der Boltzmannschen zu vermeiden.

Aus den Vorstellungen, wie sie die Richarzsche Theorie für die Natur der festen Körper ausgebildet hat, lassen sich einige *Konsequenzen* ziehen, die eine schöne experimentelle Bestätigung gefunden haben und ihrerseits wiederum zur Kräftigung der Theorie beitragen.

Daß diejenigen Elemente, die *kleines Atomvolumen* und *kleines Atomgewicht* (oder auch nur eines von beiden) haben, größere Abweichungen erwarten lassen, folgte bereits unmittelbar aus der Theorie und hat sich auch vollständig bestätigt. Dabei war stillschweigend angenommen worden, daß die Kleinheit des Atomvolumens durch gleichmäßige Annäherung aller Atome bedingt sei. Es ist aber auch möglich, daß die Annäherung einzelner Atome aneinander, daß *Komplexbildung* der Grund für kleines Atomvolumen ist. Daß solche Komplexbildung durch an und für sich schon vorhandenen kleinen Abstand aller Atome begünstigt wird, ist leicht einzusehen: Die allgemeine Annäherung der Atome kann durch Vermehrung der Kohäsionskräfte dazu führen, daß einzelne sich zusammenballen. Dafür zeugt auch die Tatsache, daß diejenigen festen Elemente, die besonders charakteristische *allotrope Modifikationen* aufweisen, auch kleines Atomvolumen haben. Man denkt sich ja, daß das Zustandekommen allotroper Modifikationen desselben Elementes auf der Bildung von Atomkomplexen beruht. Wegen der dadurch verursachten größeren Unfreiheit der Bewegung zählen nicht mehr alle Atome als frei beweglich in der kinetischen Theorie mit; die Wärmekapazität ist infolgedessen kleiner. Es ergibt sich also daraus die Folgerung, daß gerade bei den Elementen, die kleines Atomvolumen haben *und in verschiedenen Modifikationen vorkommen*, bedeutendere Abweichungen vom Gesetze von Dulong und Petit zu erwarten sind. Daß trifft im großen und ganzen zu, und es sind gerade die Elemente stark metalloiden Charakters, die zugleich polymorph sind *und* die kleinsten Atomwärmen haben (*B, C*). Nimmt man doch auch an, daß die

Molekeln der Metalloide im allgemeinen nicht einatomig sind wie die der Metalle.¹⁾

Aus demselben Grunde hat auch das *Neumann-Joulesche Gesetz*, welches aussagt, daß die Molekularwärme fester Verbindungen gleich ist der Summe der Atomwärmen für die in der Molekel enthaltenen Atome, noch weniger umfangreiche Bedeutung als das Gesetz von Dulong und Petit. Nur diejenigen Verbindungen können einen annähernd richtigen Wert für die Molekularwärme ergeben, bei denen die durch die Zusammenballung der Atome zu Molekeln verursachte Unfreiheit klein ist gegenüber der noch vorhandenen Bewegungsfreiheit. In den meisten Fällen ist jedoch die experimentell gefundene Molekularwärme kleiner als die berechnete.²⁾

Betrachten wir nun die allotropen Modifikationen eines Elementes, das im allgemeinen eine Abweichung vom Dulong-Petitschen Gesetze nach unten zeigt, so werden wir auch schon *ohne die Annahme der Komplexbildung* zu der Folgerung kommen, daß die Abweichung um so stärker ist, je kleiner das Atomvolumen ist. Die Annahme der Zusammenballung erklärt dann noch direkt, warum die abnormen Werte der Atomwärme *zu klein* sind; denn die Komplexbildung hat eine Verminderung der Bewegungsfreiheit zur Folge. Besitzt nun ein Element allotrope Zustände und daher in jeder Modifikation einen anderen Grad von Bewegungsfreiheit der Atome, so ist zu erwarten, daß *die Atomwärmen der Modifikationen um so kleiner werden, je kleiner die Atomvolumina sind*. Nun ist:

$$\text{Atomwärme} = \text{Atomgewicht} \times \text{spez. Wärme,}$$

$$\text{Atomvolumen} = \frac{\text{Atomgewicht}}{\text{spez. Gewicht}}.$$

Da aber das Atomgewicht für alle Modifikationen eines Elementes dasselbe ist, so folgt die Regel:

Für allotrope Modifikationen desselben Elementes sind die spezifischen Wärmen um so kleiner, je größer die spezifischen Gewichte sind.

1) J. H. van't Hoff, Vorles. über theor. u. physik. Chemie 1903. 3. Heft. p. 66 u. 67.

2) Vgl. A. Winkelmann, Handb. d. Physik, 2. Aufl. 1906. 3. 1. p. 191 ff.

Es handelte sich nun darum, diese von F. Richarz abgeleitete Regel an den experimentell gefundenen Daten zu prüfen. Ich sah daher die Literatur durch und machte für die wichtigsten Elemente die ergänzenden experimentellen Bestimmungen. Wie die allgemeine Zusammenstellung in der Tab. VIII auf p. 96 zeigt, findet die Regel für Elemente durchweg ohne Ausnahme ihre Bestätigung, selbst auch für *Arsen* und *Zinn*, die nach den Angaben der bisherigen Literatur Ausnahmen machen würden. Meine Nachprüfung der spezifischen Wärme dieser Elemente in ihren bekanntesten Modifikationen ergab ein bestätigendes Resultat.

Sollte wirklich in einem Falle die Regel nicht zutreffen, so ist das nicht als prinzipieller Widerspruch gegen die aus der kinetischen Theorie gezogene Konsequenz anzusehen. Diese gilt streng nur für C_v , während experimentell C_p (bei freier Ausdehnung und konstantem Atmosphärendruck) bestimmt wird. Bei festen Körpern ist, gerade wie bei Gasen, $C_p > C_v$. Während jedoch bei den Gasen die Ausdehnungsarbeit gegen den Atmosphärendruck dieser Differenz der spezifischen Wärmen entspricht, kommt diese Arbeit bei der geringen Ausdehnung fester Körper weniger in Betracht. Hier ist vielmehr die Arbeit, die bei der thermischen Ausdehnung gegen die Kohäsionskräfte der Atome untereinander zu leisten ist, der Grund für die Differenz der beiden spezifischen Wärmen; denn durch die thermische Ausdehnung erhalten die mittleren Lagen der Atome einen größeren Abstand voneinander. In diesem Sinne ist auch die aus dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie abgeleitete Beziehung zwischen $(C_p - C_v)$, der thermischen Ausdehnung und der kubischen Kompressibilität zu verstehen.¹⁾ Da nun diese Kohäsionsarbeit von C_p abgezogen werden muß, wenn man C_v erhalten will, kann es sehr wohl sein, daß bei zwei allotropen Formen a und b zwar C_p für a größer als für b , jedoch C_v für a kleiner als für b wird. Für C_v würde dann die Konsequenz aus der Theorie stimmen.

van't Hoff²⁾ findet auf Grund thermodynamischer Be-

1) H. v. Helmholtz, Vorles. 6. p. 227.

2) J. H. van't Hoff, Boltzmann-Festschr. 1904. p. 233.

trachtungen den Satz, daß die in höherer Temperatur stabile Form die größere spezifische Wärme hat; dies bestätigt sich allgemein bei der Schmelzerscheinung, sowie auch bei einigen allotropen Elementen und polymorphen Verbindungen, allerdings nicht ohne Ausnahmen.

Die Regel, daß sich bei der allotropen Modifizierung eines Körpers die spezifischen Wärmen im umgekehrten Sinne ändern wie die spezifischen Gewichte, ist nicht nur für Elemente gültig; auch *polymorphe Verbindungen* folgen ihr, soweit nicht durch die Intensität der innerhalb der Moleküle wirkenden Kräfte eine Komplizierung der Verhältnisse eintritt. Im allgemeinen kann man auch bei mechanischer *Kompression* Verkleinerung der spezifischen Wärme erwarten¹⁾, da ja das spezifische Gewicht durch die Kompression vergrößert wird. Wenn man schließlich auch den *flüssigen Aggregatzustand* heranzieht und ihn als eine allotrope Modifikation betrachtet, bei der gar keine oder nur noch kleine Atomkomplexe bestehen²⁾ (bei Verbindungen Molekülkomplexe), so wird man mit Ausnahme von *Wasser* und *Wismut*, deren Aufbau auch aus anderen Gründen als komplizierter anzusehen ist, überall die Regel bestätigt finden, bei Elementen sowohl wie bei Verbindungen.³⁾ Die Wärmebewegung in einer Flüssigkeit ist etwa so zu denken, daß zunächst wie bei den festen Körpern ein Atom um eine mittlere Lage herum oszilliert, welche mittlere Lage aber im Unterschied zu den festen Körpern wandert, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die klein ist gegen diejenige der Oszillationen.⁴⁾

1) Loth. Meyer (mod. Theor. d. Chemie, 1884. p. 85) gibt an, daß die spezifische Wärme von Metallen, die durch Hämmern verdichtet sind, kleiner ist als die des ausgeglühten Zustandes. Im Marburger Physikalischen Institute wird zurzeit untersucht, wie sich spezifische Wärme und Dichte einiger Metalle mit dem Bearbeitungszustand ändern; vgl. auch die Arbeit von V. Regnault, Ann. Chim. Phys. 9. p. 322. 1843; Pogg. Ann. 62. p. 50. 1844.

2) H. v. Helmholtz, Vorles. 6. p. 176.

3) Vgl. A. Winkelmann, Handb. d. Phys. 2. Aufl. 1906. 3. 1. p. 198.

4) F. Richarz, Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg 6. p. 67. 1904.

II. Experimenteller Teil.

a) Versuchsmethoden.

Für die experimentelle Untersuchung handelte es sich darum, die spezifische Wärme allotroper Modifikationen von festen Elementen für verschiedene Temperaturbereiche sowie ihre Dichte zu bestimmen.

Zur Messung der *spezifischen Wärmen* diente das *Eiskalorimeter* von Bunsen¹⁾, und zwar die von Schuller und Wartha²⁾ verbesserte Methode, nach der die Menge des geschmolzenen Eises durch das Gewicht des eingesogenen Quecksilbers bestimmt wird. Die bei der Berechnung zugrunde liegende Wärmeeinheit war die mittlere spezifische Wärme des Wassers zwischen 0° und 100°. Das Verhältnis dieser „mittleren Kalorie“ ($\bar{c}_{0-100}$) zur „15°-Kalorie“ (c_{15}) hat U. Behn³⁾ direkt bestimmt. Er findet:

$$\frac{\bar{c}_{0-100}}{c_{15}} = 0,9997.$$

Die von ihm zugrunde gelegte Zahl für die dem $\bar{c}_{0-100}$ entsprechende Quecksilbermenge $\bar{q}_{0-100} = 0,015456$ g wurde auch von mir benutzt. Sie ist der Mittelwert aus den Zahlen, die Schuller und Wartha²⁾ und Velten⁴⁾ gefunden haben. Leider wurde mir erst nach Beendigung meiner Arbeiten bekannt, daß C. Dieterici⁵⁾ diese Zahl neuerdings zu 0,015491 g gefunden hat; eine nachträgliche Umrechnung würde für meine Resultate wenig Zweck haben, da die untersuchten Verhältnisse dadurch nicht beeinflußt werden würden. Auf Grund der Arbeiten von Dieterici und Behn wird nun das Verhältnis:

$$\frac{\bar{c}_{0-100}}{c_{15}} = 1,0020.$$

Die Kalorimetrie hat so durch die genaue Definition der Wärmeeinheiten eine sichere Basis gewonnen, und es ist mit Hilfe dieser Verhältniszahl jederzeit möglich, eine verlangte Umrechnung von der einen Wärmeeinheit auf die andere vorzunehmen.

1) R. Bunsen, Pogg. Ann. 141. p. 1. 1870.

2) A. Schuller u. V. Wartha, Wied. Ann. 2. p. 359. 1877.

3) U. Behn, Ann. d. Phys. 16. p. 653. 1905.

4) A. W. Velten, Wied. Ann. 21. p. 31. 1884.

5) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 16. p. 593. 1905.

Das Eiskalorimeter, in denselben Größenverhältnissen wie das von Dieterici¹⁾, wurde nach dessen Angaben zusammengesetzt und mit allen erforderlichen Vorsichtsmaßregeln versehen. Die Füllung geschah in der von Bunsen angegebenen Weise mit luftfreiem, destilliertem Wasser und Quecksilber, das nach allen Regeln der Kunst gereinigt war. Der ganze Aufbau des Apparates war ähnlich, wie die Figur bei Behn (l. c. p. 658) zeigt. Selbst wenn man Druckdifferenzen des inneren und äußeren Quecksilberniveaus sowie Verunreinigungen der Füllung der inneren Zelle nach Möglichkeit vermeidet, ist es doch nicht zu erreichen daß der „Gang“ des Kalorimeters vollständig verschwindet.²⁾ Es wurde daher als genügend angesehen, wenn die in gleichen Zeiten eingesogenen oder ausgestoßenen Quecksilbermengen nahezu konstant und im Verhältnis zu der zu messenden Wärmemenge nicht zu groß waren. Um den innersten Eismantel noch besser zu schützen und dadurch den Gang noch gleichmäßiger zu machen, wurde bei einigen Versuchen der von Dieterici beschriebene Boyssche Luftmantel³⁾ mit Erfolg angewendet. Als innere Leitflüssigkeit diente Wasser, bei Versuchen unter 20° auch Alkohol.

Zur *Erzeugung des Eismantels* wurde Alkohol, der in Kohlen-säureäthermischung gekühlt war, in kontinuierlichem Strome durch das innere Rohr geleitet. Der so erhaltene Eismantel war gleichmäßig, allseitig geschlossen und unten birnenförmig verdickt; er genügte also den von Lindner⁴⁾ gestellten Forderungen, indem Wärmeverluste durch Strahlung und Konvektion ausgeschlossen waren. Nach Erzeugung des Eismantels wurde stets 12 Stunden lang mit dem Beginn der Versuche gewartet, sodaß man vollkommen gleichmäßige Temperatur im ganzen Kalorimeter annehmen konnte.

Wegen anderer Einzelheiten beim Arbeiten mit dem Eiskalorimeter sei auf meine Dissertation und die zahlreiche einschlägige Literatur verwiesen.

Die Substanzen waren in ein zylindrisches *Platingefäß* aus

1) C. Dieterici, Wied. Ann. 33. p. 417. 1888.

2) A. W. Velten, l. c.

3) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. p. 154. 1903; C. V. Boys, Phil. Mag. (5) 24. p. 214. 1887.

4) G. Lindner, Physik. Zeitschr. 3. p. 237. 1902.

reinem Platin (von Heräus in Hanau) eingeschlossen. An einem passend gebogenen Platindraht konnte es in dem Erwärmungsapparat an einer zweckmäßigen Fallvorrichtung aufgehängt werden. Vor Einfüllung der Substanz wurde das Platingefäß ausgewaschen, getrocknet und gewogen. Sein Wasserwert (Gewicht $\times$ spezifische Wärme) wurde bei der Berechnung der spezifischen Wärme der untersuchten Substanz in Abrechnung gebracht. Bei einigen Versuchen wurde ein an einer Platindrahtschlinge aufgehängtes *Glasgefäß* benutzt.

Um dem Körper eine konstante Anfangstemperatur mitzuteilen, benutzte ich *Thermostaten* mit Dampf-, Warmwasser- und elektrischer Heizung. Für die ersten Versuchsreihen bestand das Erwärmungsgefäß aus einem doppelwandigen Blechzylinder, durch dessen Außenraum Wasserdampf oder warmes Wasser zirkulierte, so daß sich im Innenraum eine mehrere Minuten lange konstante Temperatur erzielen ließ. Der zu erwärmende Körper hing an einer Fallvorrichtung aus zwei Elfenbeinstäben, wie sie Neesen¹⁾ beschrieben hat, in der Mitte des inneren Rohres. Die Fallvorrichtung war zugleich mit dem Thermometer, das stets in leitende Berührung mit dem Körper gebracht wurde, in dem oberen Stopfen befestigt. Blechgefäß und Zuleitungsröhren wurden mit Filz, Watte und Asbest isoliert und die gesamte Vorrichtung samt Heizkessel so weit vom Kalorimeter entfernt (zum Teil unter einem Abzuge) aufgestellt, daß ein direkter Einfluß auf ein am kapillaren Saugrohr angebrachtes Thermometer nicht bemerkt werden konnte. Die Temperatur der Umgebung wurde also während eines Versuches stets nahezu konstant gehalten.

Die etwas umständliche Handhabung der Dampf- und Warmwasserheizung suchte ich bei den späteren Versuchsreihen dadurch zu vermeiden, daß ich mir einen *elektrischen Heizapparat* verfertigte, mit entsprechenden Abänderungen etwa wie der von Bontschew²⁾ und Adler.³⁾ Er hatte auch den Vorteil, für beliebige Temperaturen (auch über 100°) verwendbar zu sein und erwärmte die umgebende Luft kaum. Die

1) F. Neesen, Wied. Ann. 18. p. 370. 1883.

2) W. Bontschew, Inaug.-Dissert. Zürich 1900.

3) F. W. Adler, Inaug.-Dissert. Zürich 1902.

Temperatur des Innenraumes ließ sich beliebig lange konstant halten.

Die Fallvorrichtung bestand hier, um auch für hohe Temperaturen brauchbar zu sein, aus zwei Glasstäben, die samt dem Thermometer aus dem oberen Verschußstopfen des Erwärmungsapparates herausragten und dort mit Griffknöpfen versehen waren. Am unteren Ende besaß der eine der beiden Glasstäbe eine eingeschmolzene Platinöse, an der ein Riegel aus Platindraht charnierartig befestigt war. Der andere Glasstab war unten ebenfalls mit einem eingeschmolzenen Platindraht versehen, der rechtwinkelig umgebogen und am Ende zu einem Plättchen breitgeschlagen war. An dem Riegel des einen Stabes, der auf das Plättchen des anderen zu liegen kam, hing der zu erwärmende Körper an einer Platindrahtschlinge. Will man den Körper in das alsdann senkrecht unter der unteren Öffnung des Heizapparates befindliche Kalorimeter fallen lassen, so dreht man einen der beiden Glasstäbe an dem herausragenden Knopfe; der Riegel wird so von der Platte weggeschoben, klappt herunter, und der erwärmte Körper fällt herab.

Der Stromverbrauch für die einzelnen Temperaturen des Erwärmungssofens war etwa folgender:

Temperatur	30°	55°	100°	130°	160°	200°
Stromstärke } (Ampère)	1,2	1,8	2,8	3,4	4,0	4,8

Zunächst wurde immer mit etwas stärkerem Strome angeheizt, bis das Thermometer die gewünschte Temperatur eben überschritten hatte, dann der zu erwärmende Körper an der Fallvorrichtung aufgehängt und der Strom auf die nötige Stärke reguliert.

Zur Ausführung eines Versuches wurde der Erwärmungsapparat auf einer schlittenartigen Schiebevorrichtung über die Kalorimeteröffnung gebracht und der Körper nach Entfernung der Verschlüsse in das Kalorimeter eingeführt. Der ganze Vorgang dauerte stets nur wenige Sekunden. Wie besondere Beobachtungen lehrten, änderte sich in dieser kurzen Zeit die Temperatur im Erwärmungsgefäße nicht. Wohl aber beeinflußte in einigen Fällen das alleinige Öffnen des Kalorimeter-

verschlusses und die Annäherung des Erwärmungsapparates den Eismantel und bildete so eine Fehlerquelle. Bei Anwendung eines besseren Kalorimeterverschlusses und des elektrischen Heizofens verschwand dieser „Erwärmungsfehler“ später gänzlich, wie mehrere zu diesem Zwecke angestellte „blinde“ Versuche zeigten. Für die ersten Versuche (Arsen und amorpher Schwefel) führte ich jedoch eine besondere „*Erwärmungsfehlerkorrektur*“ ein. Der Erwärmungsfehler war nicht stets derselbe, sondern variierte etwas je nach der Außentemperatur und der Temperatur des Erwärmungsapparates. Er wurde daher meistens kurz vorher oder nachher besonders bestimmt.

Zur Temperaturbestimmung dienten *Quecksilberthermometer*, die durch Nullpunkt- und Siedepunktbestimmung und Kalibrierung oder durch Vergleichung mit einem Normalthermometer korrigiert waren. Die Ablesung geschah auf $\frac{1}{10}$ Grade genau, die $\frac{1}{100}$ Grade wurden geschätzt. Wenn es nötig war, wurde die Korrektur für den herausragenden Faden angebracht und die korrigierte Temperatur in allen Fällen auf das Wasserstoffthermometer reduziert.

Die *Wägungen* geschahen auf einer neuen Wage mit einem Gewichtssatz, dessen Korrekturen bekannt waren, wurden durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Wagearme absolut berechnet und auf den leeren Raum reduziert.

Zur *Kontrolle der Methode* wurde zunächst die spezifische Wärme des *Silbers* (ausgeglühtes elektrolytisch reines Feinsilber in Drahtform von der Gold- und Silberscheideanstalt in Frankfurt a. M.) und des *Platins* (reines Platinblech von Heräus in Hanau) zwischen 0° und 100° bestimmt. Die Resultate dieser ersten, noch rohen Versuche waren:

Silber: $\bar{C}_{0-100} = 0,0563$ (Mittel aus 3 Versuchen)

Platin: $\bar{C}_{0-100} = 0,0324$ „ „ 4 „

Es ergab sich also gute Übereinstimmung mit den Werten früherer Beobachter.¹⁾

Die Bestimmung der *spezifischen Gewichte* geschah zunächst mit dem *Pyknometer* nach den Angaben in F. Kohlrauschs

1) H. Landolt, R. Börnstein u. W. Meyerhoffer, physik.-chem. Tabellen, 3. Aufl. 1905. p. 385 u. 386.

praktischer Physik. Zur Entfernung der anhaftenden Luft wurde das mit der Substanz und mit Wasser gefüllte Pyknometer längere Zeit unter den Rezipienten der Luftpumpe gebracht. Da es sich bei manchen Substanzen nicht genau feststellen ließ, ob sie schließlich ganz luftfrei waren, beschränkte ich mich darauf, diese Methode nur beim plastischen Schwefel, der eine glatte Oberfläche hatte, und beim roten Phosphor zu benutzen. Bei dem äußerst fein verteilten unlöslichen Schwefel und auch bei dem flockigen schwarzen Arsen gelang die Entfernung der Luft jedenfalls nicht vollständig, da unter der Luftpumpe fast die gesamte, am Boden des Pyknometers befindliche Masse in die Höhe stieg und sich nur zum Teil bei stärkerer Luftverdünnung nach Ablösung der Blasen wieder absetzte.

Für diese pulverförmigen Substanzen blieb also nur die *volumenometrische Methode* übrig, die allerdings an Präzision den anderen Methoden zur Dichtebestimmung gegenüber viel zu wünschen übrig läßt. Es stand mir ein Oberbeck'sches Volumenometer¹⁾ zur Verfügung, mit dem ich nach gründlicher Reinigung und Kalibrierung einige Vorversuche machte. Das Instrument hat jedoch folgende erhebliche Fehlerquellen: 1.) ist der Verschluß der beiden Glasgefäße nicht in allen Fällen genügend; 2.) sind infolge der allzusehr geneigten Lage der beiden Röhren Einstellungsfehler möglich, da sich das Quecksilber an der Rohrwand reibt; 3.) ist eine genaue Einstellung der Quecksilbermaniskn auf eine bestimmte Marke unmöglich, was allerdings Oberbeck durch Einführung des Verhältnisses der beiden voneinander abweichenden Einstellungen umgeht. Die Verbesserung eines solchen Oberbeck'schen Volumenometers ließe sich folgendermaßen machen: 1.) zum sicheren Verschluß der beiden Gefäße presse man die Glasplatten mit Klammern oder Druckschrauben²⁾ auf den überstehenden und abgeschliffenen Rand der Gefäße; 2.) das ganze Instrument stelle man nach Art eines Luftthermometers vertikal auf, wie es Paalzow³⁾ angegeben hat; 3.) die Vor-

1) A. Oberbeck, Wied. Ann. 67. p. 209. 1899.

2) Vgl. Müller-Pouillet, I. 9. Aufl. p. 508. 1886.

3) A. Paalzow, Wied. Ann. 13. p. 332. 1881.

richtung zum Heben und Senken des Quecksilberreservoirs versehe man mit einer Mikrometerschraube.

Das von mir zu den Versuchen benutzte Volumenometer war auf die einfachste Art mit Hilfe einiger Stative etwa wie das von Paalzow¹⁾ aufgebaut. Es wurde im Interesse der Einfachheit nur *ein* verschließbares Gefäß verwendet. Dafür mußte dann allerdings jedesmal der Barometerstand beobachtet werden. Die Aufstellung war vertikal. Das verschließbare Gefäß war aus starkem, 4 mm dickem Messingblech gearbeitet, unten luftdicht auf die Glasröhre aufgekittet und hatte oben einen überstehenden, glattpolierten Rand. Eine matte Glasplatte konnte mit etwas Fett durch eine Klemmvorrichtung luftdicht aufgepreßt werden. Diese Klemmvorrichtung bestand aus einem breiten, starken Messingbande, das, um den Rand der Glasplatte und des Messinggefäßes herumgreifend, mittels zweier Druckschrauben fest aufgepreßt werden konnte. An der Vorrichtung zum Heben und Senken der gut kalibrischen Skalenröhre befand sich eine Mikrometerschraube, sodaß die Einstellung der Quecksilbermenisken auf die verlangte Marke mit beliebiger Genauigkeit möglich war. Für jeden Versuch wurde ein bestimmtes Zusatzvolumen gewählt, indem durch Senken des beweglichen Schenkels der Meniskus in dem festen Schenkel auf eine bestimmte Marke eingestellt wurde. Die Reduktion der Volumina auf gleiche Temperatur wurde unterlassen, da sie bei der geringen Empfindlichkeit des Instrumentes nicht von Bedeutung gewesen wäre.

Das Volumen des verschließbaren Gefäßes bis zu einer oberen Marke an der Glasröhre wurde durch Einführung von reinem, gegossenem Zink (zinkum puriss. von Kahlbaum in Berlin) vom spezifischen Gewichte 7,13 bestimmt.

Zur Kontrolle der Methode wurde das spezifische Gewicht rhombischen aus Schwefelkohlenstofflösung gewonnenen Schwefels (von Kahlbaum) untersucht. Der Mittelwert aus drei Versuchen war 2,06, in guter Übereinstimmung mit Deville²⁾, der auf anderem Wege 2,063 gefunden hat.

1) A. Paalzow, l. c.

2) Deville, Compt. rend. 25. p. 897. 1848.

b) Darstellung der Modifikationen von Arsen, Schwefel, Zinn und Phosphor und Diskussion der Resultate früherer Beobachter.

1. Arsen.

Das *Arsen* liegt in zwei der Untersuchung leicht zugänglichen Modifikationen vor, der grauen kristallisierten und der meist als amorph angesehenen schwarzen. Die dritte Form, das gelbe Arsen¹⁾, auf spezifische Wärme zu untersuchen, ist zurzeit noch unmöglich, da es sich am Lichte und bei gewöhnlicher Temperatur sofort in die schwarze Form verwandelt. Die graue und die schwarze Form haben Bettendorf und Wüllner²⁾ auf spezifisches Gewicht und spezifische Wärme untersucht; sie fanden:

	Spez. Gewicht	Spez. Wärme (20—70°)
Krist. Arsen	5,727	0,0830 ³⁾
Amorph. Arsen	4,71	0,0758

Es hat also den Anschein, als ob hier die aus der Theorie abgeleitete Regel nicht erfüllt würde. Die spezifische Wärme des amorphen (schwarzen) Arsens ist wider Erwarten kleiner als die des kristallisierten (grauen). Ich habe daher zur Kontrolle die Versuche von Bettendorf und Wüllner wiederholt und gefunden, daß auch für Arsen die Regel zutrifft (Resultate p. 91, Tab. I und p. 95).

Das graue Arsen war durch Sublimation im Kohlensäurestrom gereinigt und wurde vor jeder Bestimmung zur Entfernung der äußerlichen Oxydationsschicht nochmals im Kohlensäurestrom erhitzt.

Das schwarze Arsen wurde zunächst genau nach den Angaben von Bettendorf und Wüllner dargestellt. In der einen Hälfte eines evakuierten, knieförmig gebogenen, schwer schmelzbaren Glasrohres wurde metallisches Arsen erhitzt und die andere Hälfte des Rohres mit Eis gekühlt. Am äußersten

1) H. Erdmann u. M. v. Unruh, Zeitschr. f. anorg. Chem. **32**, p. 437. 1902; M. v. Unruh, Inaug.-Diss. Halle 1901; A. Stock u. W. Siebert, Chem. Ber. **37**, p. 4572. 1904; **38**, p. 966. 1905.

2) A. Bettendorf u. A. Wüllner, Pogg. Ann. **133**, p. 293. 1868.

3) F. Neumann (Pogg. Ann. **126**, p. 123. 1865) fand den von mir bestätigten Wert 0,0822 für metallisches Arsen.

Ende des kalten Teiles setzte sich etwas Arsentrioxyd (As_2O_3) ab. Daran schloß sich eine schwarze Kruste von amorphem Arsen (Spiegel), schließlich zunächst der Flamme an den heißesten Stellen eine Schicht glänzender grauer Kristalle. Das so erhaltene schwarze Arsen schien unter dem Mikroskop bei 30facher Vergrößerung zum Teil aus kristallinen Aggregaten zu bestehen. Ich glaubte perlschnurartige Gebilde und Partikelchen mit regelmäßigen Kanten zu bemerken. Es wurde nicht weiter festgestellt, ob dieses Bettendorf-Wüllnersche Präparat nur aus schwarzem Arsen bestand, oder ob es auch die graue Modifikation und Arsentrioxyd enthielt. Das letztere scheint der Fall zu sein; denn ich erhielt für die spezifische Wärme dieses Präparates als Mittel aus zwei Versuchen einen Wert ($\bar{C}_{0-100} = 0,0927$), der ganz erheblich höher ist als der des grauen Arsens, was eventuell durch die höhere spezifische Wärme beigemengten Arsentrioxyds zu erklären wäre. Es ist überhaupt wohl kaum möglich, auf dem Wege des Sublimierens im evakuierten Rohre ein vollkommen sauerstoffreies Präparat zu erhalten, da es selbst bei der stärksten Luftverdünnung nicht gelingen wird, den Sauerstoff vollständig aus dem Rohre zu entfernen und die Oxydation, wohl ähnlich wie beim Phosphor und anderen Substanzen, mit der Verminderung des Sauerstoffdruckes sogar schneller verläuft.¹⁾

Um reines schwarzes Arsen zu erhalten, glaubte ich das gelbe Arsen, wie es sich aus einer von Erdmann und Unruh²⁾ hergestellten Arsen-Schwefelkohlenstofflösung ausscheidet, benutzen zu können: Die Lösung wurde durch Abdestillieren des Schwefelkohlenstoffs konzentriert und das ausgeschiedene gelbe Arsen, das sich momentan am Lichte in schwarzes umwandelte, in einem Bade 30 Min. lang auf 160° erwärmt, um den anhaftenden Schwefelkohlenstoff zu entfernen. Es gelang jedoch nicht, den Geruch nach Schwefelstoff ganz zum Verschwinden zu bringen. Die Substanz war jedenfalls durch mitgerissenes Lösungsmittel stark verunreinigt, wie auch die gelbbraune Farbe erkennen ließ. Ob diese starke Adsorption von Schwefelkohlenstoff darin ihren Grund hatte, daß der

1) A. F. Holleman, Lehrb. d. anorg. Chem. p. 188. 1900 (Leipzig, Veit & Co.).

2) H. Erdmann u. M. v. Unruh, l. c.

Schwefelkohlenstoff nicht ganz rein war, oder ob es ein Nachteil der ganzen Methode¹⁾ ist, wurde nicht weiter untersucht.

Die Methode zur Darstellung des reinen schwarzen Arsens wurde schließlich dahin abgeändert, daß der Arsendampf im Kohlensäurestrom direkt in Alkohol von -15° geleitet wurde.²⁾ Im Alkohol setzte sich eine anfangs gelbe, am Lichte sofort schwarz werdende flockige Masse ab. Kruste und Flocken wurden gesammelt, bei 100° getrocknet und vor der Untersuchung nochmals auf etwa 250° erhitzt. Da Arsentrioxyd in Alkohol ein wenig löslich ist, diente der abkühlende Alkohol gleichzeitig zur Entfernung etwa doch noch vorhandenen Arsentrioxys. Das so erhaltene Präparat ist wohl als reines schwarzes Arsen anzusehen.

2. Schwefel.

Nach den neuesten Arbeiten³⁾ über die allotropen Modifikationen des festen *Schwefels* gibt es acht kristallisierte und zwei amorphe Formen. Von den *kristallisierten*, die u. a. genauer von R. Brauns⁴⁾ studiert worden sind, eignen sich zur Bestimmung von spezifischer Wärme und spezifischem Gewicht nur die gewöhnliche *rhombische* und die Mitscherlichsche *monokline* Form. Die beiden *amorphen* Modifikationen sind: 1.) die in Schwefelkohlenstoff *lösliche*, die bei gewöhnlicher Temperatur als unterkühlter Schmelzfluß des kristallisierten Schwefels anzusehen ist (vgl. auch p. 85); 2.) die in Schwefelkohlenstoff *unlösliche*, die sich als chemisch Isomeres etwa durch Dissoziation im Schmelzflusse bildet⁵⁾ und sich auch bei niedriger Temperatur längere Zeit hält.

1) Vgl. die entsprechende Bemerkung zum roten Phosphor auf p. 89.

2) Das Nähere vgl. in meiner Dissertation p. 87.

3) Vgl. W. Ostwald, Allg. Chem. II. 2. p. 450ff.; C. Doelter, Phys.-Chem. Mineralogie p. 31. 1905.

4) R. Brauns, Neues Jahrb. f. Mineral., 13. Beilbd. p. 39. 1898.

5) K. Schaum, Ann. d. Chem. 300. p. 208. 1898; 308. p. 18. 1899; die Arten der Isomerie, Habilitationschr. p. 52. Marburg 1897; F. W. Küster, Zeitschr. f. anorg. Chem. 18. p. 365. 1898; F. Hoffmann u. R. Rothe, Zeitschr. f. Instrumentenk. 25. p. 273. 1905; Zeitschr. f. phys. Chem. 55. p. 113. 1906; A. Smith u. W. B. Holmes, Chem. Ber. 35. p. 2992. 1902; Zeitschr. f. phys. Chem. 42. p. 469. 1903; 52. p. 602. 1905; 54. p. 257. 1906; Beibl. 29. p. 921. 1905. Zwischen den Arbeiten über den flüssigen Schwefel von Schaum, Küster u. a. einerseits und denen von Smith u. Holmes andererseits bestehen Widersprüche, die bis jetzt noch nicht aufgeklärt sind.

Für die *rhombische* Form sind bereits umfangreiche Untersuchungen der spezifischen Wärme von anderen Beobachtern unternommen worden, die auch die Temperaturabhängigkeit innerhalb des Beständigkeitsgebietes dieser Modifikation gut erkennen lassen:

Temperatur	Spez. Wärme	Beobachter
-192 bis +14	0,135	C. Forch u. P. Nordmeyer, Ann. d. Phys. 20. p. 423. 1906.
-188 „ +18	0,137	J. Dewar, Proc. Roy. Soc. 76. p. 332. 1905.
+ 17 „ +45	0,163	H. Kopp, Lieb. Ann. Suppl. 3. p. 1, 289. 1864/65.
0 „ 100	0,1712	R. Bunsen, Pogg. Ann. 141. p. 1. 1870.
15 „ 98	0,1762	V. Regnault, Pogg. Ann. 51. p. 225. 1840; 62. p. 50. 1844.
14 „ 99	0,1776	

Ich beschränkte mich daher zur Kontrolle dieser früher gefundenen Werte auf einige wenige Beobachtungen (Resultate vgl. p. 93, Tab. IV) an „sulfur cryst. puriss.“ (von Kahlbaum in Berlin), aus Schwefelkohlenstoff kristallisiert. Die Kristalle verbrannten auf dem Platinblech ohne Rückstand und waren, wie die betreffenden Reaktionen lehrten, frei von Arsen und Schwefelsäure.

Anders verhält es sich mit den bisher bestimmten Werten für die spezifische Wärme des *monoklinen* Schwefels:

Temp.	Spez. Wärme	Beobachter
15 bis 97	0,1844	V. Regnault, Pogg. Ann. 51. p. 225. 1840; 62. p. 50. 1844.
15 „ 98	0,20259	
	0,20245	Thoulet u. Lagarde, C. R. 94. p. 1512. 1882.

Sie stammen aus einer Zeit, in der man noch nicht wußte, daß der durch Erstarren von geschmolzenem Schwefel erhaltene monokline Schwefel beträchtliche Mengen von in CS_2 unlöslichem, amorphem Schwefel enthalten kann und zwar in einem Mengenverhältnisse, das von der Höhe und Dauer der Erhitzung des Schmelzflusses abhängt.¹⁾ Es läßt sich hinterher

1) Vgl. besonders die zitierten Arbeiten von Küster und Schaum.

nicht mehr feststellen, wieviel von diesem amorphen Schwefel in den Präparaten von Regnault und Thoulet u. Lagarde enthalten war. Es kann auch sein, daß sie zum Teil aus rhombischem Schwefel bestanden; denn die Umwandlung des monoklinen Schwefels in den rhombischen geht unter Umständen sehr rasch vor sich. Da die spezifische Wärme des in CS_2 unlöslichen amorphen Schwefels größer ist als die der kristallisierten Formen (vgl. p. 91, Tab. I; p. 93, Tab. IV u. Tab. V), so ist es möglich, daß die bisherigen Werte für die spezifische Wärme des „monoklinen“ Schwefels nicht etwa deshalb größer sind als die für rhombischen, weil die Präparate wirklich aus monoklinem Schwefel bestanden, sondern weil sie wesentliche Mengen des amorphen unlöslichen Schwefels enthielten. Da sich auch dieser mit der Zeit in den rhombischen umwandelt — besonders schnell, wenn er mit ihm in Berührung ist —, so ist die Abnahme der spezifischen Wärme der Regnaultschen Präparate mit der Zeit auch so erklärlich. Immerhin erhält man den Eindruck, als ob der von Regnault zuletzt gefundene Wert: $\bar{C}_{15-97} = 0,1844$ noch am ersten den Anspruch machen könnte, wirklich für monoklinen Schwefel zu gelten.

Für den monoklinen Schwefel mußte daher eine neue Versuchsreihe aufgestellt werden, indem bei der Herstellung der Präparate die Entstehung amorphen unlöslichen Schwefels möglichst zu vermeiden war. Außerdem war auf eine etwaige Umwandlung besonderes Augenmerk zu richten.

Zunächst wurde die Darstellung monokliner Schwefelkristalle nach der Methode von Marchand und Scheerer¹⁾ versucht. Doch gelang es nicht, die so erhaltenen großen Kristalle vor alsbaldiger Umwandlung zu bewahren. Sie wurden schon nach ganz kurzer Zeit undurchsichtig und hellgelb, bestanden dann also aus rhombischem Schwefel und konnten zur Untersuchung nicht benutzt werden.

Nach mannigfaltigen Abänderungsversuchen schien mir schließlich die folgende Methode am zweckmäßigsten zu sein: In einer Glasröhre (enges Reagenzrohr) wurde sulfur cryst.

1) R. F. Marchand u. Th. Scheerer, Journ. f. pr. Chem. 24. p. 129. 1841.

puriss. (von Kahlbaum) geschmolzen, indem das Röhrchen in ein Ölbad gehängt wurde, das nur so lange auf etwas über 120° (Schmelzpunkt des monoklinen Schwefels) erwärmt wurde, bis der Schwefel gerade eben vollständig geschmolzen war. Die Erwärmung durfte dabei nicht zu hoch getrieben und nicht zu lange ausgedehnt werden, weil sonst Gefahr vorhanden war, daß sich wesentliche Mengen unlöslichen amorphen Schwefels bildeten. Das Glasröhrchen mit dem Schwefel erkaltete langsam in dem mit Tüchern dicht umwickelten Bade und wurde erst nach mehreren Stunden herausgenommen. Das Präparat war stark durchscheinend, wie ein Konglomerat vollständig durchsichtiger Kristalle, dunkler gelb als rhombische Kristalle, mit einer Nuance ins grünliche. Bei ruhiger Aufbewahrung setzte die Umwandlung in rhombischen Schwefel erst nach längerer Zeit ein, und zwar begann sie von einzelnen Punkten aus, was deutlich an der helleren Färbung und Trübung der betreffenden Stellen zu erkennen war. Da der monokline Schwefel bei der Bestimmung seiner spezifischen Wärme notwendigen Temperaturveränderungen und Erschütterungen ausgesetzt war, konnte seine Beständigkeit natürlich nicht so groß sein, als wenn er bei gleichmäßiger Temperatur ruhig aufbewahrt wurde. Von den zahlreichen Bestimmungen (etwa 12) waren daher nur diejenigen brauchbar, bei denen eine genaue Prüfung vor und nach dem Versuche ergab, daß keine Umwandlung eingetreten war (Resultate vgl. p. 93, Tab. V). Bei einigen Versuchen wandelte sich der monokline Schwefel schon im Erwärmungssofen um; der gefundene Wert für die spezifische Wärme war dann annähernd gleich dem für rhombischen Schwefel. Dies trat bei Erwärmung bis auf 90° regelmäßig ein. Andere Versuche ergaben sehr hohe Werte, was darauf schließen ließ, daß die Umwandlung, die mit Wärmeentwicklung verbunden ist, zum Teil im Kalorimeter selbst stattfand. Es liegt die Vermutung nahe, daß die größere Beständigkeit monokliner Schwefelpräparate früherer Beobachter mit dem Gehalt an unlöslichem amorphen Schwefel in direktem Zusammenhange steht. Meine Präparate lösten sich, bis auf ein paar verschwindend kleine Flöckchen, vollständig in Schwefelkohlenstoff.

Da eine zuverlässige Bestimmung der spezifischen Wärme

und Dichte der beiden *amorphen* Schwefelmodifikationen meines Wissens nicht existiert¹⁾, so habe ich diese Aufgaben in Angriff genommen, noch bevor ich die kristallisierten Formen untersuchte.

Der amorphe Schwefel steht bei gewöhnlicher Temperatur in Gestalt des sogenannten *plastischen Schwefels* (der jedoch nicht als chemisches Individuum anzusehen ist, sondern beide amorphe Formen gemischt enthält) zur Verfügung. Man stellt ihn dar durch plötzliche, starke Abkühlung von über 170° erhitztem flüssigen Schwefel. Ostwald²⁾ sieht den plastischen Schwefel als eine Flüssigkeit mit sehr großer innerer Reibung an. Für amorphe feste Körper läßt sich kein bestimmter Schmelzpunkt beobachten, sondern es besteht ein stetiger Übergang von dem einen Aggregatzustand in den anderen. Bei der Erwärmung nimmt die innere Reibung beständig ab, und ebenso ändern sich alle anderen Eigenschaften stetig, bis eine Flüssigkeit mit ihren charakteristischen Eigenschaften entstanden ist.

Nun sind aber im plastischen Schwefel noch die beiden Grundformen des *löslichen* und *unlöslichen* nebeneinander vertreten, und zwar in einem Verhältnisse, das abhängig ist von der Höhe und Dauer der Erhitzung des flüssigen Schwefels und von der Art der Abkühlung. Je höher und länger man den flüssigen Schwefel erhitzt, und je plötzlicher und stärker man ihn abkühlt, desto größer wird der Gehalt des plastischen Schwefels an unlöslichem. Um möglichst immer dieselbe Zusammensetzung zu bekommen, habe ich mich bemüht, den plastischen Schwefel stets auf dieselbe Art darzustellen. Reiner Schwefel³⁾ wurde eine Stunde lang in einer Retorte mit weitem, kurzem Halse am Sieden erhalten und dann die Flamme so reguliert, daß die zähflüssige, dunkelbraune Masse in Gestalt eines dünnen Fadens von etwa 0,5 mm Durchmesser ausfloß. Zur Abkühlung diente Alkohol, der durch eine Kältemischung

1) Deville (Compt. rend. 25. p. 887. 1848) findet für das spezifische Gewicht des *weichen* Schwefels 1,92; doch fehlen genauere Angaben über die Herstellung und Beschaffenheit seiner Präparate. Er nennt nur die Farbe: gelb und rot ins violette.

2) W. Ostwald, Grundl. d. anorg. Chem. p. 264. 1900; Lehrb. d. allg. Chem. 2. 2. p. 450.

3) Sulfur depuratum (von Kahlbaum), Schwefelblumen frei von Arsen und Schwefelsäure.

auf -15° gehalten wurde. Obwohl Alkohol den Schwefel ein wenig zu lösen vermag, wurde er doch zum Abkühlen benutzt, weil sich bei Vorversuchen mit Wasser der Übelstand bemerkbar machte, daß der flüssige Schwefel nur schlecht untersank und so die Fäden des plastischen Schwefels ungleichmäßig wurden. Auch kann man mit Alkohol tiefere Temperaturen anwenden als mit Wasser. Wenn auch bei der Abkühlung im Alkohol etwas Schwefel in Lösung ging, so war das für meine Untersuchungen nicht von Bedeutung, solange nur die zu verschiedenen Zeiten dargestellten Präparate plastischen Schwefels identisch waren. Die Fäden wurden 20 Min. lang in einem Luftstrom von 30° getrocknet und dann sofort zu den Bestimmungen verwandt. Sie waren vollkommen durchsichtig, bernsteingelb und ließen sich jederzeit gut auf ihre Elastizität und Durchsichtigkeit prüfen. In dem Grade, wie die Fäden mit der Zeit undurchsichtig und spröder wurden, nahmen sie die hellgelbe Farbe des gewöhnlichen Schwefels an.

Um sicher zu sein, daß der plastische Schwefel während der Dauer der Versuche sich nicht umwandle, wurde er auf seine Beständigkeit bei verschiedenen Temperaturen genau untersucht. Je gleichmäßiger und tiefer man die Temperatur hält, desto länger bleibt der plastische Schwefel unverändert. Bewahrt man ihn bei einer gleichmäßigen Temperatur von $10-15^{\circ}$ auf, so ist er nach 24 Stunden fast unverändert, durchsichtig, elastisch, weich, bernsteingelb. Nach 48 Stunden ist er noch durchscheinend, etwas weich und heller gelb, nach 3 Tagen fast erhärtet. Der zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes verwendete plastische Schwefel war solcher, der nicht über 15° erwärmt war; er wurde sofort nach seiner Herstellung untersucht (Resultate p. 95). Bei höherer Temperatur geht die Umwandlung schneller von statten. 30 Minuten in siedendem Methylalkohol auf 66° erwärmt, zeigt sich der plastische Schwefel bereits etwas verändert. Er ist nur noch durchscheinend, nicht mehr ganz elastisch und heller gelb, nach 24 Stunden fast hart. 30 Minuten auf 50° erwärmt, ist er fast unverändert, nach 20 Stunden vollkommen durchscheinend, weich und hellbernsteingelb. Zur Bestimmung der spezifischen Wärme mit dem Kiskalorimeter (Resultate p. 91, Tab. I) wurde der plastische Schwefel höchstens 30 Minuten

lang auf etwa 48° erwärmt, sodann 45 Minuten lang im Kalorimeter auf 0° abgekühlt. Er war nach den Versuchen stets noch vollkommen weich und elastisch, stark durchscheinend und hellbernsteingelb, nach 20 Stunden noch unverändert.

Zur Feststellung seines Gehaltes an unlöslichem Schwefel wurde der plastische Schwefel eine Stunde lang mit siedendem Schwefelkohlenstoff behandelt, mehrfach mit reinem Schwefelkohlenstoff (von Kahlbaum) ausgeschüttelt und in einem Luftstrom so lange auf 50° erwärmt, bis jeder Geruch verschwunden war. Der so erhaltene unlösliche Schwefel hatte noch die Gestalt der Fäden des plastischen Schwefels, war aber äußerst porös, spröde undurchsichtig und hellgelb. Er ließ sich sehr leicht pulvern und erwies sich unter dem Mikroskop als eine sehr fein verteilte Masse ohne jeden kristallinen Charakter. Die Versuche über Löslichkeit ergaben als Mittel aus vier gut übereinstimmenden Einzelwerten: 49,4 Proz. unlöslichen Schwefel im plastischen.

Kennt man so den Gehalt des plastischen Schwefels an unlöslichem, so kann man aus den experimentell bestimmten Daten für plastischen und unlöslichen Schwefel nach der Mischungsregel die Daten für den löslichen amorphen Schwefel bestimmen (p. 90 u. 95). Dazu muß man die Annahme machen, daß die im plastischen Schwefel vorhandenen beiden Modifikationen gleichmäßig gemischt sind und sich in ihren Eigenschaften nicht wesentlich beeinflussen.

Man kann sich vorstellen, daß der plastische Schwefel eine Lösung der beiden amorphen Schwefelmodifikationen in einander ist. Der Ostwaldschen Anschauung über die Kontinuität des amorphen und flüssigen Zustandes würden folgende Erwägungen entsprechen: Die lösliche amorphe Form ist wohl mit der dünnflüssigen Form des flüssigen Schwefels, wie sie bei 120° in der Schmelze überwiegt, identisch. Dafür spricht zunächst die Tatsache, daß der durch plötzliche Abkühlung solches dünnflüssigen Schwefels erhaltene amorphe Schwefel vollständig in Schwefelkohlenstoff löslich ist. Ferner hat es sich gezeigt, daß die spezifischen Wärmen des löslichen amorphen und dünnflüssigen Schwefels annähernd gleich sind.¹⁾

1) Vgl. p. 90.

Die unlösliche amorphe Form wäre alsdann mit dem bei 170° in der Schmelze überwiegenden dickflüssigen Schwefel zu identifizieren. Dafür spricht wieder, daß der Gehalt des plastischen Schwefels an unlöslichem um so größer ist, je länger und höher man ihn erhitzt und je plötzlicher man ihn abkühlt, d. h. je weniger Schwefel bei der Abkühlung in die dünnflüssige Form übergehen kann. Bei gewöhnlicher Temperatur haben diese beiden flüssigen Schwefelmodifikationen den Charakter fester amorpher Körper. Ihre Beständigkeit ist allerdings sehr gering. Die lösliche Form wandelt sich schnell in die rhombische Form um, wird mikrokristallin und undurchsichtig. Die unlösliche Form geht ebenfalls, jedoch, besonders wenn sie frei von der löslichen ist, viel langsamer, in den rhombischen Schwefel über.¹⁾ Das beweist auch ein von mir angestellter Versuch: Nach 20 Tagen enthielt der gealterte „unlösliche“ Schwefel nur noch 89,8 Proz. wirklich unlöslichen Schwefel.

Außer diesen beiden amorphen Schwefelmodifikationen erhält man auch auf nassem Wege löslichen und unlöslichen amorphen Schwefel. Der aus Polysulfiden und Thiosulfat mit Säuren gefällte Schwefel enthält jedoch zweifellos als in den Niederschlag mitgerissene Bestandteile soviel Verunreinigungen, daß die Untersuchung solcher Präparate auf spezifische Wärme und spezifisches Gewicht nicht viel Wert haben würde, zumal es in unserem Zusammenhange auf kleine Differenzen wesentlich ankommt. Der von Engel²⁾ aus Thiosulfat, Salzsäure und Chloroform dargestellte Schwefel ist kristallisiert (spez. Gew. 2,135), ebenso der aus Wasserstoffpersulfid und Äther dargestellte (spez. Gew. 2,045), wie ihn Maquenne³⁾ beschreibt.

3. Zinn.

Nach den bisherigen Untersuchungen über die beiden bekannten Zinnmodifikationen, das *weiße* und das *graue*, ist auch bei diesem Element, gerade wie nach den alten Angaben beim Arsen, die Richarzsche Regel anscheinend nicht erfüllt. Daß die weiße Form die dichtere ist, steht durch mehrere Be-

1) W. Ostwald, Lehrbuch der allgem. Chemie II. 2. p. 457; K. Schaum, Ann. d. Chemie, 308. p. 28. 1899.

2) F. Engel, Compt. rend. 112. p. 866. 1891.

3) Maquenne, Compt. rend. 100. p. 1499. 1885.

stimmungen fest und ist auch dadurch ganz augenfällig, daß weißes Zinn bei der Umwandlung in die graue Form auf seiner ursprünglich glatten Oberfläche Hebungen entwickelt und so an Volumen zunimmt. Für die spezifische Wärme zwischen 0° und 100° fand jedoch Bunsen¹⁾:

$$\begin{aligned}\bar{C}_{0-100} &= 0,0559 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{weiß} \\ &= 0,0545 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{grau}\end{aligned}$$

Der Wert für weißes Zinn ist von anderen Beobachtern und mir bestätigt worden. Für graues Zinn habe ich neue Bestimmungen gemacht und ein wesentlich anderes Resultat als Bunsen gefunden: Auch beim Zinn hat die spezifisch leichtere, graue Modifikation eine größere spezifische Wärme als die dichtere, weiße Form.

Das graue Zinn ist nur unterhalb $+20^{\circ}$ beständig und wandelt sich bei Überschreitung dieser Temperatur leicht in das weiße um. Der Bunsensche Wert für die spezifische Wärme ist daher unzuverlässig; denn bei der Erwärmung bis auf 100° ist der Umwandlungspunkt wesentlich überschritten worden. Die spezifische Wärme, die Bunsen für dieses „allotrope“ Zinn fand, kommt der für weißes Zinn auch sehr nahe.

Der umgekehrte Prozeß, die Verwandlung des weißen in das graue Zinn unterhalb 20° , geht nicht so leicht von statten und bedarf meist längerer Zeit. Das Optimum der Umwandlung ist -48° .

Der Güte von Hrn. Prof. K. Schaum verdanke ich das zu meinen Versuchen benutzte graue Zinn. Es war reines Zinn, hellgrau, glanzlos und von stänglichkörniger Beschaffenheit. Bei einer ersten Versuchsreihe beschränkte ich mich darauf, daß Präparat mehrere Tage lang auf -20° abzukühlen, und bestimmte dann seine spezifische Wärme zwischen 0° und 41° ; denn ich nahm auf Grund einiger Angaben der Literatur an, daß bei einer nicht allzu starken Überschreitung des Umwandlungspunktes die Beständigkeit der grauen Modifikation nicht sehr gefährdet sei, zumal wenn sie von Spuren weißen Zinnes frei war. Ich fand jedoch für die spezifische Wärme als Mittel aus vier Versuchen einen Wert ($\bar{C}_{0-41} = 0,0528$),

1) R. Bunsen, Pogg. Ann. 141. p. 27. 1870.

der noch kleiner ist als der Bunsensche, sich ihm aber **gut** anreicht, wenn man die verschiedenen Temperaturbereiche **be-**achtet; denn die spezifische Wärme wächst im allgemeinen mit steigender Temperatur. Das Ergebnis dieser ersten **Ver-**suche ist auch geradeso wie Bunsens Resultat zu bewerten.

Um ganz sicher zu sein, daß das untersuchte graue Zinn kein weißes enthalte, unterzog ich es vor einer zweiten **Ver-**suchsreihe einer längeren Vorbehandlung. Das Präparat wurde mehrere Stunden lang zuerst in einer CaCl_2 -Eismischung auf -35° , sodann in einer CO_2 -Äthermischung auf -77° abgekühlt. Nachdem es sich darauf 2 Stunden in flüssiger Luft (-188°) befunden hatte, bewahrte ich es schließlich fast 8 Monate lang im Salzwasser einer Ammoniakemaschine (-6°) auf. Nach dieser Behandlung war das Zinn schwarzgrau, matt (beim Zerreiben mit dem Messer schwarzglänzend wie Graphit) und von körniger Beschaffenheit. Zur Bestimmung seiner spezifischen Wärme erwärmte ich es nicht über den Umwandlungspunkt und fand den auf p. 94, Tab. VI mitgeteilten Wert, der sich der Richarzschen Regel fügt.

Zur Kontrolle wurde noch die spezifische Wärme des durch Umschmelzen aus dem grauen Zinn entstandenen *weißen* Zinnes bestimmt und in Übereinstimmung mit früheren Beobachtern befunden (p. 94, Tab. VI).

4. Phosphor.

Die wichtigsten *Phosphormodifikationen*, der *gelbe* (auch *weiße* genannt) und der *rote*, sind nach den Anschauungen von Schaum¹⁾ u. a. als chemisch isomer anzusehen; der rote Phosphor ist ein Polymerisationsprodukt des gelben, wie Schenck²⁾ nachgewiesen hat. Der rote Phosphor des Handels ist nach Schenck und Buck³⁾ ein Gemenge von amorphem roten und kristallinischem roten Phosphor. Für die spezifische Wärme des gelben und des roten Handelsphosphors fand ich in der Literatur die folgenden Daten:

1) K. Schaum, Die Arten der Isomerie, Habil.-Schr. Marburg 1897. p. 54; Lieb. Ann. 300. p. 221. 1898.

2) R. Schenck, Ber. d. d. chem. Ges. 35. p. 351. 1902; 36. p. 979, 4202. 1903.

3) E. Buck, Inaug.-Diss. Marburg 1904. p. 49.

Modifikation	Temperatur	Spez. Wärme	Beobachter
gelb, fest	- 78 bis + 10	0,16994	V. Regnault, Pogg. Ann. 77. p. 99. 1849.
	- 21 „ + 7	0,1788	C. C. Person, Pogg. Ann. 74. p. 509. 1849.
	+ 10 „ 30	0,1887	V. Regnault, l. c.
	13 „ 36	0,202	{ H. Kopp, Lieb. Ann., Suppl. 3. p. 1, 289. 1864/65.
	26 „ 50	0,200	E. Desains, Pogg. Ann. 70. p. 315. 1847.
„ flüssig	44 „ 51	0,2045	C. C. Person, l. c.
rot	15 „ 98	0,16981	V. Regnault, Pogg. Ann. 89. p. 495. 1853.

Für den gelben Phosphor ist auch die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme gut erkennbar. Für den roten schienen jedoch einige neue Bestimmungen wünschenswert (Resultate p. 94, Tab. VII). Um das Präparat (feinpulveriger roter Phosphor von Kahlbaum in Berlin) genau zu charakterisieren, mußte auch sein spezifisches Gewicht neu bestimmt werden, da die Eigenschaften des roten Handelsphosphors mit der Temperatur, bei der er dargestellt worden ist, variieren.¹⁾ Reinen amorphen roten und reinen kristallinischen roten Phosphor zu untersuchen, mußte ich mir versagen, da die Trennung des Handelsphosphors in seine Bestandteile nicht gelingt und der von Schenck und Buck dargestellte hellrote Phosphor, ähnlich wie das aus Schwefelkohlenstofflösung abgeschiedene gelbe Arsen, soviel vom Lösungsmittel (Bromphosphor) fest adsorbiert enthält, daß diese Verunreinigung die spezifische Wärme in nicht absehbarem Maße beeinflussen würde.

c) Resultate.

1. Spezifische Wärmen.

Im folgenden sind die Resultate zusammengestellt, die ich bei den Versuchen mit dem *Eiskalorimeter* erhielt.

Die zu untersuchende Substanz war eingeschlossen in ein zylindrisches Gefäß aus *Platin* (bei einigen Versuchen aus *Glas*), das an einer Platindrahtschlinge aufgehängt werden konnte. Bei den Versuchen mit Arsen und amorphem Schwefel (Tab. I)

1) Troost u. Hautefeuille, Ann. chim. phys. 52. p. 153. 1874.

nahm ich als spezifische Wärme des Platins den durch Vorversuche von mir gefundenen Wert $\bar{C}_{0-100} = 0,0324$, (vgl. p. 74).

In den folgenden Tab. I—VII bedeutet:

- T = die Anfangstemperatur des untersuchten Körpers,
 m = sein Gewicht in Gramm,
 m_{Pt} = das Gewicht des als Hilfskörper verwendeten Platins,
 m_{Glas} = das Gewicht des als Hilfskörper verwendeten Glases,
 G = die eingesogene Quecksilbermenge in Gramm,
 $G_{\text{corr.}}$ = die mittlere Gangkorrektur,
 $E_{\text{corr.}}$ = die Erwärmungsfehlerkorrektur,
 $\bar{C}$ = die mittlere spezifische Wärme zwischen der Anfangstemperatur T und 0° .

Die Einzelwerte der Tab. I zeigen zum Teil starke Abweichungen untereinander, was sich wohl dadurch erklären läßt, daß die Zusammensetzung der Präparate trotz aller Sorgfalt bei der Darstellung immerhin noch etwas schwankend war. Die Übereinstimmung der späteren Resultate untereinander ist besser.

Um die spezifische Wärme des *löslichen amorphen Schwefels* aus den Resultaten der Tab. I zu erhalten, verfährt man folgendermaßen. Ist:

$C_{\text{pt}} = 0,2196$ die spez. Wärme des plast. S,

$C_u = 0,1902$ „ „ „ „ unlösl. S

und der Gehalt des plastischen Schwefels an unlöslichem 49,4 Proz., so findet man die spezifische Wärme $\bar{C}$ des löslichen Schwefels aus der Gleichung:

$$100 \cdot \bar{C}_{\text{pt}} = 49,4 \cdot \bar{C}_u + 50,6 \cdot \bar{C}$$

zu:

$$\bar{C}_{0-50} = 0,2483.$$

Dieser Wert kommt der spezifischen Wärme des leichtflüssigen Schwefels nahe, wie sie von Classen¹⁾ bestimmt worden ist ($\bar{C}_{116-136} = 0,234$ bis $0,241$).

Für die weiteren Versuche kam es mir auch auf die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme an. Ich untersuchte daher das als Hilfskörper benutzte *Platin* und *Glas* genauer auf seine spezifische Wärme innerhalb der in Betracht kommenden Temperaturintervalle. Für monoklinen Schwefel wurde eine andere Glassorte (Tab. IIIa) verwendet als für Zinn (Tab. IIIb).

1) J. Classen, Jahrb. d. Hamb. wiss. Anst. 6. p. 115. 1888.

Tabelle I.
Arsen und amorpher Schwefel (Hilfskörper Platin).

Substanz	Nr.	T	m	m _{Pl}	G	G _{corr.}	E _{corr.}	C̄
Arsen, grau	1	99,40	5,2552	4,3316	0,8754	+0,0004	-0,0062	0,08100
	2	98,59	3,9378	4,3307	0,7200	-0,0080	-0,0061	0,08161
	3	98,14	4,6054	4,3307	0,7867	-0,0053	0	0,08141
	4	99,30	3,2620	4,3307	0,6297	+0,0205	-0,0070	0,08547
	5	99,22	5,1981	4,3307	0,8581	+0,0107	-0,0052	0,08134
	Mittel: T = 98,93						Mittel: C̄ ₀₋₁₀₀ = 0,0822	
" schwarz	1	99,80	2,1071	4,3307	0,5208	-0,0133	-0,0011	0,08923
	2	99,08	4,5438	4,3307	0,8154	+0,0162	-0,0070	0,08762
	3	99,22	3,6111	4,3307	0,6849	-0,0026	-0,0052	0,08344
	4	99,88	4,1989	4,3307	0,7712	+0,0103	-0,0115	0,08539
	5	99,80	4,1173	4,3307	0,7509	+0,0156	-0,0115	0,08478
	Mittel: T = 99,56						Mittel: C̄ ₀₋₁₀₀ = 0,0861	
Schwefel, plastisch	1	43,08	4,2284	4,3316	0,6981	+0,0086	0	0,21784
	2	47,57	4,3055	4,3316	0,7821	+0,0117	0	0,21819
	3	44,24	3,9971	4,3316	0,6380	+0,0458	0	0,21509
	4	43,32	3,7710	4,3313	0,6710	-0,0057	-0,0040	0,22445
	5	47,81	4,6092	4,3313	0,8655	+0,0010	-0,0042	0,22267
	Mittel: T = 45,20						Mittel: C̄ ₀₋₄₅ = 0,2196	
" amorph unlöslich	1	54,49	2,2309	4,3316	0,4808	+0,0156	-0,0162	0,19271
	2	50,48	2,8074	4,3316	0,5400	+0,0090	-0,0255	0,18904
	3	53,33	2,5752	4,3316	0,4239	+0,1081	-0,0162	0,18853
	4	55,62	2,1703	4,3316	0,4321	+0,0495	-0,0162	0,18481
	5	53,37	2,3072	4,3316	0,4468	+0,0420	0	0,19603
	Mittel: T = 53,46						Mittel: C̄ ₀₋₅₃ = 0,1902	

Tabelle II.

Platin.

Nr.	T	m	G	$G_{\text{corr.}}$	$\bar{C}$
1	32,41	9,4757	0,1443	+0,0075	0,03198
2	32,09	9,4757	0,1468	-0,0022	0,03077
3	30,69	9,4757	0,1512	-0,0092	0,03159
Mittel: $T = 31,73$			Mittel: $\bar{C}_{0-32} = 0,03145$		
4	53,86	9,4757	0,2465	+0,0032	0,03166
5	54,18	9,4757	0,2460	+0,0068	0,03186
6	54,71	9,4757	0,2513	+0,0045	0,03192
Mittel: $T = 54,25$			Mittel: $\bar{C}_{0-54} = 0,03181$		
7	94,74	9,4757	0,4363	+0,0069	0,03195
8	97,45	9,4757	0,4511	+0,0077	0,03214
9	99,88	9,4757	0,4647	+0,0037	0,03202
Mittel: $T = 97,36$			Mittel: $\bar{C}_{0-97} = 0,03204$		
10	134,54	7,7852	0,5148	+0,0054	0,03213
11	133,08	7,7852	0,5135	+0,0018	0,03218
12	132,68	7,7852	0,5166	-0,0031	0,03216
Mittel: $T = 133,43$			Mittel: $\bar{C}_{0-133} = 0,03216$		
13	162,28	7,7852	0,6268	+0,0035	0,03228
14	161,00	7,7852	0,6273	-0,0048	0,03213
15	163,47	7,7852	0,6309	+0,0038	0,03227
Mittel: $T = 162,25$			Mittel: $\bar{C}_{0-162} = 0,03223$		
			$\bar{C}_{0-199} = 0,03230$ (extrapoliert)		

Tabelle III.

Glas (Hilfskörper Platin).

Glas- sorte	Nr.	T	m	m_{Pt}	G	$G_{\text{corr.}}$	$\bar{C}$
a	1	31,74	7,4922	0,4225	0,6790	-0,0037	$\bar{C}_{0-32} = 0,1819$
	2	52,99	6,2685	0,2352	0,9714	-0,0008	$\bar{C}_{0-53} = 0,1878$
	3	93,60	6,2685	0,2352	1,7600	+0,0340	$\bar{C}_{0-94} = 0,1966$
b	1	18,25	10,5009	0,2247	0,5568	-0,0074	0,1848
	2	18,24	10,5009	0,2247	0,5438	-0,0011	0,1827
	3	18,05	10,8329	0,2247	0,5415	+0,0143	0,1833
Mittel:			Mittel:				
$T = 18,18$			$\bar{C}_{0-18} = 0,1836$				

Tabelle IV.

Rhombischer Schwefel (Hilfskörper Platin).

Nr.	<i>T</i>	<i>m</i>	<i>m</i> _{Pt}	<i>G</i>	<i>G</i> _{corr.}	$\bar{C}$
1	32,04	4,4878	9,4757	0,5296	+0,0002	$\bar{C}_{0-32} = 0,1719$
2	54,20	3,7757	9,4757	0,7920	+0,0070	$\bar{C}_{0-54} = 0,1728$
3	94,77	3,8017	9,4757	1,4128	+0,0071	$\bar{C}_{0-95} = 0,1751$

Die geringen Abweichungen dieser Werte für rhombischen Schwefel von den früher durch andere Beobachter bestimmten (vgl. p. 80) haben zunächst ihren Grund in der Verschiedenheit der Temperaturgebiete. Aber auch die Beschaffenheit der untersuchten Substanzen war verschieden. Kopp hat natürlichen Schwefel untersucht, der beim Verbrennen stets Asche hinterläßt. Bunsens „rhombischer“ Schwefel war alter Stangenschwefel. Regnault hat, wie ich, Schwefelkristalle untersucht, die aus Schwefelkohlenstofflösung gewonnen waren; seine Werte kommen den meinigen auch am nächsten. Daß auch die Verschiedenheit der Methoden ihren Einfluß äußern kann, liegt auf der Hand.

Tabelle V.

Monokliner Schwefel (Hilfskörper Glas *a* und Platin).

Nr.	<i>T</i>	<i>m</i>	<i>m</i> _{Glas}	<i>m</i> _{Pt}	<i>G</i>	<i>G</i> _{corr.}	$\bar{C}$
1	33,08	3,7214	7,4925	0,4222	1,0319	+0,0047	0,1755
2	32,54	4,1624	6,6509	0,4222	0,9869	+0,0026	0,1792

Mittel:

$$T = 32,81$$

Mittel:

$$\bar{C}_{0-33} = 0,1774$$

$$3 \quad 51,68 \quad 3,0786 \quad 5,8698 \quad 0,1809 \quad 1,3180 \quad +0,0120 \quad \bar{C}_{0-52} = 0,1809$$

Die Abweichungen von den Werten der anderen Beobachter (vgl. p. 80) sind aus den auf p. 80 u. 81 dargestellten Gründen nicht zu verwundern und fallen bei der Beurteilung nicht sehr ins Gewicht.

Tabelle VI.

Zinn (Hilfskörper Glas b und Platin).

Substanz	Nr.	T	m	m_{Glas}	m_{Pt}	G	$G_{\text{corr.}}$	$\bar{C}$
Zinn,	1	17,58	18,2769	11,1834	0,2247	0,8319	+0,0228	0,05938
grau	2	18,46	17,0430	11,1834	0,2247	0,8335	+0,0389	0,05852
		Mittel: $T = 18,02$			Mittel: $\bar{C}_{0-18} = 0,05895$			
weiß	1	20,80	10,4388	7,3427	0,2194	0,6197	-0,0023	$\bar{C}_{0-21} = 0,05417$

Tabelle VII.

Roter Phosphor (Hilfskörper Platin).

Nr.	T	m	m_{Pt}	G	$G_{\text{corr.}}$	$\bar{C}$
1	51,48	4,2812	9,4757	0,8765	-0,0135	$\bar{C}_{0-51} = 0,1829$
2	97,65	3,7228	9,4757	1,5567	-0,0129	$\bar{C}_{0-98} = 0,1932$
3	133,58	3,9740	7,7852	2,2758	+0,0024	0,2146
4	133,58	3,5714	7,7852	2,0599	+0,0240	0,2125
5	134,28	4,5363	7,7852	2,5046	-0,0155	0,2092
Mittel: $T = 133,81$				Mittel: $\bar{C}_{0-134} = 0,2121$		
6	165,31	3,2127	7,7852	2,3850	-0,0028	0,2121
7	162,92	3,6806	7,7852	2,5280	+0,0416	0,2091
8	163,89	3,8039	7,7852	2,7958	-0,0094	0,2232
Mittel: $T = 164,04$				Mittel: $\bar{C}_{0-164} = 0,2148$		
9	201,14	3,4962	7,7852	3,1912	-0,0268	0,2192
10	195,65	3,9111	7,7852	3,3795	-0,0164	0,2201
11	200,95	4,0556	7,7852	3,4298	-0,0136	0,2093
Mittel: $T = 199,25$				Mittel: $\bar{C}_{0-199} = 0,2162$		

Die Differenz zwischen dem Regnaultschen Werte ($\bar{C}_{15-98} = 0,1698$) und meinen Resultaten erklärt sich wohl durch die verschiedene Beschaffenheit der untersuchten Substanz. Regnault hat eine feste glasige Masse (von Schrötter) untersucht. Vgl. auch die Bemerkungen auf p. 89.

2. Spezifische Gewichte.

Für einige der auf ihre spezifische Wärme von mir untersuchten Modifikationen machte ich auch Neubestimmungen ihres spezifischen Gewichtes, und zwar für graues und schwarzes Arsen sowie unlöslichen amorphen Schwefel mit dem *Volumenometer*, für plastischen Schwefel und roten Phosphor mit dem *Pyknometer*. Von der Mitteilung der Einzelwerte sehe ich zur Vereinfachung ab und lasse hier die Mittelwerte folgen:

<i>Arsen, grau</i>	5,87	(Mittel aus 4 Versuchen)
„ <i>schwarz</i>	4,78	(„ „ 4 „)
<i>Schwefel, plastisch</i>	1,878	(„ „ 6 „)
„ <i>unlöslich amorph</i>	1,892	(„ „ 6 „)
<i>Phosphor, rot</i>	2,296	(1 Versuch).

Das spezifische Gewicht des *löslichen amorphen Schwefels* wird analog wie seine spezifische Wärme (p. 90) nach der Mischungsregel berechnet. Man findet, bei Annahme von 49,4 Proz. unlöslichem Schwefel im plastischen,

$$1,864$$

als die Dichte des löslichen amorphen Schwefels.

Da sich das spezifische Gewicht seiner Definition nach auf die Volumeneinheit bezieht, müßte man hier eigentlich Volumenprocente nehmen. Wie die Berechnung nach der für Gewichtprocente gültigen komplizierteren Formel¹⁾ ergibt, kommt jedoch bei der Genauigkeit dieses Falles dasselbe Resultat heraus.

3. Allgemeine Zusammenstellung.

Es möge nun eine allgemeine Zusammenstellung der vorliegenden Daten folgen zur Bestätigung der *Regel, daß bei festen Elementen die Modifikation mit dem größeren spezifischen Gewichte die kleinere spezifische Wärme hat*. Die zu den spezifischen Wärmen gehörigen Temperaturen sind mit angegeben, da sich für einige dieser Elemente mit kleiner Atomwärme die Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur stark bemerkbar macht. Zur genauen Vergleichung der Modifikationen eines

1) F. Richarz, Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg 6. p. 57. Formel (2) 1904; Bericht der Julisitzung 1906; Ann. d. Phys. 19. p. 639. 1906.

Elementes müßte man die spezifischen Wärmen eigentlich auf die gleichen Temperaturen berechnen. Abgesehen davon, daß dies nur in wenigen Fällen möglich ist, sind in der Tab. VIII die Verschiedenheiten der Temperaturen auch so regellos verteilt, daß sie keinen systematischen Einfluß auf die Werte der spezifischen Wärmen äußern können. Nach Möglichkeit sind gleiche Temperaturbereiche für jedes Element ausgewählt.

Tabelle VIII.

Substanz	Modifikation	Spez. Gewicht	Spez. Wärme	Temperatur (zur spez. W.)
<i>Kohlenstoff</i>	Diamant	3,518	0,1128	10,7
	Graphit	2,25	0,1604	10,8
	amorph (Gaskohle)	1,885	0,2040	24—63
<i>Bor</i>	kristall.	2,535	0,2518	0—100
	amorph	2,45	0,3066	0—100
<i>Silicium</i>	kristall.	2,49	0,165	21
	amorph	2,35	0,214	21
<i>Phosphor</i>	rot	2,296	0,1829	0—51
	gelb	1,828	0,202	13—36
<i>Schwefel</i>	rhombisch	2,06	0,1728	0—54
	monoklin	1,96	0,1809	0—52
	amorph, unlösl.	1,89	0,1902	0—53
	amorph, lösl.	1,86	0,2483	0—50
<i>Arsen</i>	grau	5,87	0,0822	0—100
	schwarz	4,78	0,0861	0—100
<i>Selen</i>	kristall.	4,8	0,0840	22—62
	amorph	4,3	0,1125	21—57
<i>Tellur</i>	kristall.	6,3	0,0483	15—100
	amorph	6,0	0,0525	15—100
<i>Zinn</i>	weiß	7,30	0,0542	0—21
	grau	5,85	0,0599	0—18

Die Angaben der Tab. VIII sind den physikalisch-chemischen Tabellen von H. Landolt, R. Börnstein und W. Meyerhoffer, 3. Aufl. 1905, dem Handbuch der anorg.

Chemie von O. Dammer, 1894—1903, sowie meinen eigenen Untersuchungen entnommen.

Als amorphe Modifikation des *Kohlenstoffs* ist nur Gaskohle zitiert, weil Holzkohle, wie schon ihr schwankendes spezifisches Gewicht (1,45 bis 1,7) zeigt, nicht in dem Grade wie Gaskohle als reiner amorpher Kohlenstoff anzusehen ist.

Bei *Silicium* ist es unterlassen worden, die „graphitische“ Modifikation anzuführen, deren Daten für spezifische Wärme und spezifisches Gewicht sich der Regel nicht fügen würden. Nach Miller¹⁾ ist nämlich das graphitische Silicium seiner Kristallform nach von dem oktaëdrischen nicht verschieden. Man hat also nicht etwa eine neue Modifikation vor sich, wie etwa beim graphitischen Kohlenstoff, dessen Nichtidentität mit dem Diamant feststeht. Daß Kopp²⁾ und Winkler³⁾ für die spezifische Wärme und das spezifische Gewicht des graphitischen Siliciums andere Werte als für das kristallisierte finden (spez. Wärme: 0,181; spez. Gewicht: 2,004), ist wohl auf Nebenumstände, wie etwa Verunreinigung der Präparate, zurückzuführen. Winkler findet auch für das kristallisierte Silicium den im Vergleich mit dem Wöhlerschen (2,49) zu kleinen Wert 2,195 für das spezifische Gewicht. Das von E. Merck in Darmstadt gelieferte „Silicium metallicum amorph“ ist von grauer Farbe und mikrokristallin, also ebenfalls mit dem kristallisierten identisch. Das beweist auch eine von mir ausgeführte Bestimmung seiner spezifischen Wärme. Ich fand:

$$\bar{C}_{0-99} = 0,171,$$

also, da die spezifische Wärme des Siliciums stark von der Temperatur abhängt, gute Übereinstimmung mit den Werten von Kopp²⁾ ($\bar{C}_{21} = 0,165$) und H. F. Weber⁴⁾ ($\bar{C}_{0-101} = 0,1795$).

Amorphes *Wismut* und *Antimon* sind als selbständige Modifikation nicht anerkannt. Hérard⁵⁾ findet zwar für die spezifischen Gewichte Werte, die kleiner sind als die der kristallisierten Modifikationen. Jedoch vermutet er selbst, daß

1) W. H. Miller, Jahresber. über d. Fortschr. d. Chemie p. 191. 1866.

2) H. Kopp, Lieb. Ann. Suppl. 3. p 1, 289. 1864/65.

3) C. A. Winkler, Jahresber. über d. Fortschr. d. Chemie 1864.

4) H. F. Weber, Pogg. Ann. 154. p. 367, 553. 1875.

5) Hérard, Compt. rend. 107. p. 420. 1888.

das abweichende Verhalten seiner Präparate von ihrem Gehalt an Oxyd herrührt. Die neue gelbe Modifikation des Antimons¹⁾ ist vorläufig ebensowenig wie das gelbe Arsen geeignet, auf spezifische Wärme untersucht zu werden.

Das Gesamtergebnis ist also, daß sich die Richarzsche Regel für allotrope Modifikationen bei allen festen Elementen bestätigt; da Kohlenstoff doppelt und Schwefel dreifach zählt, haben wir zwölf Bestätigungen der Regel.

Hrn. Prof. F. Richarz verdanke ich wertvolle Anregungen und Unterstützungen bei diesen Untersuchungen.

Marburg i. H., Physik. Inst.; Oktober 1906.

1) A. Stock, O. Guttman, W. Siebert, Chem. Ber. 37. p. 898. 1904; 38. p. 3837. 1905.

(Eingegangen 25. Oktober 1906.)

4. *Über Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme fester Elemente; von Albert Wigand.*

[Aus der Inaugural-Dissertation des Verfassers¹⁾, mit erweiternden Zusätzen.]

(Hierzu Taf. I.)

In einer früheren Abhandlung²⁾ wurde gezeigt, wie sich aus der *Richarz'schen Theorie des Gesetzes von Dulong und Petit* Folgerungen für die allotropen Modifikationen fester Elemente ergeben, die ihre spezifischen Wärmen und Dichten in einen interessanten, experimentell durchweg bestätigten Zusammenhang bringen. Des weiteren werfen die Richarz'schen Vorstellungen über die kinetischen Vorgänge in festen Körpern neues Licht auf die Frage der *Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme*.

Durch die *thermische Ausdehnung* der Körper wird der mittlere Atomabstand verändert. Ist nun für ein Element bereits bei gewöhnlicher Temperatur der Atomabstand so groß, daß ihm gegenüber die Schwingungen des Atoms um seine Gleichgewichtslage klein sind, so wird das betreffende Element das Dulong-Petitsche Gesetz befolgen, seine Atomwärme und damit seine *spezifische Wärme* wird keine wesentliche *Abhängigkeit von der Temperatur* aufweisen. Je kleiner aber der Atomabstand ist, um so mehr wird sich die Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur bemerkbar machen, und zwar, wenn die Abweichungen vom normalen Werte der Atomwärme nach unten hin geschehen, in der Weise, daß im allgemeinen bei höherer Temperatur infolge des vergrößerten Atomabstands die spezifische Wärme größer wird, bei tiefen Temperaturen dagegen abnimmt. Die Gültigkeit des Dulong-Petitschen Gesetzes ist also bei hohen Temperaturen umfassender als bei tiefen.

1) Marburg 1905; F. Richarz, Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg, **6**. p. 61. 1904; **7**. p. 100. 1905.

2) A. Wigand, Ann. d. Phys **22**. p. 64. 1907.

Betrachtet man die experimentell gefundenen Werte für die spezifische Wärme fester Elemente als Funktion der Temperatur, so ergibt sich eine Fülle von interessanten Zusammenhängen, die eine kritische Prüfung und vollständige Zusammenstellung des gesamten Materials rechtfertigen.

Die ersten Untersuchungen auf diesem Gebiete wurden schon von Dulong und Petit¹⁾ gemacht. Regnault, H. F. Weber und U. Behn²⁾ haben die grundlegenden Arbeiten geliefert, F. Richarz³⁾ die exakte theoretische Erklärung. Inzwischen ist die hier in Betracht kommende Literatur so angewachsen, daß sie sich nur schwer übersehen läßt. Bei Gelegenheit meiner eigenen Versuche⁴⁾ habe ich alles, was mir zugänglich war, durchgesehen, kritisch verglichen und im folgenden zusammengestellt, wobei ich jedoch immerhin selektiv verfahren mußte, um die Resultate in einer übersichtlichen graphischen Darstellung zusammenfassen zu können. Es sind also hier und da einzelne Daten weggelassen, wenn sie sich mit den Resultaten anderer Beobachter nicht vertrugen und an sich geringeren Wert zu haben schienen. Auch da, wo sich kompliziertere Anomalien zeigten, deren Bestätigung noch nicht von anderer Seite erbracht worden ist, wurde durch Auslassung vereinfacht. So ist z. B. von den Fällen einer negativen Änderung der spezifischen Wärme mit steigender Temperatur nur das Germanium aufgenommen worden. Im ganzen genommen sind diese Auslassungen jedoch nur wenige im Vergleich mit der großen Menge der in der Tafel zusammengestellten Daten. Von den Modifikationen der Elemente, die Allotropie aufweisen, ist (mit Ausnahme von Diamant und Graphit beim Kohlenstoff) nur die bekannteste eingezeichnet. Abgesehen von der H. F. Weberschen Arbeit gibt es erst sehr wenig zuverlässiges Material über die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme solcher Elemente. Für Schwefel und Phosphor habe ich neue Bestimmungen gemacht, deren Resultate in der früheren Abhandlung⁴⁾ mitgeteilt und zum Teil auch in das Kurvensystem eingetragen sind.

1) Dulong u. Petit, Ann. chim phys. (2) 7. p. 142. 1817.

2) Zitate auf p. 102.

3) F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 713. III. 1893.

4) A. Wigand, Ann. d. Phys. 22. p. 64. 1907.

In der Kurventafel sind die Resultate der folgenden Beobachter derart graphisch dargestellt, daß in der Weise von U. Behn die Temperatur als Ordinate und die spezifische Wärme als Abszisse abgetragen ist.

Element	Beobachter
Wismut . . .	Giebe, Person, Stücker
Blei	Bède, Behn, Dewar, Gaede, Le Verrier, Schmitz, Spring, Stücker
Thallium . . .	Schmitz
Platin	Behn, Byström, Gaede, Tilden, Violle, Wigand
Iridium . . .	Behn, Violle
Wolfram . . .	Defacqz u. Guichard
Tellur	Dewar, Fabre, Kopp
Antimon . . .	Bède, Behn, Naccari
Zinn	Bède, Behn, Schmitz, Spring
Cadmium . . .	Behn, Gaede, Naccari
Silber	Behn, Byström, Naccari, Schmitz, Tilden
Palladium . .	Behn, Violle
Molybdän . .	Defacqz u. Guichard
Germanium . .	Nilson u. Pettersson
Zink	Bède, Behn, Naccari, Schmitz
Kupfer	Bède, Behn, Gaede, Naccari, Schmitz, Trowbridge
Cobalt	Schmitz, Tilden
Nickel	Behn, Pionchon, Schmitz, Tilden
Eisen	Bède, Behn, Byström, Gaede, Harker, Schmitz, Stücker, Trowbridge
Mangan . . .	Lämmel
Chrom	Adler
Titan	Nilson u. Pettersson
Kalium	Bernini, Regnault, Schüz
Schwefel, rhomb.	Dewar, Forch u. Nordmeyer, Regnault, Wigand
Phosphor, gelb .	Desains, Kopp, Person, Regnault
Silicium, krist. .	Forch u. Nordmeyer, H. F. Weber
Aluminium . .	Bontschew
Magnesium . .	Behn, Stücker
Natrium . . .	Bernini, Regnault, Schüz
Kohlenstoff, Graphit . . .	Behn, Dewar, H. F. Weber
Diamant . . .	Dewar, H. F. Weber
Bor, krist. . .	H. F. Weber
Lithium . . .	Lämmel

- F. W. Adler, Inaug.-Diss., Zürich 1902. Beibl. 27. p. 330. 1903.
 E. Bède, Fortschr. d. Physik 11. p. 379, 1855.
 U. Behn, Wied. Ann. 66. p. 237. 1898; Ann. d. Phys. 1. p. 257. 1900.
 A. Bernini, Beibl. 30. p. 151. 1906; Physik. Zeitschr. 7. p. 168. 1906.
 W. Bontschew, Inaug.-Diss. Zürich 1900; Beibl. 25. p. 178. 1901.
 O. Byström, Fortschr. d. Physik. 16. p. 369. 1860.
 E. Defacqz u. M. Guichard, Ann. chim. phys. (7.) 24. p. 139. 1901.
 E. Desains, Pogg. Ann. 70. p. 315. 1847.
 J. Dewar, Proc. of the Roy. Soc. 76. p. 328. 1905.
 C. Fabre, Compt. rend. 105. p. 1249. 1887.
 C. Forch u. P. Nordmeyer, Ann. d. Phys. 20. p. 423. 1906.
 W. Gaede, Preisschr. und Inaug.-Diss., Freiburg 1902; Physik. Zeitschr. 4. p. 105. 1902.
 E. Giebe, Verb. d. deutsch. physik. Ges. 5. p. 60. 1903.
 J. A. Harker, Phil. Mag. (6) 10. p. 480. 1905.
 H. Kopp, Lieb. Ann. Suppl. III. p. 1, 289. 1864/65.
 R. Lämmel, Ann. d. Phys. 16. p. 551. 1905.
 Le Verrier, Fortschr. d. Physik 48. II. p. 347. 1892.
 A. Naccari, vgl. Landolt-Börnstein-Meyerhoffer, physik.-chem. Tab., 3. Aufl. 1905. p. 383—386.
 L. F. Nilson u. O. Pettersson, Zeitschr. f. physik. Chem. 1. p. 27. 1887.
 C. C. Person, Pogg. Ann. 74. p. 509. 1849.
 Pionchon, Compt. rend. 103. p. 1122. 1886.
 V. Regnault, Pogg. Ann. 51. p. 225, 231. 1840; 62. p. 72. 1844;
 77. p. 99. 1849; 98. p. 396. 1856.
 H. E. Schmitz, Proc. of the Roy. Soc. 73. p. 177. 1903.
 L. Schütz, Wied. Ann. 46. p. 177. 1892.
 W. Spring, vgl. Landolt-Börnstein-Meyerhoffer, physik.-chem. Tab., 3. Aufl. p. 383—386. 1905.
 N. Stücker, Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wissensch. 114. Abt. IIa, p. 657. 1905; Beibl. 30. p. 151. 1906.
 W. A. Tilden, Proc. of the Roy. Soc. 71. p. 220. 1903.
 C. C. Trowbridge, Science. N. S. 8. p. 6. 1898.
 Violle, Compt. rend. 87. p. 981. 1878; 89. p. 702. 1879.
 H. F. Weber, Pogg. Ann. 154. p. 367. 553, 1875.
 A. Wigand, Ann. d. Phys. 22. p. 64. 1907.

Betrachtet man die Kurventafel etwas näher, so fällt zunächst sofort in die Augen, daß sich bei höheren Temperaturen in genügender Entfernung unter dem Schmelzpunkte die Elemente im allgemeinen mit fallendem Atomgewichte von

links nach rechts ordnen. Dies erklärt sich einfach dadurch, daß, dem Gesetze von Dulong und Petit zufolge, mit der größeren spezifischen Wärme das kleinere Atomgewicht verbunden ist. Bei diesen Temperaturen hat also das Dulong-Petitsche Gesetz seine umfassendste Gültigkeit.

Den Richarzschen Anschauungen über die Ursachen der Abweichungen vom Dulong-Petitschen Gesetz entsprechen die folgenden Beziehungen, deren einige zuerst U. Behn¹⁾ in Anknüpfung an seine eigenen schönen Versuche bemerkt hat: Je weiter im allgemeinen nach rechts die Kurven der einzelnen Elemente liegen, desto mehr sind sie gegen die Temperaturachse geneigt, je kleiner also das *Atomgewicht*, desto stärker die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme. Gerade die Elemente, die wegen ihres kleinen Atomgewichtes vom Dulong-Petitschen Gesetze stark abweichen, zeigen die größte Kurvenneigung (Li, B, C). Bei tiefen Temperaturen ist der Einfluß des Atomgewichtes viel stärker als bei hohen. Da nämlich in der Kälte die Moleküle näher beieinander sind und sich eher beeinflussen können als in der Wärme, so wird offenbar das kleinere Atomgewicht die größere Neigung des unteren Teiles der Kurve bewirken.

In derselben Weise zeigt sich der Einfluß des *Atomvolumens*. Die Elemente, die in der graphischen Darstellung des periodischen Systems der Elemente (nach Lothar Meyer) den Minimis der Kurve für die Atomvolumina entsprechen, haben größere Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme als die Elemente, die ihnen in bezug auf das Atomgewicht benachbart sind, aber größeres Atomvolumen haben. Auch für diese Elemente mit den minimalen Atomvolumina zeigt die Neigung der Kurven, daß die Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur größer ist als für die benachbarten: Fe (Atom-Volumen 7,11), Ni (A.-V. 6,60), Co (A.-V. 6,86) verglichen mit Zn (A.-V. 9,21); Pd (A.-V. 9,35) verglichen mit Cd (A.-V. 13,01), Ag (A.-V. 12,76), Sn (A.-V. 16,30); Ir (A.-V. 8,61), Pt (A.-V. 9,06) verglichen mit Pb (A.-V. 18,11) usw. Während sich bei gewöhnlicher Temperatur diese Verhältnisse nur bis zum Atomgewicht 39 für Kalium aufwärts verfolgen lassen, ist

1) U. Behn, Ann. d. Phys. 1. p. 257. 1900.

es bei tiefen Temperaturen möglich, die ganze Reihe der festen Elemente bis zum Bi aufwärts zu übersehen und im erwähnten Sinne zu betrachten. Daß die Metalle Li, Na, Mg, Al trotz ihrer großen Atomvolumina (10,4 bis 23,7) so starke Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme haben, ist in der Kleinheit ihrer Atomgewichte (7,0 bis 27,1) begründet. Man kann in ihren Kurven den Einfluß des Atomgewichtes eliminieren, indem man eine für jedes dieser Elemente passende Maßstabsänderung der Abszisse vornimmt und so die Kurven auf ein gemeinsames höheres Atomgewicht (etwa Pt) rechnerisch oder graphisch bis zur ungefähren Deckung scheert. Es zeigt sich alsdann, daß die reduzierten Kurven nicht viel mehr gegen die Temperaturachse geneigt sind als die Kurven der anderen Metalle, die das Gesetz von Dulong und Petit gut befolgen und keine starke Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme aufweisen.

Für *allotrope Modifikationen* eines Elementes ergibt sich noch die Konsequenz, daß diejenige Form, die den geringeren Grad von Bewegungsfreiheit der Atome, also das größere spezifische Gewicht hat, auch die größere Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur aufweisen wird, was sich offenbar wieder bei tiefen Temperaturen besser zeigen wird als bei höheren. Für Kohlenstoff liegen die erforderlichen Daten in der Arbeit von H. F. Weber vor. In der graphischen Darstellung ist die Kurve für den spezifisch schwereren Diamant, besonders bei tiefen Temperaturen, mehr gegen die Temperaturachse geneigt als die Kurve für Graphit; die Kurven liegen oben näher aneinander als unten.¹⁾

Es ist übrigens nach Richarz wohl nicht von der Hand zu weisen, daß die Abnahme der spezifischen Wärme und auch des Volumens mit sinkender Temperatur auf der *Zusammenballung* von Atomen zu Komplexen mit beschränkter Bewegungsfreiheit beruhen könnte.

Nach den heutigen Vorstellungen über die Natur der festen Körper ist es verständlich, daß die Temperaturabhängig-

1) Bei C. Forch u. P. Nordmeyer, Ann. d. Phys. 20. p. 423. 1906, ist in der graphischen Darstellung die Benennung der Kurven für Diamant und Graphit anscheinend verwechselt worden.

keit der spezifischen Wärme im allgemeinen mit steigender Temperatur kleiner wird; die Kurve wird, wenn sie nicht innerhalb des untersuchten Bereiches eine Gerade ist, nach oben zu allmählich steiler, ist also *konkav nach links*. Zink, Kupfer, Silicium sind Beispiele für einen solchen einfachen Kurvenverlauf. Es kommen jedoch auch andere Gestalten vor. Die Kurven für gelben Phosphor, Blei, Zinn, Eisen u. a. sind in einem bestimmten Temperaturintervalle *konkav nach rechts*. Dies erklärt sich daraus, daß in dem betreffenden Temperaturbereiche der Schmelzpunkt oder ein anderer Umwandlungspunkt des Elementes liegt. Bei der Messung tritt dann die spezifische Wärme verbunden mit einer gewissen latenten Wärme auf, was sich bei scharfem Umwandlungspunkte und exakter Messung und Berechnung in einen Sprung der Kurve in horizontaler Richtung äußern würde. Ist der Umwandlungspunkt unscharf, so daß die molekulare Veränderung des Körpers und damit auch die Aufnahme der latenten Wärme schon bei tieferer Temperatur beginnt, so wird sich das in einer gleichmäßigen starken Zunahme der spezifischen Wärme mit wachsender Temperatur bemerkbar machen, wobei die Kurve konkav nach rechts verläuft. Besonders klar wird dies beim gelben Phosphor. Der eigentliche Schmelzpunkt liegt zwar bei $44,5^{\circ}$, doch beginnt der Körper schon etwa bei 10° allmählich weich zu werden. Die zu dieser Erweichung notwendige Wärmemenge nimmt mit der Temperatur bis zu ihrem Maximalwerte beim eigentlichen Schmelzpunkte zu und verursacht die anormale Zunahme der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme bei steigender Temperatur.¹⁾

Die Abnahme der spezifischen Wärme mit steigender Temperatur, wie sie außer beim Germanium (vgl. Kurventafel) auch noch bei anderen Körpern (z. B. Quecksilber und Wasser) vorkommt, scheint auf kompliziertere molekulare Vorgänge hinzudeuten und harrt noch der Aufklärung.

1) Ob diese Erscheinung beim *Phosphor* ihren Grund in minimalen fremden Beimischungen findet und ob absolut reiner Phosphor sich nicht anders verhält, ist noch fraglich. Für die Erklärung des Kurvenverlaufs, wie er auch bei anderen Körpern vorkommt, ist die Entscheidung dieser Frage jedoch nicht von Belang.

Es ist noch zu bemerken, daß kleinere Unregelmäßigkeiten im Kurvenverlauf daher rühren, daß aus der experimentell gefundenen „mittleren spezifischen Wärme“ eines Temperaturgebietes nicht immer exakt die „wahre spezifische Wärme“ für die einzelnen Temperaturen berechnet werden konnte. Für den vorliegenden Zweck genügt die für die Kurventafel ausgeführte angenäherte Berechnung.

Hr. Prof. F. Richarz hat mich in dankenswerter Weise zu diesen Ausführungen veranlaßt.

Marburg i. H., Physik. Inst., Oktober 1906.

(Eingegangen 2. November 1906.)

**5. Experimentelle Bestimmung
der Oberflächenspannung von verflüssigtem
Sauerstoff und verflüssigtem Stickstoff;
von Leo Grunmach.**

[Aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin in erweiterter Form mitgeteilt vom Verfasser¹⁾.]

In drei früheren Abhandlungen, welche der Berliner Akademie vorgelegt worden sind²⁾, habe ich gezeigt, daß man die Kapillarwellenmethode zur genauen Bestimmung der Oberflächenspannungen verflüssigter Gase, und wenn deren kritische Temperaturen bekannt sind, auch zur Ermittlung ihrer Molekulargewichte anwenden kann. In der vorliegenden Arbeit, welche eine Fortsetzung dieser Untersuchungen bildet, will ich mir erlauben, über die Ergebnisse meiner Messungen an flüssigem Sauerstoff und an flüssigem Stickstoff zu berichten.

Der flüssige Sauerstoff wurde in größeren Dewarschen Flaschen (mit 98 Proz. Reingehalt) bezogen von der Aktiengesellschaft für Markt- und Kühlhallen in Berlin, der flüssige Stickstoff durch freundliche Vermittelung des Hrn. Prof. Dr. von Linde von der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen aus München. Der letztere war dadurch hergestellt worden, daß Stickstoff, der durch Rektifikation flüssiger Luft gewonnen und in Stahlflaschen komprimiert worden war, mit Hilfe flüssiger Luft verflüssigt wurde. Der komprimierte Stickstoff in den Stahlflaschen hatte nach den Angaben des Hrn. Dr. F. Linde einen Sauerstoffgehalt von etwa 1,6 Proz.; der verflüssigte Stickstoff aber kann bis auf einen kleinen Gehalt an Argon als rein angesehen werden, nur ist es nicht ausgeschlossen,

1) L. Grunmach, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. Sitz. d. physik.-mathem. Klasse vom 26. Juli 1906.

2) L. Grunmach, Berl. Ber. 1900. p. 829; 1901. p. 914 und 1904. p. 1198. Ferner: Ann. d. Phys. 4. p. 367. 1901; 6. p. 559. 1901 und 15. p. 401. 1904.

daß beim Einfüllen des verflüssigten Stickstoffs in die Dewar-sche Glasflasche etwas Sauerstoff aus der Atmosphäre in die Flüssigkeit übergegangen ist. Übrigens wird die Reinheit sowohl des flüssigen Sauerstoffs wie des flüssigen Stickstoffs durch die an ihnen ausgeführten, weiter unten mitgeteilten Siedepunktsbestimmungen vollauf bestätigt. Für die Versuche wurden die verflüssigten Gase aus den größeren Dewarschen Flaschen durch Filter in die zur Beobachtung dienenden halbkugelförmigen Dewarschen Gefäße hineinfiltrierte, welche möglichst erschütterungsfrei auf einem die Grundplatte des Stimmgabelstativs frei durchsetzenden, also unabhängig von ihm fest aufgestellten Dreifuße ruhten. Die Gefäße sind ebenso wie die Stimmgabelspitzen auf das sorgfältigste zu reinigen. Ist an einer Stelle die geringste Spur einer Verunreinigung vorhanden, so steigen von dort ununterbrochen Gasbläschen auf, die die Ausbildung der Kapillarwellen stören und eine genaue Messung derselben vereiteln. Sind aber Gefäße und Spitzen vollkommen rein, und werden letztere nur wenig eingetaucht, so treten bei vorsichtigem Erregen der Stimmgabel die Kapillarwellen mit einer Schärfe und Unveränderlichkeit auf, wie man sie schöner nicht auf reinstem Quecksilber erhalten kann. Nur bei der ersten Messungsreihe mit Sauerstoff — deren Ergebnis deshalb hernach auch nur das Gewicht $\frac{1}{2}$ beigelegt wird — fand häufiger von einer Stelle der Gefäßwand aus eine die Schärfe der Kapillarwellen störende Gasentwicklung statt, als deren Ursache sich später ein an jener Stelle befindliches Bläschen in der Glaswandung herausstellte.

Die Versuchsanordnung und die Beobachtungsmethode waren die gleichen wie bei meinen früheren Versuchen¹⁾; nur kam diesmal nicht die früher benutzte Stimmgabel (von 253 Schwingungen) zur Verwendung, sondern, um längere Kapillarwellen zu erhalten, eine mit Platinspitzen versehene, mit P.T.R. II, 189 bezeichnete Stimmgabel von geringerer Schwingungszahl, die nach den Bestimmungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt durch die Gleichung gegeben ist:

$$n_t = 156,94 - 0,016(t - 19^\circ \text{ C}).$$

1) L. Grunmach, l. c.

Die Entfernung ihrer Spitzen wurde mittels eines Vertikal-komparators zu 1,7767₄ cm bestimmt.

Zur Berechnung der Oberflächenspannung diene wieder die allgemeine Gleichung

$$\alpha = \frac{\sigma n^2 \lambda^3}{2\pi} - g \frac{\lambda^2 \sigma}{4\pi^2} \text{ dyn/cm,}$$

in welcher σ die Dichte, n die Schwingungszahl, λ die Wellenlänge und g die Erdbeschleunigung bedeuten.

Bevor ich zur Mitteilung der Messungen selbst übergehe, möchte ich hier noch auf eine merkwürdige Bewegungserscheinung der Flüssigkeitsoberfläche hinweisen, die ich früher schon bei meinen Versuchen mit flüssiger Luft beobachtet und erwähnt¹⁾, und die ich jetzt wieder mit großer Deutlichkeit beobachtet habe. Sobald nämlich die Stimmgabelspitzen die Oberfläche der verflüssigten Gase berühren, ohne von ihnen infolge des Leidenfrostschen Phänomens benetzt zu werden, bildet sich zwischen den Spitzen, auch *ohne Erregung der Stimmgabel*, ein zwar schwaches, aber bei erschütterungsfreier Aufstellung und vollkommen ruhiger Oberfläche deutlich erkennbares System hyperbolischer Interferenzwellen von sehr geringer Wellenlänge aus, und gleichzeitig hört man deutlich einen schwachen Ton von bestimmter Höhe erklingen, dessen Entstehen vielleicht auf folgende Weise seine Erklärung finden dürfte: die an den Stimmgabelspitzen ununterbrochen entstehenden und wieder verschwindenden Gasbläschen versetzen die Flüssigkeit in der Umgebung der Spitzen in periodische Schwingungen und erzeugen den erwähnten Ton, ähnlich der Erscheinung des Singens von Flüssigkeiten unmittelbar vor dem Kochen. Werden die Stimmgabelspitzen vorsichtig ein wenig tiefer eingetaucht, so bleibt die Erscheinung bis zu einer gewissen Tiefe des Eintauchens unverändert, bei noch etwas tieferem Eintauchen aber erfährt das Interferenzwellensystem plötzlich eine *sprungweise* Veränderung, indem die Wellenlänge kleiner wird, und gleichzeitig schlägt der Ton in einen um ein bestimmtes Intervall höheren Ton über. Bei weiterem vorsichtigen Eintauchen der Spitzen bleibt bis zu einer gewissen

1) L. Grunmach, l. c. p. 915. 1901.

Tiefe hin wieder diese Erscheinung unverändert bestehen und verschwindet erst, wenn die Spitzen so tief in die Flüssigkeit eintauchen, daß die von der Stimmgabel ihnen zugeführte Wärme zur Aufrechthaltung des Leidenfrostschen Phänomens nicht mehr ausreicht, und rings um die Stimmgabelspitzen herum ein stürmisches Sieden beginnt. Daß diese Erscheinung bei den vorliegenden Versuchen besser beobachtet werden konnte als bei meinen vorher erwähnten Versuchen mit flüssiger Luft, dürfte wohl von der verschiedenen Form herrühren, welche die Spitzenpaare der beiden Stimmgabeln besitzen. Bei der früher benutzten Stimmgabel waren die Stahlspitzen etwa dreimal so lang als die Platinspitzen der jetzt benutzten Stimmgabel, so daß diesmal von der auf Zimmertemperatur befindlichen Stimmgabel aus eine größere Wärmemenge den Spitzen zugeführt wurde, und infolgedessen das Leidenfrostsche Phänomen sich besser ausbilden und länger erhalten konnte.

Ich gehe nunmehr zur Mitteilung der Messungen selbst über:

I. Verflüssigter Sauerstoff.

Den *Siedepunkt des Sauerstoffs* habe ich mittels eines von C. Richter aus Jenenser Glas 16^{III} hergestellten, von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geprüften Pentanthermometers P. T. R. II, 20286 besonders bestimmt. Das verflüssigte Gas befand sich zu diesem Zwecke in einem zylindrischen unversilberten Vakuumgefäß, dessen innere Länge etwa 10 cm betrug. Das stabförmige Pentanthermometer tauchte, um Fadenkorrektion zu vermeiden, weit (etwa 15° C.) über den Einstellungsindex in die Flüssigkeit und konnte durch die Glaswand hindurch sehr genau (bis auf 0,05° C.) abgelesen werden. Ein Siedeverzug fand nicht statt. Nach längerem Eintauchen des Thermometers fanden von halber zu halber Minute folgende Ablesungen statt:

–182,60° C. (Beob.: Grunmach)	–182,70° C. (Beob.: Weidert)
–182,65	–182,60
–182,60	–182,70
–182,65	–182,70
–182,70	–182,60

Der reduzierte Barometerstand betrug während dieser Ablesungen im Mittel 762,22 mm. Demgemäß wurde der *Siedepunkt des Sauerstoffs* gefunden zu $-182,65^{\circ}\text{C.}$ bei dem *Barometerstande* $\beta_0 = 762,22\text{ mm}$, in vollkommener Übereinstimmung mit dem Werte, den Hr. Holborn¹⁾ für den Siedepunkt findet, nämlich $-182,7^{\circ}\text{C.}$ bei $\beta_0 = 760\text{ mm}$, während Hr. Dewar²⁾ $-182,5^{\circ}\text{C.}$ als den wahrscheinlichsten Wert für den Siedepunkt des Sauerstoffs angibt. Unter Annahme der von Hrn. Holborn mitgeteilten Daten über die Tension des Sauerstoffs, nämlich, daß in der Nähe des Siedepunkts einer Druckdifferenz von 18,86 mm eine Temperaturdifferenz von $0,56^{\circ}\text{C.}$ entspricht, habe ich dann für die bei den anderen Versuchsreihen herrschenden Barometerstände die Siedetemperaturen berechnet.

Für die *Dichte des verflüssigten Sauerstoffs* bei der Siedetemperatur $-182,65^{\circ}\text{C.}$ habe ich den Wert 1,135 angenommen³⁾ und für die anderen bei den Versuchen vorkommenden Siedetemperaturen die Dichten berechnet unter Annahme der von den Herren Baly und Donnan⁴⁾ mitgeteilten Daten über die Änderung der Dichte des flüssigen Sauerstoffs mit der Temperatur, nämlich, daß einer Temperaturdifferenz von 1°C. eine Änderung in der Dichte von 0,005 entspricht.

Um nun zur Mitteilung der Ergebnisse der eigentlichen Kapillarwellenmessungen überzugehen, so sind folgende vier unabhängige Beobachtungsreihen an *flüssigem Sauerstoff* ausgeführt worden. Die mitgeteilten Werte der Spitzenentfernung der Stimmgabel in Mikrometerpartes sind die Mittelwerte der Messungen, welche am Anfang und am Schluß jeder einzelnen Beobachtungsreihe ausgeführt worden sind.

Der Abstand zweier benachbarten Wellenberge ($= \lambda/2$) ist als *ein Intervall* bezeichnet.

1) L. Holborn, Ann. d. Phys. 6. p. 254. 1901.

2) J. Dewar, Proc. Roy. Soc. 68. p. 44. 1901.

3) J. Dewar, Chem. News 73. p. 40. 1896; J. Drugman u. W. Ramsay, Journ. Chem. Soc. 77. p. 1228. 1900.

4) E. C. C. Baly u. F. G. Donnan, Journ. Chem. Soc. 81. p. 911. 1902.

Erste Beobachtungsreihe.

Spitzenentfernung = 1935,3 partes	= 1,7767 ₄ cm
Mittlere Temperatur der Stimmgabel	$t = 18,6^{\circ}$ C.
Schwingungszahl der Stimmgabel	$n_t = 156,95$
Reduzierter Barometerstand	$\beta_0 = 748,60$ mm
Zugehörige Siedetemperatur des Sauerstoffs	$T = -183,05^{\circ}$ C.
Dichte des Sauerstoffs	$\sigma_T = 1,135$.

13 Intervalle = 1035,7 p ; hieraus $\lambda/2 = 79,669$ p

13	„	1038,5	79,885
14	„	1116,1	79,721
14	„	1116,3	79,736
13	„	1029,2	79,169
13	„	1031,1	79,315
12	„	955,9	79,658
12	„	957,2	79,767
12	„	957,4	79,783
12	„	958,0	79,836
12	„	957,9	79,821

Im Mittel $\lambda/2 = 79,669$ $p = 0,07314$ cm,

hieraus $\alpha = 13,324$ dyn/cm (Gew. $\frac{1}{2}$, vgl. oben p. 108).

Zweite Beobachtungsreihe.

Spitzenentfernung = 1921,84 partes	= 1,7767 ₄ cm
Mittlere Temperatur der Stimmgabel	$t = 20,0^{\circ}$ C.
Schwingungszahl der Stimmgabel	$n_t = 156,94$
Reduzierter Barometerstand	$\beta_0 = 762,22$ mm
Zugehörige Siedetemperatur des Sauerstoffs	$T = -182,65^{\circ}$ C.
Dichte des Sauerstoffs	$\sigma_T = 1,135$.

15 Intervalle = 1171,3 p ; hieraus $\lambda/2 = 78,087$ p

15	„	1172,4	78,160
15	„	1177,1	78,473
15	„	1181,3	78,754
15	„	1176,8	78,454
15	„	1180,9	78,727
15	„	1176,7	78,447
15	„	1180,3	78,687
15	„	1187,4	79,160
15	„	1182,6	78,840

Im Mittel $\lambda/2 = 78,579$ $p = 0,07265$ cm,

hieraus $\alpha = 13,051$ dyn/cm.

Dritte Beobachtungsreihe.

Spitzenentfernung = 1923,4 partes	= 1,7767 ₄ cm
Mittlere Temperatur der Stimmgabel	$t = 19,7^{\circ} \text{C.}$
Schwingungszahl der Stimmgabel	$n_t = 156,93$
Reduzierter Barometerstand	$\beta_0 = 763,8 \text{ mm}$
Zugehörige Siedetemperatur des Sauerstoffs	$T = -182,60^{\circ} \text{C.}$
Dichte des Sauerstoffs	$\sigma_T = 1,135.$

14	Intervalle = 1101,2 p; hieraus $\lambda/2 = 78,658 p$	
14	„ 1087,8	77,700
14	„ 1095,2	78,229
14	„ 1104,1	78,865
14	„ 1101,8	78,700
14	„ 1100,6	78,615
14	„ 1101,8	78,700
14	„ 1097,6	78,400
14	„ 1097,2	78,372
14	„ 1101,8	78,700

Im Mittel $\lambda/2 = 78,494 p = 0,07251 \text{ cm},$
 hieraus $\alpha = 12,975 \text{ dyn/cm.}$

Vierte Beobachtungsreihe.

Spitzenentfernung = 1923,4 partes	= 1,7767 ₄ cm
Mittlere Temperatur der Stimmgabel	$t = 18,5^{\circ} \text{C.}$
Schwingungszahl der Stimmgabel	$n_t = 156,95$
Reduzierter Barometerstand	$\beta_0 = 763,8 \text{ mm}$
Zugehörige Siedetemperatur des Sauerstoffs	$T = -182,60^{\circ} \text{C.}$
Dichte des Sauerstoffs	$\sigma_T = 1,135$

15	Intervalle = 1174,4 p; hieraus $\lambda/2 = 78,294 p$	
15	„ 1178,7	78,580
15	„ 1177,7	78,514
15	„ 1182,0	78,800
13	„ 1027,0	79,000
14	„ 1108,6	79,186
14	„ 1097,1	78,365

Im Mittel $\lambda/2 = 78,677 p = 0,07268 \text{ cm},$
 hieraus $\alpha = 13,071 \text{ dyn/cm.}$

Die aus den vier Beobachtungsreihen gewonnenen Mittelwerte sind in der folgenden Tabelle übersichtlicher zusammengestellt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Numer der Beobachtungsreihe	Reduz. Barometerstand β_0	Zugehörige Siedetemp. T des flüssig. Sauerstoffs in $^{\circ}\text{C}$.	Entsprechende Dichte σ des Sauerstoffs	Mittlere Spitzenentfernung in Mikrometerpartes	Mittlere halbe Wellenlänge $\lambda/2$ in Mikrometerpartes	Mittlere Temp. t der Stimmgabel in $^{\circ}\text{C}$.	Schwingungszahl n der Stimmgabel bei der Temperatur t	Oberflächen- spannung α des flüssig. Sauerstoffs in dyn/cm
1	748,60	-183,05	1,137	1935,30	79,669	18,6	156,95	13,324
2	762,22	-182,65	1,135	1921,84	78,579	20,0	156,94	13,051
3	763,80	-182,60	1,135	1923,40	78,494	19,7	156,94	12,975
4	763,80	-182,60	1,135	1923,40	78,677	18,5	156,95	13,071

Im Mittel ergibt sich also bei der Siedetemperatur $-182,7^{\circ}\text{C}$.

die Oberflächenspannung des flüssigen Sauerstoffs:

$$\alpha = 13,074 \text{ dyn/cm}$$

und

die spezifische Kohäsion des flüssigen Sauerstoffs:

$$\alpha^2 = \frac{2\alpha}{\sigma} = 23,038.$$

II. Verflüssigter Stickstoff.

Die Siedetemperatur des Stickstoffs wurde gleichfalls mittels des Pentanthermometers in genau derselben Weise wie die des Sauerstoffs bestimmt. Hier fanden folgende Ablesungen statt:

- 195,90 $^{\circ}\text{C}$. (Beob.: Grunmach)
- 195,90
- 195,90
- 196,00
- 196,00
- 195,90

Der reduzierte Barometerstand betrug während dieser Ablesungen im Mittel 749,1 mm.

Demgemäß wurde der Siedepunkt des Stickstoffs bei dem Barometerstande $\beta_0 = 749,1 \text{ mm}$ zu $-195,9_2^{\circ}\text{C}$. gefunden, in guter Übereinstimmung mit den Werten, die die Herren Fischer und Alt¹⁾ für den Siedepunkt mitteilen, nämlich

1) K. F. Fischer u. H. Alt, Münch. Ber. 1902. p. 113; Ann. d. Phys. 9. p. 1149. 1902.

— 196,176° C. bei 714,5 mm und — 195,67° C. bei 760 mm, während für die *Dichte des verflüssigten Stickstoffs* nach den Angaben von Baly und Donnan¹⁾, sowie von Behn und Kiebitz²⁾ bei — 195,9° C. der Wert 0,791 angenommen wurde.

An Kapillarwellenmessungen wurde mit dem zur Verfügung stehenden flüssigen Stickstoff von zwei Litern folgende größere aus 20 gut untereinander übereinstimmenden Einzelbeobachtungen bestehende Beobachtungsreihe ausgeführt.

Spitzenentfernung = 1925,5 partes	= 1,7767 ₄ cm
Mittlere Temperatur der Stimmgabel	$t = 18,35^{\circ}$ C.
Schwingungszahl der Stimmgabel	$n_t = 156,95$
Reduzierter Barometerstand	$\beta_0 = 749,10$ mm
Zugehörige Siedetemperatur des Stickstoffs.	$T = - 195,9^{\circ}$ C.
Dichte des Stickstoffs	$\sigma_T = 0,791$.

13 Intervalle = 996,0 p; hieraus $\lambda/2 = 76,615$ p	
13 „ 995,4	76,569
13 „ 993,2	76,400
13 „ 1000,1	76,931
13 „ 1007,6	77,508
13 „ 1004,1	77,238
13 „ 1003,2	77,169
13 „ 1003,7	77,208
13 „ 1000,0	76,923
14 „ 1083,8	77,415
14 „ 1073,0	76,643
14 „ 1085,6	77,543
14 „ 1088,0	77,715
14 „ 1078,5	77,036
14 „ 1087,0	77,643
14 „ 1078,3	77,022
14 „ 1079,6	77,115
14 „ 1073,7	76,693
14 „ 1074,3	76,736
15 „ 1149,0	76,600

Im Mittel $\lambda/2 = 77,036$ p = 0,07108 cm.

1) E. C. C. Baly u. F. G. Donnan, Journ. Chem. Soc. 81. p. 911. 1902.

2) U. Behn u. F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 12. p. 421. 1903.

Hieraus berechnet sich bei der Siedetemperatur $-195,9^{\circ}\text{C}$.
die Oberflächenspannung des verflüssigten Stickstoffs zu

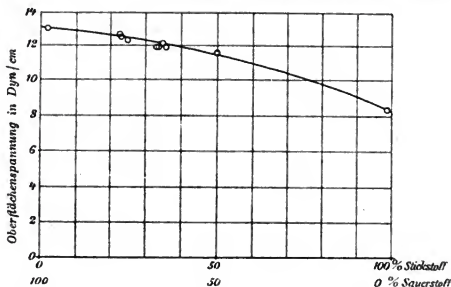
$$\alpha = 8,514 \text{ dyn/cm}$$

und

die spezifische Kohäsion des verflüssigten Stickstoffs zu

$$a^2 = 21,527. ^1)$$

Meine Messungen an reinem Sauerstoff und an reinem Stickstoff schließen sich gut meinen früheren Messungen²⁾ an flüssiger Luft bei verschiedenem Sauerstoffgehalte an. In



der vorstehenden graphischen Darstellung sind die früheren Messungsergebnisse mit den vorliegenden zu einer Kurve vereinigt.

Zur Berechnung des Molekulargewichtes M dient nun die Gleichung³⁾

$$M = \sigma \sqrt{\left(\frac{2,227 (\Theta - T)}{\alpha} \right)^2},$$

1) Aus Messungen kapillarer Steighöhen finden die Herren Baly und Donnan (Trans. Chem. Soc. p. 918. 1902) für die Oberflächenspannung des Stickstoffs bei -193°C . den Wert 8,27 dyn/cm und für die des Sauerstoffs 13,23 bei -183°C ., in guter Übereinstimmung mit meinen nach der Kapillarwellenmethode gefundenen Werten.

2) L. Grunmach, Berliner Ber. 1901. p. 914 und Ann. d. Phys. 6. p. 559. 1901.

3) Bei meinen früheren Versuchen (L. Grunmach, Berliner Ber. 1900. p. 837 und 1904. p. 1202 und Ann. d. Phys. 4. p. 367. 1901 und 15. p. 401. 1904) wurde zur Berechnung des Molekulargewichtes — worauf mich Hr. Präsident Warburg freundlichst aufmerksam machte — versehentlich die Konstante 2,27 anstatt 2,227 benutzt. Infolgedessen

in welcher θ die kritische Temperatur und T die Beobachtungs- (Siede-) Temperatur der Flüssigkeit in Celsiusgrad bedeuten. Setzt man daher in diese Gleichung als kritische Temperaturen für Sauerstoff¹⁾ bez. für Stickstoff²⁾ die Werte -118°C. bez. -146°C. ein, so erhält man unter Benutzung der entsprechenden, vorhin angeführten Werte von σ , α und T

für das Molekulargewicht
des flüssigen Sauerstoffs

$$M_{\text{O}_2} = 40,70 \text{ (Gew. } \frac{1}{2})$$

$$41,59$$

$$41,91$$

$$41,44$$

und für das Molekulargewicht
des flüssigen Stickstoffs

$$M_{\text{N}_2} = 37,30$$

Im Mittel 41,51

während die Molekulargewichte des Sauerstoffs und des Stickstoffs im gasförmigen Zustande 32,00 und 28,08 betragen.

Sowohl Sauerstoff wie Stickstoff scheinen sich also nicht wie normale, sondern wie assoziierende Flüssigkeiten zu verhalten, die im flüssigen Zustande ein höheres Molekulargewicht besitzen, als im gasförmigen. Dasselbe hat sich aus meinen früheren Versuchen³⁾ für Chlor und aus demnächst zu veröffentlichenden Versuchen auch für Brom ergeben. Gleiche Molekulargewichte im flüssigen und gasförmigen Zustande ergaben sich dagegen aus meinen früheren Versuchen⁴⁾ für schweflige Säure, für Ammoniak und für Stickstoffoxydul. Es fällt nun sofort auf, daß die Gase, die beim Übergang aus dem gasförmigen in den flüssigen Zustand eine Assoziation

sind die dort mitgeteilten Werte für das Molekulargewicht der verflüssigten Gase etwas zu groß und sind in folgende umzuändern:

Für schweflige Säure	63,80
„ Ammoniak	16,62
„ Chlor	89,53
„ Stickstoffoxydul	42,29.

1) S. v. Wroblewski, Wiener Ber. 91. p. 701. 1885.

2) S. v. Wroblewski, l. c. p. 696; K. Olszewski, Compt. rend. 99. p. 134. 1884.

3) L. Grunmach, Berliner Ber. 1900. p. 837; Ann. d. Phys. 4. p. 376. 1901.

4) L. Grunmach, l. c. 1900. p. 837; 1904. p. 1202; Ann. d. Phys. ibid. und 15. p. 406. 1904.

erfahren, chemisch einfache Körper, diejenigen dagegen, die im flüssigen wie im gasförmigen Zustande das gleiche Molekulargewicht besitzen, zusammengesetzte Körper sind. Berechnet man weiter aus den nach der Steighöhenmethode ausgeführten Messungen der Oberflächenspannung von Wasserstoff (Dewar)¹⁾ sowie von Argon und Kohlenoxyd (Baly und Donnan)²⁾ die Molekulargewichte, so zeigt sich auch hier, daß der zusammengesetzte Körper Kohlenoxyd sich wie eine normale Flüssigkeit verhält, die einfachen Körper Argon und Wasserstoff dagegen wie assoziierende. Um zu entscheiden, ob diesem auffallenden Verhalten vielleicht ein allgemeineres Gesetz zugrunde liegt, demzufolge chemisch einfache Körper bei der Verflüssigung eher zur Assoziation neigen, als chemische Verbindungen, müßten zunächst noch für eine größere Anzahl einfacher Körper Kapillarkonstanten und kritische Temperaturen bekannt sein.

Zum Schlusse spreche ich auch an dieser Stelle meinem Assistenten, Hrn. Dr. Franz Weidert, für die mir bei der Ausführung dieser Versuche gewährte wertvolle Hilfe meinen herzlichen Dank aus, ebenso Hrn. cand. Otto Reinkober, der mich bei einigen Messungsreihen unterstützt hat.

Berlin, Physik. Institut der Technischen Hochschule.

1) J. Dewar, Chem. News **84**. p. 49. 1901; Nature p. 243. 1901.

2) E. C. C. Baly und F. G. Donnan, Trans. Chem. Soc. **81**. p. 918. 1902.

(Eingegangen 23. Oktober 1906.)

6. *Über Funkenspannungen (Nachtrag); von Max Toepler.*

In einer Mitteilung unter gleichem Titel habe ich Anfangs dieses Jahres Messungen über Funkenspannungen angegeben.¹⁾ Hierbei wurde eingehend der Fall behandelt, daß mittels eines großen Induktors von Klingelfuss einzelne zeitlich weit getrennte Strom- bez. Spannungsstöße (ein Stoß in der Sekunde) erzeugt werden. Ein Vergleich der speziell für Funkenspannung zwischen zwei Spitzen bei symmetrischer Versuchsanordnung erhaltenen Ergebnisse mit denen, welche andere Beobachter für die gleiche Elektrodenanordnung, aber andersartigen Induktorbetrieb erhalten haben, zeigte, daß die von mir gefundenen Werte nur wenig höher waren als diejenigen fast aller anderen Beobachter (American Inst., B. Walter, W. Voege). Zur Berechnung dieser letzteren Werte ist außer effektiver Primärspannung und Übersetzungsverhältnis auch die Kenntnis des Scheitelfaktors nötig. Wo letzterer, wie zumeist, nicht bekannt war, wurde derselbe zu $\sqrt{2}$ angenommen, eine Annahme, welche günstigstenfalls nur angenähert erfüllt sein wird. *Auffallend niedrige* Werte für die Funkenspannungen ergaben sich aus den Beobachtungen von Hrn. W. Weicker durch Multiplikation der von ihm angegebenen effektiven Spannungen²⁾ mit $\sqrt{2}$. Es blieb unentschieden, ob der Grund der genannten großen Abweichungen nur ein scheinbarer ist, nur auf einer beträchtlichen Abweichung des *tatsächlichen* Scheitelfaktors von dem der Berechnung zugrunde gelegten Werte beruht.

Im folgenden sind eine Reihe gemeinsam mit Hrn. Dipl.-Ing. W. Weicker, Elektroingenieur am Laboratorium der

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 19. p. 191. 1906.

2) W. Weicker, Elektrotechn. Zeitschr. p. 948, Fig. 33. 1904.

Porzellanfabrik Hermsdorf¹⁾ ausgeführte Messungen zur Beantwortung der oben genannten Frage mitgeteilt. Diese haben ergeben, daß der hervorgehobene Unterschied in der Tat nur scheinbar ist, d. h. bei Benutzung des wahren besonders bestimmten Scheitelfaktors *verschwindet*.

I. Bestimmung des Scheitelfaktors.

Die gesuchte sekundäre Spannung ergibt sich bekanntlich als Produkt aus effektiver Primärspannung, Übersetzungsverhältnis und Scheitelfaktor. Die effektive Primärspannung war an einem Voltmeter direkt ablesbar, das Übersetzungsverhältnis betrug 2601, es blieb also noch der Scheitelfaktor zu bestimmen.

Um den Scheitelfaktor festzustellen, wurde folgendermaßen verfahren:

Die *Anfangsspannung* an großen Elektroden (d. h. diejenige Spannung, bei welcher zuerst leuchtende Entladung irgend welcher Art im Schlagraume austritt) ist, wie man weiß, (extremste Fälle ausgeschlossen) unabhängig von der Art der Stromzufuhr zu den Elektroden, also speziell auch von der Frequenz und vom Werte des Scheitelfaktors. Nach früheren Feststellungen kennt man nun mit einiger Sicherheit die Anfangsspannung sowohl zwischen zwei großen Kugelelektroden (symmetrische Versuchsanordnung), als auch zwischen großer Kugel und ausgedehnter ebener Platte.²⁾ Bestimmt man also

1) Die Messungen sind mit Hilfe eines in der elektrotechnischen Versuchsstelle der Porzellanfabrik Hermsdorf S.-A. zur Prüfung von Isolatoren aufgestellten Transformators der Siemens-Schuckert-Werke ausgeführt; dieser lieferte bis zu 200 Kilovolt effektive sekundäre Spannung; die Frequenz betrug bei den angestellten Messungen 104 Wechsel in der Sekunde.

Auch an dieser Stelle möchte ich Hrn. Direktor Oskar Arke meinen verbindlichsten Dank für die freundliche Zurverfügungstellung der Räume und Mittel der Versuchsstation aussprechen.

2) Die Werte der Anfangsspannungen lassen sich, wie Ann. d. Phys. 19. p. 192 u. ff. angegeben ist, durch die Interpolationsformeln

$$A S = 600 \cdot d \left(96 + \frac{64}{\sqrt{d}} \right) \frac{f + d}{f + 5,8 d}$$

für solche Elektrodenkombinationen die effektive primäre Anfangsspannung, multipliziert diese mit dem Übersetzungsverhältnisse (in unserem Falle —2601) und dividiert das Produkt in die bekannte wahre (sekundäre) Anfangsspannung, so erhält man den Scheitelfaktor.

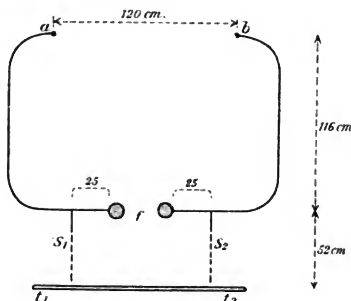


Fig. 1.

Der spezielle Aufbau der Elektroden bei symmetrischer Versuchsanordnung ist aus der Aufrißfigur 1 zu ersehen. Es bedeutet:

a und b die unterhalb der Zimmerdecke hinlaufenden

für symmetrische Versuchsanordnung und

$$AS = 300 \cdot d \left(96 + \frac{64}{\sqrt{d}} \right) \frac{f + 0,5 d}{f + 2,9 d}$$

für Kugel gegenüber großer Platte rechnen, wobei d den Kugeldurchmesser, f den Elektrodenabstand (Schlagweite) bedeutet. Leider versagen, wie l. c. auch angegeben ist, diese Formeln für $f: d < 1$, bez. $f: d < 0,5$; für solche kleine Schlagweiten ist man auf graphische Interpolationen und Extrapolationen des vorhandenen Beobachtungsmateriales angewiesen.

Die in vorliegender Notiz zugrunde gelegten Werte von Anfangsspannungen gelten genau genommen für 745 mm Luftdruck und 18° C. Die Beobachtungen erfolgten aber bei einem Luftdruck von nahe 735 mm (und 16–20° C.); die in Tab. I und II als berechnet angegebenen Anfangsspannungen sind also um ca. 1 1/2 Proz. zu hoch, die berechneten Scheitelfaktoren also um ebensoviel höher als die wahren. Da nun aber die Grenzspannungen in nahe gleichem Maße vom Luftdrucke abhängen wie die Anfangsspannungen, so gelten die mit dem zu hohen Scheitelfaktor berechneten Spannungswerte von Tab. III auch wieder nicht für 735 mm, sondern für 745 mm Luftdruck.

Tabelle I.

Mittelwerte aus je fünf Einzelbestimmungen.

A. Zwei Eisenkugeln von je 9,95 cm Durchmesser. 104 Wechsel in der Sekunde.

$f = 5,00$ cm; Anfangssp. 129 Kilovolt	{ Ohm primär vorgeschaltet Kilovolt effekt. sekundär beobachtet Scheitelfaktor berechnet	0,00	0,30	1,05	1,80	2,55	4,80
		86,3	87,9	91,4	92,9	94,4	96,8
		1,50	1,47	1,41	1,39	1,37	1,34
$f = 7,50$ cm; Anfangssp. 169 Kilovolt	{ Ohm primär vorgeschaltet Kilovolt effekt. sekundär beobachtet Scheitelfaktor berechnet	0,00	—	1,50	—	3,00	—
		113,3	—	121,4	—	125,0	—
		1,50	—	1,39	—	1,35	—
$f = 10,05$ cm; Anfangssp. 198 Kilovolt	{ Ohm primär vorgeschaltet Kilovolt effekt. sekundär beobachtet Scheitelfaktor berechnet	0,00	0,75	—	2,31	—	—
		133,8	141,5	—	145,9	—	—
		1,48	1,39	—	1,36	—	—
$f = 12,50$ cm; Anfangssp. 221 Kilovolt	{ Ohm primär vorgeschaltet Kilovolt effekt. sekundär beobachtet Scheitelfaktor berechnet	0,00	—	1,50	—	—	—
		141,1	—	157,0	—	—	—
		1,53	—	1,41	—	—	—
$f = 14,83$ cm; Anfangssp. 236 Kilovolt	{ Ohm primär vorgeschaltet Kilovolt effekt. sekundär beobachtet Scheitelfaktor berechnet	0,00	0,75	1,28	—	—	—
		157,6	165,7	169,1	—	—	—
		1,51	1,43	1,40	—	—	—

B. Zwei Messingkugeln von je 9,95 cm Durchmesser. 104 Wechsel in der Sekunde.
Kein primärer Vorschaltwiderstand.

$f = 17,53$ cm;
Anfangssp. 253 Kilovolt

{	Ohm primär vorgeschaltet	0,00	0,75	1,18
	Kilovolt effekt. sekundär beobachtet	165,9	176,5	181,2
	Scheitelfaktor berechnet	1,53	1,43	1,39

$f = 20,00$ cm;
Anfangssp. 267 Kilovolt

{	Ohm primär vorgeschaltet	0,00	0,75
	Kilovolt effekt. sekundär beobachtet	176,2	185,0
	Scheitelfaktor berechnet	1,51	1,44

Schlagweite f in cm	1	2	3	4	5	6	8
Beobachtete effekt. sekund. Anfangsspannung in Kilovolt	22,4	40,6	56,2	71,5	84,5	96,3	114,4
Berechnete Anfangsspannung in Kilovolt	32,8	61,7	87,0	109,3	129	146	175
Scheitelfaktor berechnet	1,47	1,51	1,55	1,52	1,53	1,52	1,53

Schlagweite f in cm	10	12	14	16	18	20	22
Beobachtete effekt. sekund. Anfangsspannung in Kilovolt	129,4	141	150,6	160	167	173	180
Berechnete Anfangsspannung in Kilovolt	198	217	231	244	255	267	278
Scheitelfaktor berechnet	1,53	1,54	1,53	1,53	1,53	1,55	1,54

Zuführungen vom Transformator — letzterer stand im Nebenzimmer —,

f den Entladungsraum (Funkenstrecke),

S_1 und S_2 die isolierenden Stützen,

$t_1 t_2$ die Tischplatte.¹⁾

Als Elektrodenkugeln dienten einmal gedrehte Eisenkugeln von je 9,95 cm Durchmesser, dann zur Kontrolle Messingkugeln von je 9,95 cm Durchmesser.

Orientierende Versuche zeigten, wie zu erwarten (und wie von Hrn. Weicker bereits früher festgestellt), daß der Scheitelfaktor nicht unbedeutend von dem in den primären Stromkreis eingeschalteten Widerstand abhing.

Tab. I (p. 122—123) gibt unter A. für symmetrische Versuchsanordnung mit zwei *Eisenkugeln* von je 9,95 cm Durchmesser die Schlagweite f in Zentimetern, die zugehörige Anfangsspannung AS in Kilovolt, den in den primären Stromkreis geschalteten Widerstand in Ohm, die abgelesene effektive primäre Anfangsspannung in Kilovolt multipliziert mit 2601 und schließlich den berechneten Scheitelfaktor. Ferner sind (Tab. I unter B.) ebensolche Messungen mit zwei *Messingkugeln* von je 9,95 cm Durchmesser — aber nur mit dem Widerstande Null im primären Kreise — angegeben.

Es schien erwünscht, die Bestimmung des Scheitelfaktors noch auf weitere von den vorangehenden abweichende Beobachtungen zu stützen.

In Tab. II sind nur für den primären Widerstand Null ausgeführte Bestimmungen mit *asymmetrischer* Versuchsanordnung mitgeteilt; als Kugelelektrode diente einmal eine *Eisenkugel* von 9,95 cm, dann eine *Messingkugel* von 9,95 cm Durchmesser. Die von dem Erdboden gut isolierte Tischplatte $t_1 t_2$ in Fig. 1 war hier mit einer *ebenen Messingplatte* bedeckt; die Verbindung derselben mit der Zuleitung b erfolgte fern vom Schlagraume, der einen Zimmerwand entlang. Der andere Pol (*Kugel-*

1) Wie aus den eingetragenen Angaben (in Zentimetern) der einzelnen Entfernungen zu ersehen ist, standen die Tischplatte und die Stützen f dem Entladungsraume immer noch recht nahe; ein weiteres Abrücken, wie dies zu ganz exakten Messungen erwünscht wäre, ließ sich aber in dem beschränkten Versuchsraume ohne anderweitige Störungen nicht erreichen.

Tabelle II.

Mittelwerte aus je fünf Einzelbestimmungen.

A. Eisenkugel von 9,95 cm Durchmesser gegenüber großer ebener Messingplatte; 104 Wechsel in der Sekunde;
kein primärer Vorschaltwiderstand.

Elektrodenabstand f in cm	17,9	22,7	29,8	36,9	47,6	55,8
Beobachtete effektive sekundäre Anfangsspannung in Kilovolt	111,6	122,5	131,1	139,2	152,7	171,3
Berechnete Anfangsspannung in Kilovolt	165,5	182,3	203,5	217	236	246
Scheitelfaktor berechnet	1,48	1,49	1,55	1,56	1,54	1,53

B. Messingkugel von 9,95 cm Durchmesser gegenüber großer ebener Messingplatte; 104 Wechsel in der Sekunde;
kein primärer Vorschaltwiderstand.

Elektrodenabstand f in cm	6	10	14	18	22	26	30	34	40	46	52	60
Effekt. sekundäre Anfangs- spannung in Kilovolt	76,7	95,0	106,0	115,0	121,5	126,5	132,0	138,5	146,2	153,0	159,2	168,5
Berechnete Anfangsspannung in Kilovolt	103,9	132,9	153,1	169,5	183,4	195	208	214	226	235	244	253
Scheitelfaktor berechnet	1,41	1,40	1,44	1,47	1,51	1,54	1,56	1,55	1,55	1,54	1,53	1,50

elektrode) hing an seiner Zuleitung frei von a herab. Natürlich war die Tischplatte hier nach links unter a hin verschoben.

Man ersieht aus den Tab. I und II übereinstimmend, daß der *Scheitelfaktor* zwar von der Spannung abhängt, vom Werte 1,40 rasch ansteigend *bleibt* er dann aber *für ein großes Spannungsintervall fast konstant* gleich 1,53.

II. Entladung zwischen zwei Spitzen.

Steigert man die Größe der Wechselfspannung zwischen zwei Spitzen (oder auch kleinen Kugelelektroden), so tritt im Entladungsraume nacheinander auf:

Lichtloses Fließen,

Grenze heißt Anfangsspannung (AS);

Glimmentladung (auch Spitzenstrom genannt),

Grenze heißt Grenzspannung der Glimmentladung (GSG);

Büschelentladung (oder auch zahlreiche Büschel, d. h. Streifenentladung),

Grenze heißt Grenzspannung der Büschelentladung (bez. der Streifenentladung) GSB bez. GSS ;

Büschellichtbogen (auch Glimmstrom genannt) etc.

An jeder Grenze können unter Umständen Funken auftreten. *Funkenspannung* (FS) kann also identisch sein mit Anfangsspannung oder irgend einer Grenzspannung.

Steigert man jeweils die Wechselfspannung ganz allmählich und beobachtet die Entladungserscheinungen im Schlagraume, so kann man bei einiger Übung jederzeit sofort angeben, welcher der genannten Grenzen die Funkenbildung angehört.

Bezeichnet f den Elektrodenabstand (Schlagweite), d den Elektrodendurchmesser, so gilt: mit wachsendem Werte von $f:d$ ist

zunächst FS identisch mit AS ,

dann FS „ „ GSG ,

dann FS „ „ GSB bez. GSS .

Die Funkenspannung als Funktion der Schlagweite aufgefaßt, folgt dementsprechend nacheinander ganz verschiedenen Gesetzen, dazwischen liegen immer Übergangsgebiete mit großer Unregelmäßigkeit in der Funkenspannung.

Zwischen zwei Spitzen (symmetrische Versuchsanordnung)

ist die Anfangsspannung sehr klein und kommt für die Funkenbildung nur bei allerkleinsten Schlagweiten in Frage.¹⁾

In Tab. III sind die Messungsergebnisse für das Schlagweitenintervall 2—55 cm angegeben. Die Versuchsanordnung war die der Fig. 1, nur mit Spitzenelektroden statt der Kugeln. Die Messungen erfolgten derart, daß immer ohne Einschaltung eines Widerstandes in den primären Stromkreis unter langsamster Steigerung diejenige effektive Primärspannung festgestellt wurde, bei welcher *soeben* die genannten Grenzen (*GSG* oder *GSB*) erreicht waren, d. h. wann zum erstenmal *soeben* Funken auftraten. Die zugehörigen, in der Tabelle angegebenen wahren sekundären Spannungen sind gerechnet als: beobachtete effektive Primärspannungen mal 2601 mal 1,53.

Tabelle III.

Mittelwerte aus je fünf Einzelbestimmungen.

Entladung zwischen zwei Spitzen; 104 Wechsel in der Sekunde;
kein primärer Vorschaltwiderstand.

Elektrodenabstand f in cm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
Grenzspannung von Glimmen (<i>GSG</i>) in Kilovolt	25,9	37,0	46,0	55,8	—	—	—	—	—	—
Grenzspannung von Büschelentladung (<i>GSB</i>) in Kilovolt	—	—	—	—	—	—	—	—	—	74,8
Funkenspannung <i>FS</i> in Kilovolt	25,9	37,0	46,0	55,8	61	67	71	76	67,2 bis 78,7	74,8 bis 84,4

Elektrodenabstand f in cm	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Grenzspannung von Glimmen (<i>GSG</i>) in Kilovolt	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Grenzspannung von Büschelentladung (<i>GSB</i>) in Kilovolt	89,7	114	139	165	186	209	233	255	276
Funkenspannung (<i>FS</i>) in Kilovolt	89,7 bis 91,5	114	139	165	186	209	233	255	276

1) Die Anfangsspannung nähert sich, wie dies in den eingangs angegebenen Interpolationsformeln zum Ausdruck kommt, für $f = \infty$ einem konstanten größten Grenzwerte; dieser liegt um so niedriger, je feiner die Spitzen sind. Selbst für sehr stumpfe Spitzen erreicht die größte Anfangsspannung (für $f = \infty$) höchstens 10 Kilovolt.

Die Angaben von Tab. III lassen folgendes erkennen: der eigentümliche Verlauf der *Funkenspannung* bei kleinen Schlagweiten (2—15 cm) erklärt sich, wie auch schon früher angegeben¹⁾, durch das Auftreten von Glimmentladung. Die *Unregelmäßigkeit* der Funkenspannung für $f = 5$ cm bis $f = 15$ cm wird dadurch veranlaßt, daß die Funkenbildung je nach Zufall einmal näher der Grenzspannung durch Glimmen, dann näher der der Büschelentladung erfolgt. Für große Schlagweiten ($f > 15$ cm) ist die Funkenspannung identisch mit der Grenzspannung der Büschelentladung (und zwar speziell überwiegend *positiver* Büschelentladung). *Letztere* Grenzspannung verläuft, als Funktion (Ordinate) der Schlagweite aufgefaßt, nahe geradlinig, zeigt aber doch auch wieder eine schwache Krümmung nach der Abszissen- (Schlagweiten-)achse hin.²⁾

In quantitativer Hinsicht ergibt sich, daß die erhaltene Funkenspannung zwischen Spitzen bei Wechselstrom von 104 Wechsel in der Sekunde mit den eingangs erwähnten, von anderer Seite gefundenen Spannungen *recht gut übereinstimmt*.

Hermsdorf S.-A., September 1906.

1) Vgl. die Anm. 2 in Ann. d. Phys. **19**, p. 205. 1906.

2) Sie schneidet die Schar der Kurven der Anfangsspannungen an verschieden großen Kugeln je im Punkte mit $f:d = 10,4$. Hieraus erhält man auf dem gleichen Wege wie früher (l. c. p. 205) von mir angegeben ist $3,90 \cdot f + 8,4 \sqrt{f}$ als Interpolationsformel für die in Rede stehende Grenzspannung, also auch für die Funkenspannung bei Schlagweiten zwischen 15 cm und 55 cm.

(Eingegangen 2. November 1906.)

**7. Bestimmung
der Elastizitätskonstanten von Eisenglanz;
von W. Voigt.**

Eine systematische Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Kristallen erscheint nicht nur deshalb von Wichtigkeit, weil die Kenntnis dieser Parameter bei anderen als elastischen Beobachtungen, wie z. B. piezoelektrischen und piezooptischen Untersuchungen, nötig ist; es ist auch mit Sicherheit zu erwarten, daß eine fortgeschrittene Theorie Beziehungen zwischen den elastischen Konstanten und den strukturellen Verhältnissen der Kristalle wird aufstellen können. Vielleicht ergeben sich aus den Beobachtungen der Elastizität mit der Zeit innerhalb der einzelnen nach Symmetrieverhältnissen übereinstimmenden Gruppen Untergruppen oder Typen mit speziellen quantitativen Beziehungen zwischen den Konstanten, die jene Kristalle als strukturell verwandt erkennen lassen; vielleicht lassen sich diese Beziehungen dereinst einmal aus einer Annahme über den molekularen Aufbau ableiten.

Solche und ähnliche Überlegungen haben mich dazu geführt, die Beschaffung von geeignetem Material für weitere Beobachtungen immer wieder zu versuchen, um den Bestimmungen an elf Kristallen, die ich vor vielen Jahren durchgeführt habe, neue anzureihen. Viel Erfolg haben diese Bestrebungen bisher nicht gehabt, und die Resultate, die zeitraubende und mühsame Beobachtungen am rhomboedrisch kristallisierenden Eisenglanz geliefert haben, sind nicht eben ermutigend. Wie schon früher beim Flußspat hervorgetreten war, erwiesen sich die fast unvermeidlichen Störungen im Aufbau der natürlichen Kristalle als ein schweres Hindernis für *genaue* Bestimmungen. Immerhin verdienen die gewonnenen Zahlen die Mitteilung.

Das Beobachtungsmaterial. Das einzige, für physikalische Untersuchungen geeignete Vorkommen von Eisenglanz ist wohl das aus Peder Ankers Grube auf der Insel Langö bei Kragerö

in Norwegen, und auch dieses ist anscheinend selten geworden, nämlich von Händlern kaum erhältlich. Hr. Bäckström¹⁾ hat an Kristallen aus jenem Fundorte im Jahre 1888 schöne Beobachtungen über thermisches und elektrisches Leitvermögen, wie auch über thermoelektrische Kräfte angestellt. In den neunziger Jahren schickte er mir einige Reste seines Materiales zur Untersuchung, ob es zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten geeignet und ausreichend wäre. Die damals von Steeg und Reuter in Homburg nach meiner Angabe gefertigten Stäbchen zeigten aber so zahlreiche Sprünge, daß sie für die Durchführbarkeit einer Beobachtungsreihe nur wenig Aussichten eröffneten.

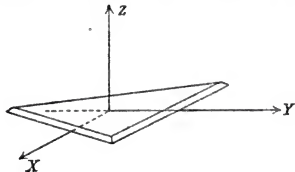
Vor einigen Monaten war Hr. Brögger in Christiania so freundlich, mir aus seinem Besitz ein weiteres Bruchstück Eisenglanz aus derselben Quelle zu schicken, das sich bei der Zerlegung als minder gestört erwies, wie die zuerst verarbeiteten Fragmente, und die Kombination des gesamten Materiales hat dann eine Bestimmung einer neuen Reihe von Elastizitätskonstanten ermöglicht — freilich nicht mit derjenigen Genauigkeit, die bei tadellosem Material durch die Hilfsmittel der Messung an sich möglich gewesen wäre.

Eine große Zahl von Stäbchen zerbrach schon bei geringer Inanspruchnahme, was besonders bei den Drillungsbeobachtungen, die umständliche Vorbereitungen erfordern, lästig war. Von keiner Gattung ließen sich Präparate mit einer 20 mm übersteigenden Länge zu den definitiven Messungen benutzen, und da die Dicke, wie die Theorie verlangt, klein gegen die Länge gemacht, also auf 0,55 bis 0,75 mm herabgedrückt werden mußte, so entstanden Präparate, denen man keine erheblichen Krafteinwirkungen zumuten konnte, — und dies um so weniger, je stärker ihre Zahl allmählich zusammenschmolz. Da überdies Eisenglanz mit einer ziemlichen Zerbrechlichkeit ganz erhebliche (nämlich die des Bergkristall beträchtlich übersteigende) elastische Widerstände verbindet, so waren die schließlich zur Messung gelangenden Deformationen äußerst klein, — kleiner selbst, als seinerzeit bei Beryll, wo

1) H. Bäckström, Öfvers. k. Vetensk. Akad. Förh. 1888. Nr. 8. p. 533.

auch die Dimensionen der Stäbchen durch das Material in engen Grenzen gehalten wurden. Dies brachte besonders bei den Biegungsbeobachtungen eine Schwierigkeit, weil unter diesen Umständen die Eindrücke der Lagerschneiden eine beträchtliche Fehlerquelle darstellten.

Die Präparate. Die Eisenglanzkristalle von der Langö bilden Platten parallel der Basis von bis 20 mm Dicke; die mir verfügbaren Fragmente entbehren der seitlichen Kristallflächen vollständig, indessen gestattet eine deutliche Riefelung der einen hochglänzenden Basisfläche, bestehend aus drei Systemen um 60° gegeneinander geneigter Geraden, die kristallographische Orientierung mit mehr als hinreichender Genauigkeit festzustellen. Diese Linien, die Stufen auf der Platte darstellen, sind durch das Grundrhomboeder bedingt, dessen Flächen nach der Seite hin liegen, wo die Stufe hinweist.



Gemäß dem früher von mir benutzten Gebrauch¹⁾ lege ich die Z -Achse normal zur Basis (nach einer beliebigen Seite), die $+Y$ -Achse lasse ich aus einer nach $+Z$ hin liegenden Rhomboederfläche austreten, so daß die YZ -Ebene Symmetrieebene ist, die X -Achse fällt dann in eine zweizählige Symmetrieachse.

Stäbchen wurden hergestellt

1. mit der Längsrichtung parallel der Z -Achse, wobei die Orientierung der Querrichtungen sowohl für die Biegung, wie für die Drillung ohne Einfluß ist (Bezeichnung 0°),

2. in der YZ -Ebene unter 45° gegen die Z -Achse im ersten Quadranten geneigt, Breite parallel der X -Achse (Bezeichnung $+45^\circ$),

3. ebenso im zweiten Quadranten (Bezeichnung -45°),

4. mit der Längsrichtung parallel zur X -Achse, die Breite parallel zur Y -Achse (Bezeichnung $90^\circ A$).

5. ebenso, aber die Breite parallel der Z -Achse (Bezeichnung $90^\circ B$).

1) Vgl. z. B. W. Voigt, Wied. Ann. 31. p. 495. 1887.

Die Firma Steeg und Reuter in Bad Homburg hat die Präparate in ganz vortrefflicher Weise hergestellt. Die Breitseiten waren hochpoliert und gestatteten so zugleich sehr genaue Dickenbestimmungen, wie auch die Beurteilung des gesunden Zustandes des Materiales.

Die Formeln der Theorie. Die Biegung η eines Stabes aus einem rhomboedrischen Kristall von der Länge L , der Breite B , der Dicke D unter der Belastung P ist gegeben durch die Formel

$$(1) \quad \eta = \frac{E P L^3}{4 B D^3},$$

wobei E den *Biegungsmodul* (das Reziproke des Biegungswiderstandes oder sog. Elastizitätskoeffizienten E) bezeichnet. E drückt sich durch die allgemeinen Elastizitätsmoduln

$$s_{11}, s_{33}, s_{44}, s_{12}, s_{13}, s_{14}$$

eines rhomboedrischen Kristalles aus gemäß der Formel:

$$(2) \quad \begin{cases} E = s_{11}(1 - \gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{13})\gamma^2(1 - \gamma^2) \\ \quad + 2s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2), \end{cases}$$

in der α, β, γ die Richtungskosinus der Längsrichtung des Stäbchens gegen die Kristallachsen bezeichnen.

Für die Drillung τ desselben Stabes durch ein Moment N um die Längsachse gilt im allgemeinen keine ähnlich einfache, einen einzigen Modul enthaltende Formel. Allerdings spielt bei Prismen von einigermaßen gestrecktem Querschnitt ein „*Torsionsmodul*“

$$(3) \quad \begin{cases} T = s_{44} + (2(s_{11} - s_{12}) - s_{44})\gamma_2^2 \\ \quad + 4(s_{11} + s_{33} - s_{44} - 2s_{13})\gamma^2\gamma_1^2 \\ \quad + 4s_{14}(\gamma\beta_1 + \beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) - \beta_2\gamma_2 \end{cases}$$

(unter $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungskosinus von B und D verstanden) die hervorragendste Rolle, aber die Drillung hängt hiervon *allein* in Strenge nur dann ab, wenn D/B verschwindend klein ist.

Drei relativ einfache Fälle führen aber zu der Beziehung

$$(4) \quad \tau = T \frac{3 N L}{D^3 B \left(1 + \frac{D}{B} f\right)},$$

wo f konstant ist, sowie die Querschnitte einigermaßen gestreckt sind, D/B z. B. $\leq 1/3$ ist, und zwar die Fälle (1), (4), (5) der obigen Zusammenstellung. Dabei gilt für (1) 0°

$$T = s_{44}, \quad f = -0,636,$$

(4) $90^\circ A$

$$(5) \quad T = \frac{1}{2}(s_{11} - s_{12}),$$

$$f = -\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{2s_{44}(s_{11}-s_{12})-4s_{14}^2}}{2(s_{11}-s_{12})} \left(1 + 0,510 \frac{4s_{14}^2}{2s_{44}(s_{11}-s_{12})-4s_{14}^2}\right),$$

(5) $90^\circ B$

$$T = s_{44},$$

$$f = -\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{2s_{44}(s_{11}-s_{12})-4s_{14}^2}}{s_{44}} \left(1 + 0,510 \frac{4s_{14}^2}{2s_{44}(s_{11}-s_{12})-4s_{14}^2}\right).$$

Nach diesen Formeln kann man aus Beobachtungen über Biegung die Parameter s_{11} , s_{33} , $s_{44} + 2s_{13}$, s_{14} bestimmen; die Drillung der Gattungen (1), (4), (5) — von denen auch (1) oder (5) ausfallen kann — gestattet eine Berechnung von s_{44} und $s_{11} - s_{12}$, die man am besten durch sukzessive Annäherung ausführt, da die Funktion f nur geringen Einfluß auf τ hat.

Die Beobachtungen. Die Hilfsmittel der Messungen sind an anderer Stelle¹⁾ ausführlich beschrieben, auf die hier nur verwiesen werden mag.

Was die Dimensionen angeht, so wurden die Dicken an 15 Stellen (je fünf auf der Mittellinie und fünf in 1 mm Abstand von den Rändern) gemessen, die Breiten in drei Punkten. Die mittleren Werte, bei denen die auf die Endquerschnitte bezüglichen Messungen nur mit dem halben Gewicht eingeführt sind, finden sich in der folgenden Zusammenstellung unter D und B ; die einzelnen Beobachtungen anzugeben hat bei der geringen Genauigkeit der Endresultate keinen Zweck, — es genüge die Bemerkung, daß die Stäbchen bis auf ca. $1/200$ konstante Dicke und Breite besaßen.

Die benutzte Belastung ist in Grammen angegeben. S bezeichnet das Gewicht der Wagschale, das bei den Biegungsbeobachtungen 11,4, bei den Drillungsbeobachtungen 11,5 g betrug. Der Hebelarm, an dem das drillende Moment angriff, war = 36,9 mm.

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Ergänzbd. 7. p. 189. 1875; Wied. Ann. 31. p. 475. 1887.

Bei der Biegung betrug die an der Skala abgelesene Einheit 0,000688 mm; bei der Drillung war der Abstand der Skala von der Drehachse 2275 mm.

Die angegebenen Senkungen σ und Drillungen τ sind Mittel aus je 3—5 Ablesungen, die stets äußerst genau übereinstimmten; die zwei aufgeführten Zahlen beziehen sich bei den Biegungen auf umgekehrte Lagen des Stäbchens, bei den Drillungen auf Befestigung des einen oder des anderen Stäbchenendes.

Die Eindrückung der Schneiden σ_0 bei der Biegung ist jederzeit durch Kombination von zwei Beobachtungen mit verschiedenen Längen erhalten. Bei mehreren gleichartigen Stäbchen ist der mittlere Wert der an ihnen erhaltenen Zahlen schließlich in Rechnung gesetzt, da die Individualität der Stäbchen bei diesen Bestimmungen viel weniger zur Wirkung kommt, als Zufälligkeiten.

Von den Resultaten ist eine nicht geringe Zahl verworfen worden, wenn die Stäbchen entweder durch ihr Aussehen oder auffallend geringen elastischen oder Festigkeitswiderstand nach ihrer Substanz verdächtig erschienen.

Da alle Fehlerquellen in der Substanz dahin wirken, die Deformationen zu vergrößern, so ist bei der Bildung der Mittelwerte aus den zwei η oder τ , die sich auf dasselbe Stäbchen beziehen, der größere stets nur mit dem halben Gewicht eingeführt.

Biegungen.

$$\begin{aligned} 0^\circ. \quad & \text{Nr. 3. } D = 0,713, \quad B = 4,61, \quad P = S + 50. \\ & L = 21, \quad \sigma = 6,27; 6,08, \quad \sigma_0 = 0,60, \quad \eta = 5,52. \\ & E = 4,47 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Nr. 5. } D = 0,709, \quad B = 4,59, \quad P = S + 50. \\ & L = 20, \quad \sigma = 5,50; 5,46, \quad \sigma_0 = 0,60, \quad \eta = 4,87. \\ & E = 4,46 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Nr. 6. } D = 0,708, \quad B = 4,61, \quad P = S + 100. \\ & L = 18, \quad \sigma = 6,77; 7,07, \quad \sigma_0 = 0,82, \quad \eta = 6,05. \\ & E = 4,20 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Nr. 7. } D = 0,702, \quad B = 4,60, \quad P = S + 50. \\ & L = 18, \quad \sigma = 4,00; 4,20, \quad \sigma_0 = 0,60, \quad \eta = 3,47. \\ & E = 4,24 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$P = S + 100.$$

$$L = 18, \quad \sigma = 7,37; 7,24, \quad \sigma_0 = 0,82, \quad \eta = 6,46.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 3,09; 3,20,$$

$$E = 4,36 \cdot 10^{-8}.$$

$$\underline{E_0 = 4,35 \cdot 10^{-8}, \quad E = 0,230 \cdot 10^8.}$$

$$+45^\circ. \quad \text{Nr. 1.} \quad D = 0,549, \quad B = 4,35, \quad P = S + 50.$$

$$L = 19, \quad \sigma = 10,40; 10,72, \quad \sigma_0 = 0,92, \quad \eta = 9,56.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 3,87; 4,20.$$

$$E = 4,50 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Nr. 2.} \quad D = 0,549, \quad B = 4,39, \quad P = S + 50.$$

$$L = 18, \quad \sigma = 9,28; 9,22, \quad \sigma_0 = 0,92, \quad \eta = 8,32.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 4,00; 4,10.$$

$$E = 4,64 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Nr. 3.} \quad D = 0,552, \quad B = 4,37, \quad P = S + 50.$$

$$L = 15, \quad \sigma = 5,70; 5,78, \quad \sigma_0 = 0,92, \quad \eta = 4,80.$$

$$E = 4,68 \cdot 10^{-8}.$$

$$\underline{E_{+45} = 4,59 \cdot 10^{-8}, \quad E_{+45} = 0,218 \cdot 10^8.}$$

Der Beobachtung an Stäbchen 3 ist wegen dessen geringer Länge und demgemäß geringeren Genauigkeit nur das halbe Gewicht gegeben.

$$-45^\circ. \quad \text{Nr. 2.} \quad D = 0,802, \quad B = 4,58, \quad P = S + 100.$$

$$L = 22, \quad \sigma = 10,93; 10,60, \quad \sigma_0 = 0,82, \quad \eta = 9,90.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 2,62; 2,80.$$

$$E = 5,43 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Nr. 3.} \quad D = 0,572, \quad B = 4,32, \quad P = S + 50.$$

$$L = 21, \quad \sigma = 14,77; 14,63, \quad \sigma_0 = 0,72, \quad \eta = 13,86.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 4,10; 4,10.$$

$$E = 5,30 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Nr. 4.} \quad D = 0,576, \quad B = 4,31, \quad P = S + 50.$$

$$L = 18, \quad \sigma = 9,35; 9,28, \quad \sigma_0 = 0,72, \quad \eta = 8,48.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 3,80; 4,02.$$

$$E = 5,37 \cdot 10^{-8}.$$

$$\underline{E_{-45} = 5,37 \cdot 10^{-8}, \quad E_{-45} = 0,187 \cdot 10^8.}$$

$$90^\circ \text{ A.} \quad \text{Nr. 4.} \quad D = 0,575, \quad B = 5,01, \quad P = S + 50.$$

$$L = 18, \quad \sigma = 6,45; 6,75, \quad \sigma_0 = 0,66, \quad \eta = 5,89.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 2,75; 2,90.$$

$$E = 4,31 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Nr. 5. } D = 0,576, \quad B = 5,04, \quad P = S + 50.$$

$$L = 18, \quad \sigma = 6,40; 6,23, \quad \sigma_0 = 0,66, \quad \eta = 5,63.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 3,01; 2,83.$$

$$E = 4,17 \cdot 10^{-8}.$$

$$90^\circ B. \quad \text{Nr. 4. } D = 0,800, \quad B = 4,21, \quad P = S + 100.$$

$$L = 20, \quad \sigma = 7,22; 7,42, \quad \sigma_0 = 0,68, \quad \eta = 6,61.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 2,42; 2,48.$$

$$E = 4,40 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Nr. 5. } D = 0,798, \quad B = 4,19, \quad P = S + 100.$$

$$L = 20, \quad \sigma = 7,32; 7,18, \quad \sigma_0 = 0,68, \quad \eta = 6,55.$$

$$L = 13, \quad \sigma = 2,52; 2,58.$$

$$E = 4,30 \cdot 10^{-8}.$$

$$\underline{E_{90} = 4,33 \cdot 10^{-8}, \quad E_{00} = 0,231 \cdot 10^8.}$$

Die Stäbchen $90^\circ B$ erschienen etwas unreiner im Material als $90^\circ A$; deshalb sind die an ihnen erhaltenen Zahlen wiederum beim Mittel nur mit halbem Gewicht berücksichtigt.

Von den erhaltenen Zahlen halte ich die für 0° gemäß dem im ganzen gesunden Material für relativ zuverlässig, die für die übrigen Gattungen mögen wegen der Störungen um einige Prozent zu groß sein, doch mag eine Korrektur, als immerhin willkürlich, unterbleiben.

Die Werte der Biegungsmoduln E bestimmen nach (2) folgende Elastizitätsmoduln

$$s_{11} = 4,33 \cdot 10^{-8}, \quad s_{33} = 4,35 \cdot 10^{-8},$$

$$s_{44} + 2s_{13} = 11,24 \cdot 10^{-8}, \quad s_{14} = 0,78 \cdot 10^{-8}.$$

Für *Bergkristall* fand sich

$$s_{11} = 12,73 \cdot 10^{-8}, \quad s_{33} = 9,71 \cdot 10^{-8},$$

$$s_{44} + 2s_{13} = 16,69 \cdot 10^{-8}, \quad s_{14} = -4,23 \cdot 10^{-8};$$

Eisenglanz hat also erheblich kleinere Moduln und somit größere elastische Widerstände als Bergkristall — was einigermaßen unerwartet ist. Es sei übrigens daran erinnert, daß auch Pyrit ganz besonders kleine Moduln aufwies.

Drillungen.

$$0^\circ. \quad \text{Nr. 5. } D = 0,709, \quad B = 4,59, \quad P = S + 10.$$

$$L = 16,55, \quad \tau = 14,60; 14,65.$$

$$T = 11,53 \cdot 10^{-8}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nr. 6. } D &= 0,708, \quad B = 4,61, \quad P = S + 10. \\ L &= 15,60, \quad \tau = 13,65; 13,70. \\ T &= 11,37 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nr. 7. } D &= 0,702, \quad B = 4,60, \quad P = S + 10. \\ L &= 15,37, \quad \tau = 14,10; 14,20. \\ T &= 11,69 \cdot 10^{-8}. \\ T_0 &= 11,55 \cdot 10^{-8}, \quad T_0 = 0,0867 \cdot 10^8. \end{aligned}$$

Daß diese Zahlen so gut übereinstimmen, zeigt (in Übereinstimmung mit dem Aussehen der Stäbchen), daß das Material derselben ein sehr gutes ist; sie stammen aus dem von Hrn. Brögger erhaltenen Kristall. Die Zahlen für den Biegungsmodul sind nicht ganz so sicher; es dürfte dies an der schwierig genau zu bestimmenden Eindrückung der Lagerschneiden liegen. Die aus dem Bäckströmschen Kristall stammenden Stäbchen 1—4 hielten sämtlich das mit $P = S + 10$ ausgeübte Moment nicht aus, was mit ihrem unreineren Aussehen übereinstimmt.

$$\begin{aligned} 90^\circ A. \quad \text{Nr. 1. } D &= 0,779, \quad B = 5,04, \quad P = S + 20. \\ L &= 13,64, \quad \tau = 10,90; 10,95, \quad \bar{\tau} = 10,91. \\ T &= 10,78 \cdot 10^{-8}. \\ \text{Nr. 3. } D &= 0,781, \quad B = 5,01, \quad P = S + 20. \\ L &= 14,62, \quad \tau = 11,60; 11,50, \quad \bar{\tau} = 11,53. \\ T &= 10,54 \cdot 10^{-8}. \\ T_{90A} &= 10,66 \cdot 10^{-8}, \quad T_{90A} = 0,0939 \cdot 10^8. \end{aligned}$$

Die mit 1 und 3 bezeichneten Stäbchen sind dieselben, die nach Abschleifung auf die Dicke von ca. 0,575 mm zu Biegungsbeobachtungen verwendet und als Nr. 4 und 5 in der Zusammenstellung p. 135 u. 136 aufgeführt sind. Ihr Aussehen gestattet den mit ihnen erhaltenen Zahlen einiges Vertrauen entgegenzubringen, obgleich natürlich eine größere Zahl von Beobachtungen die Sicherheit vergrößern würde. Die Stäbchen auch in dem dünneren Zustande zu drillen, erschien aber bei der Gefährdung, die sie beim Einsetzen in den Apparat und beim Zentrieren erfahren, bedenklich. Ein drittes Stäbchen $90^\circ A$ Nr. 2 gestattete zwar eine Ablesung bei Drillung mit $P = S + 20$, zerbrach aber bei der zweiten offenbar infolge innerer Störungen. Aus dieser Beobachtung würde sich $T = 13,2 \cdot 10^{-8}$ berechnen; man sieht aus der Abweichung von den vorstehenden Zahlen, wie groß der Einfluß einer Störung in der Kristallsubstanz sein kann. Demgemäß können

auch die oben angegebenen Werte immerhin um einige Prozent zu groß sein.

$$90^\circ B. \quad \text{Nr. 1. } D = 0,798, \quad B = 4,21, \quad P = S + 10. \\ L = 15,90, \quad r = 16,15; \quad 16,70, \quad \bar{r} = 16,29. \\ T = 12,13 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Nr. 3. } D = 0,796, \quad B = 4,19, \quad P = S + 10. \\ L = 16,04, \quad r = 11,52; \quad 11,24, \quad \bar{r} = 11,31. \\ T = 12,21 \cdot 10^{-8}. \\ T_{90B} = 12,17 \cdot 10^{-8}, \quad T_{90B} = 0,0822 \cdot 10^8.$$

Ein Stäbchen $90^\circ B$ Nr. 2 und das oben angeführte Nr. 3 waren in größerer Länge beobachtet worden, wobei jedes neue Ende eine größere Störung in der Substanz — eine Strecke, die keine Politur annahm — zeigte. Dementsprechend ergaben die Drillungsbeobachtungen enorm vergrößerte Moduln. nämlich rund $14,8$ und $15,4 \cdot 10^{-8}$. Von Stäbchen Nr. 3 brach bei dieser Beobachtung das gestörte Ende ab, und die Wiederholung der Messung lieferte nun den oben angegebenen Wert $12,17 \cdot 10^{-8}$. Analoges geschah mit Nr. 1 gleich beim Beginn der Messung. Aber die beiden oben für $90^\circ B$ angegebenen Werte sind trotz der guten inneren Übereinstimmung immer noch einigermaßen verdächtig, einmal wegen des Aussehens der Stäbchen, dann wegen der Abweichung von den mit der (im Material ausgezeichneten) Gattung 0° erhaltenen, um ca. 5 Proz. kleineren Zahlen, die nach der Theorie den von $90^\circ B$ gegebenen gleich sein sollten. Ich erachte daher das Gewicht der an letzteren Stäbchen erhaltenen Zahlen als geringer und gebe den an den ersteren gewonnenen bei der Berechnung von s_{44} das doppelte Gewicht.

So gelange ich zu den Zahlen

$$2(s_{11} - s_{12}) = 10,66 \cdot 10^{-8}, \quad s_{44} = 11,70 \cdot 10^{-8}.$$

Für Bergkristall fand ich

$$2(s_{11} - s_{12}) = 19,67 \cdot 10^{-8}, \quad s_{44} = 28,73 \cdot 10^{-8},$$

also wiederum erheblich größer.

Folgerungen. Die Kombination dieser Zahlen mit den p. 136 angegebenen liefert schließlich die folgenden Modulwerte

$$s_{11} = 4,33 \cdot 10^{-8}, \quad s_{33} = 4,35 \cdot 10^{-8}, \quad s_{44} = 11,70 \cdot 10^{-8}, \\ s_{12} = -1,00 \cdot 10^{-8}, \quad s_{13} = -0,23 \cdot 10^{-8}, \quad s_{14} = +0,78 \cdot 10^{-8},$$

bei denen aber kaum $0,05 \cdot 10^{-8}$ sicher sein dürfte. Nach dem negativen Vorzeichen von s_{12} und s_{13} erleiden Stäbe von Eisenglanz, deren Längsrichtungen einer der oben festgelegten Koordinatenachsen parallel sind, bei Längszug eine Querkontraktion, verhalten sich also darin analog den bekannten isotropen Körpern oder regelmäßig. Für das gegenteilige Verhalten geben bekanntlich Pyrit und Natriumchlorat Beispiele.

Bei allseitig gleichem Druck p verkürzt sich die Längeneinheit parallel der X - und der Y -Achse um einen Betrag $s_1 p$, wobei

$$s_1 = s_{11} + s_{12} + s_{13} = 3,10 \cdot 10^{-8};$$

parallel der Z -Achse um $s_2 p$, wobei

$$s_2 = 2 s_{13} + s_{33} = 3,89 \cdot 10^{-8}.$$

Der Modul s der kubischen Kompression ist

$$s = 2 s_1 + s_2 = 10,09 \cdot 10^{-8}.$$

Die Elastizitätskonstanten c_{hh} eines rhomboedrischen Kristalles sind mit seinen Moduln s_{hk} durch die symmetrischen Formeln verbunden:

$$\text{a) } c_{11} s_{11} + c_{12} s_{12} + c_{13} s_{13} + c_{14} s_{14} = 1,$$

$$\text{b) } c_{12} s_{11} + c_{11} s_{12} + c_{13} s_{13} - c_{14} s_{14} = 0,$$

$$\text{c) } 2 c_{13} s_{13} + c_{33} s_{33} = 1,$$

$$\text{d) } c_{13} (s_{11} + s_{12}) + c_{33} s_{13} = 0,$$

$$\text{e) } 2 c_{14} s_{14} + c_{44} s_{44} = 1,$$

$$\text{f) } c_{14} (s_{11} - s_{12}) + c_{44} s_{14} = 0.$$

Aus c) und d) folgt

$$c_{13} = -\frac{s_{13}}{N_1}, \quad s_{33} = \frac{s_{11} + s_{12}}{N_1}, \quad N_1 = s_{33} (s_{11} + s_{12}) - 2 s_{13}^2,$$

aus e) und f)

$$c_{14} = -\frac{s_{14}}{N_2}, \quad s_{44} = \frac{s_{11} - s_{12}}{N_2}, \quad N_2 = s_{44} (s_{11} - s_{12}) - 2 s_{14}^2,$$

aus a) und b)

$$c_{11} + c_{12} = \frac{s_{33}}{N_1}, \quad c_{11} - c_{12} = \frac{s_{44}}{N_2}.$$

Demgemäß erhält man für Eisenglanz folgende Zahlenwerte der Elastizitätskonstanten

$$c_{11} = 24,7 \cdot 10^6, \quad c_{33} = 23,2 \cdot 10^6, \quad c_{44} = 8,7 \cdot 10^6,$$

$$c_{12} = 5,6 \cdot 10^6, \quad c_{13} = 1,6 \cdot 10^6, \quad c_{14} = -1,3 \cdot 10^6.$$

Hierbei sind die Einheiten Drucke von 1 g pro 1 mm².

Wegen der komplizierten Beziehungen zwischen den Elastizitätsmoduln und Elastizitätskonstanten sind die letzteren Größen ganz erheblich unsicherer bestimmt, als die ersten. Es ist demgemäß gewagt, aus den vorstehenden Zahlen weitgehende Schlüsse zu ziehen. Immerhin darf man behaupten, daß die beiden Relationen

$$c_{11} = 3 c_{12}, \quad c_{13} = c_{44},$$

welche die molekulare Theorie der Elastizität bei Annahme ungerichteter Kräfte ergibt, auch bei Eisenglanz bestimmt *nicht* erfüllt sind.

Göttingen, den 4. November 1906.

(Eingegangen 8. November 1906.)

8. *Über den Einfluß transversaler Magnetisierung auf die elektrische Leitungsfähigkeit der Metalle (nach gemeinsam mit Hrn. Dr. Franz Weidert ausgeführten Versuchen);*
von Leo Grunmach.

(Im Auszuge vom Verfasser vorgetragen in der Sitzung vom 17. September der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Stuttgart 1906.)¹⁾

Einleitung.

Seitdem W. Thomson²⁾ gezeigt hat, daß der elektrische Widerstand von Eisenstäben durch Magnetisierung derselben geändert wird, ist der Einfluß der Magnetisierung auf die elektrische Leitungsfähigkeit der Metalle häufig Gegenstand von Experimentaluntersuchungen gewesen³⁾, die indessen — wenn man von den ausgedehnten sorgfältigen Versuchen absieht, die sich auf Wismut beziehen und einen gewissen Abschluß erreicht haben — bisher zu einwandsfreien sicheren Ergebnissen nicht geführt haben. Dies kommt wohl in erster Linie daher, daß es sich hier meist um außerordentlich kleine Widerstandsänderungen handelt, die nur bei Anwendung sehr verfeinerter Messungsmethoden beobachtet und leicht durch fremde äußere

1) L. Grunmach, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 8. p. 359. 1906; Phys. Zeitschr. 7. p. 729. 1906.

2) W. Thomson, Trans. Roy. Soc. Febr. 1856; Math. and. Phys. Papers 2. p. 307. 1884.

3) Eine recht vollständige Zusammenstellung der einschlägigen Arbeiten findet sich in Winkelmanns Handb. d. Physik, 2. Aufl. (1905), 4. p. 361 u. 5. p. 459, aus der folgende speziell auf unsere Untersuchung (transversale Magnetisierung) bezüglichen besonders hervorgehoben seien: E. Beetz, Pogg. Ann. 128. p. 202. 1866; Adams, Phil. Mag. (5) 1. p. 153. 1876; De Lucchi, Atti del R. Ist. Ven. 8. p. 17. 1882; v. Ettinghausen, Wien. Ber. 95. p. 714. 1887; D. Goldhammer, Wied. Ann. 31. p. 360. 1887 u. 36. p. 804. 1889; Ph. Lenard, Wied. Ann. 39. p. 636. 1890; Th. des Coudres, Verh. Berl. Physik. Gesellsch. 10. p. 50. 1891; A. Garbasso, Atti di Torino 27. p. 639. 1891; Naturw. Rundschau 6. p. 637. 1891; M. Cantone, Atti Acc. Linc. (5) 1. (1) p. 424. 1892 u. (2) p. 119 u. 277. 1892.

Einflüsse, besonders durch die infolge von Temperaturänderungen bedingten Widerstandsänderungen verdeckt werden können. So erklärt es sich auch, daß die Resultate einzelner Autoren bisweilen einander geradezu widersprechen. Mit Sicherheit ist bisher ein Einfluß der Magnetisierung auf die Leitungsfähigkeit nur noch bei den stark magnetischen Metallen, sowie bei Antimon und Tellur gefunden worden; die wenigen Autoren, die ihre Messungen auch auf andere Metalle ausdehnten, konnten für diese, da sie sich nur der Wheatstoneschen Brückenordnung bedienten, meßbare Widerstandänderungen bei transversaler Magnetisierung nicht nachweisen. Für die Elektronentheorie ist aber die sichere Kenntnis der Widerstandsänderungen verschiedener Metalle im magnetischen Felde von großer Bedeutung.

Montierung der untersuchten Drähte.

In der vorliegenden Arbeit gelangten nun folgende als möglichst rein bezogene Metalle zu eingehender Untersuchung: Silber, Platin, Tantal, Kadmium, Zinn, Gold, Palladium, Zink, Kupfer, Blei, Kobalt, Nickel und Eisen verschiedener Sorte; sie kamen in Form dünner Drähte (0,05 bis 0,3 mm) zur Verwendung. Anfänglich wurden dieselben, nach Art der Lenardschen Spiralen, nach zweimaligem Durchziehen durch dickes Kollodium als bifilare Flachspiralen mit Hilfe von Wachs zwischen dünne Glimmerblättchen eingebettet; die Drahtenden waren an zwei auf einer Hartgummiplatte befestigten Kupferstreifen angeschraubt. Es zeigte sich jedoch bald, daß sich bei dieser Montierung Schwankungen der Temperatur, wie sie schon durch leise Luftbewegungen hervorgerufen werden, bei der hohen Empfindlichkeit der nachher zu beschreibenden Messungsmethode sofort störend bemerkbar machten und eine genaue Messung vereitelten. Auch wenn man die Metallspiralen, ebenso wie die Magnetpole, zwischen denen sie sich befanden, vollständig mit Watte umhüllte, wurde diese durch Schwankungen der Lufttemperatur bewirkte Störung nur teilweise beseitigt, ja, es machte sich dann noch die weitere Fehlerquelle störend bemerkbar, daß von dem Magnet aus durch die immerhin etwas leitende Baumwolle Stromschleifen in die Meßanordnung gelangten, die die Größe des durch die

Magnetisierung bewirkten Galvanometerausschläges beeinflussten (vgl. später p. 149). Deshalb wurden die Glimmerplatten durch Hartgummiplatten ersetzt, die infolge ihrer geringen Wärmeleitungsfähigkeit einen geeigneten Schutz gegen rasche, unregelmäßige Temperaturschwankungen boten. Der störende Einfluß, den die unvermeidliche *gleichmäßige* Änderung der Temperatur ausübte, wurde durch die besondere, später zu beschreibende Methode der Messung eliminiert. Allerdings hatten die so gewickelten Spiralen nunmehr eine größere Dicke, als die zwischen Glimmer gewickelten, und demgemäß konnte nicht mehr mit so geringem Polabstand, also auch nicht mit der höchsten Feldstärke gearbeitet werden.

Fig. 1 erläutert die Art der schließlich bei den dickeren Drähten angewandten Montierung. In eine quadratische Hartgummiplatte von 42 mm Seitenlänge und 1,5 mm Dicke wurden an zwei gegenüberliegenden Seiten, 5 mm vom Rande entfernt und parallel zu diesem, 5 mm breite und 0,5 mm tiefe Rillen eingefräst und in diese Kupferstreifen von 5 mm Breite und 0,5 mm Dicke mittels Sieglack eingekittet. Dann wurde zwischen den letzteren eine dünne Wachsschicht ausgebreitet, auf dieser der mehrfach durch Kollodium gezogene und so isolierte Draht als flache bifilare Spirale aufgewickelt und die beiden Enden desselben, je nach dem Material, mittels Weichlot oder Woodscher Legierung an die Kupferstreifen angelötet. Nachdem dann die fertige Spirale nebst den Lötstellen nochmals mit geschmolzenem Wachs überstrichen war, so daß der Draht vollkommen zwischen Wachs eingebettet lag, wurde, unter Zwischenlage schmalen, dünner Kartonstreifen an den Rändern, eine zweite, gleichgroße und ebenfalls 1,5 mm dicke Hartgummiplatte mit Syndetikon aufgekittet. Das Ganze blieb dann mehrere Tage bis zum völligen Austrocknen unter Pressung.

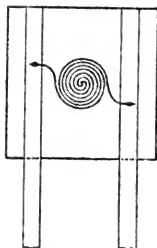


Fig. 1.

Bei den Drähten von 0,1 und 0,05 mm Dicke erwies sich eine etwas andere, durch Fig. 2 dargestellte Montierung als vorteilhafter. Ein dünnes Glimmerblättchen von 16 mm Breite und 18 mm Länge wurde auf den beiden Längsseiten mittels

einer Feile mit feinen Einkerbungen versehen und mit dem betreffenden Draht bewickelt. Eine Isolation durch Kollodium war in diesem Falle nicht nötig, weil die Windungen des Drahtes durch die Einkerbungen sicher in ihrer Lage gehalten

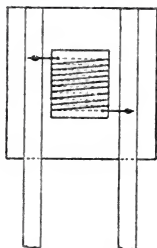


Fig. 2.

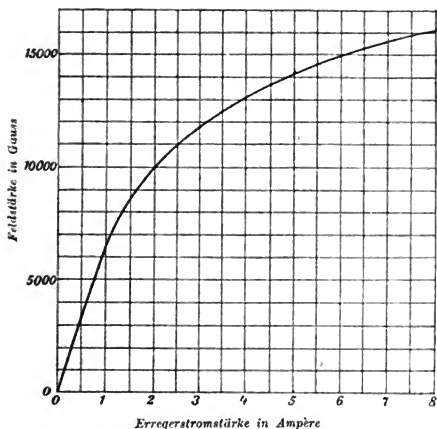
und vor gegenseitiger Berührung geschützt wurden. Um ein Zurückspringen des aufgewickelten Drahtes zu verhindern, waren die Enden durch zwei feine Löcher am Rande des Glimmerblättchens gesteckt. Das bewickelte Blättchen wurde sodann beiderseits mit geschmolzenem Siegelack überzogen und in der aus der Figur ersichtlichen Weise zwischen den beiden Kupferschienen auf der unteren Hartgummiplatte mit Siegelack festgekittet.

Nachdem dann die freien Drahtenden mit den Kupferschienen verlötet waren, wurden rings um die Platte an den Rändern mit Siegelack schmale Kartonstreifen aufge kittet, deren Oberfläche ebenfalls dünn mit Siegelack bestrichen, die zweite Hartgummiplatte aufgelegt und das Ganze zwischen zwei dicken Spiegelplatten unter Druck langsam erwärmt, bis der Siegelack vollkommen geschmolzen war und der Überschuß desselben zwischen den beiden Hartgummiplatten hervorquoll. Die Pressung wurde erst nach dem vollkommenen Erkalten aufgehoben. Widerstandsmessungen vor und nach dem Zukitten lieferten die Kontrolle, daß kein Reißen oder Verschieben der Drähte eingetreten war. Auf diese Weise waren die dünnen Drähte vollkommen in Siegelack eingebettet, so daß auch jegliche Deformation derselben ausgeschlossen war. Bei den stark magnetischen Metallen ist diese Sicherung der Lage natürlich von höchster Wichtigkeit. Die Dicke der nach Fig. 1 oder 2 hergestellten Präparate betrug 3,5 bis 4 mm.

Versuchsanordnung und Messungsmethode.

Als *Elektromagnet* kam bei den ersten vom Verfasser gemeinsam mit Hrn. Ingenieur Erwin Strunz vor mehreren Jahren bereits begonnenen, aber inzwischen unterbrochenen Versuchen der Ruhmkorffsche, bei den Hauptversuchen jedoch der Du Boissche *kleine Halbringelektromagnet* zur Ver-

wendung, den Hr. Kollege Du Bois uns für diese Versuche freundlichst zur Verfügung stellte. Die Polschuhe hatten die Form abgestumpfter Kegel mit etwa 16 mm Durchmesser der flachen Endflächen. Der Abstand derselben betrug 5,0 mm. Genau in der Mitte zwischen den Polflächen, also durch Luft (bisweilen auch durch dazwischen geschobene größere Glimmerblätter) von ihnen getrennt, wurden die vorhin beschriebenen Spiralen mittels eines geeigneten starken Halters senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien unverrückbar aufgestellt.



Kurve für die Feldstärke des Halbringmagneten bei 5 mm Polabstand, gemessen mit Wismutspirale Nr. 143.

Fig. 3.

Um nicht für jede einzelne Messungsreihe während des Verlaufes derselben die Feldstärke besonders bestimmen zu müssen, wurde durch mehrere gut übereinstimmende Messungsreihen mittels einer Wismutspirale die Abhängigkeit der Feldstärke von der Erregerstromstärke (vgl. die obenstehende Kurve, Fig. 3) bestimmt, so daß immer nur die letztere (mit einem Präzisionsampèremeter von Siemens & Halske) beobachtet zu werden brauchte.

Die Messung der Widerstandsänderungen erfolgte ursprünglich nach der Wheatstoneschen Brückenordnung mit Uni-

versalrheostat und Spiegelgalvanometer. Diese Messungsmethode mußte indessen bald aufgegeben werden, erstens, weil sie keine genügende Empfindlichkeit lieferte, und zweitens, weil das Abgleichen zu lange Zeit erforderte, so daß sich inzwischen die Temperatur des Drahtes und mithin auch sein Widerstand zu stark änderte; z. B. machte sich die Temperaturänderung infolge der im Magneten entwickelten Stromwärme bei den hohen Feldstärken schon etwa 20 Sekunden nach seiner Erregung bemerkbar. Die Anwendung von Flüssigkeitsbädern hätte aber zu große Polabstände erfordert und würde nach allen späteren Erfahrungen bei der Ausführung in kleinen Dimensionen wohl auch nicht ausreichend gewesen sein, den Übelstand ganz zu beseitigen. Deshalb wurde eine Widerstandsmessung mit *direktem Ausschlag* gewählt, bei der natürlich, um genügende Empfindlichkeit zu erzielen, nur die Widerstandsänderungen, auf die es ja in erster Linie ankam, zu messen waren, während unabhängig davon der Anfangswiderstand bei bestimmter Temperatur durch besondere genaue Messungen ermittelt wurde. Am bequemsten wäre zur Messung dieser Widerstandsänderungen ein Differentialgalvanometer gewesen, das, um direkte magnetische Störungen seitens des Elektromagneten auszuschließen, ein Drehspuleninstrument hätte sein müssen; da ein solches aber leider nicht zur Verfügung stand, wurde mit *Differentialschaltung der Stromquelle*¹⁾ gearbeitet; die Methode ist im allgemeinen zwar nur für die Vergleichung *großer* Widerstände geeignet, konnte aber im vorliegenden Falle mit sehr gutem Erfolg angewandt werden, weil es sich hier ja um die Be-

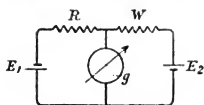


Fig. 4.

stimmung der *Änderung* des Widerstandes, nicht direkt um die Bestimmung seines absoluten Wertes handelte. Das Grundprinzip der Methode ist durch das Schema der Fig. 4 dargestellt; E_1 und E_2 seien zwei gleiche Elektrizitätsquellen; der zu untersuchende Widerstand W wird durch den Rheostatenwiderstand R solange abgeglichen, bis das Galvanometer g keinen Ausschlag mehr zeigt.

1) Vgl. F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. 10. Aufl. 1905. p. 419.

Die von uns angewandte und durch Fig. 5 dargestellte Schaltung ist eine Erweiterung der vorigen und zur Messung kleiner Widerstandsänderungen außerordentlich geeignet. Wegen der Kleinheit der Widerstände der zu untersuchenden Spiralen (meistens nur einige Ohm) konnte für E_1 und E_2 natürlich nicht die volle Spannung eines Elementes zur Anwendung kommen,

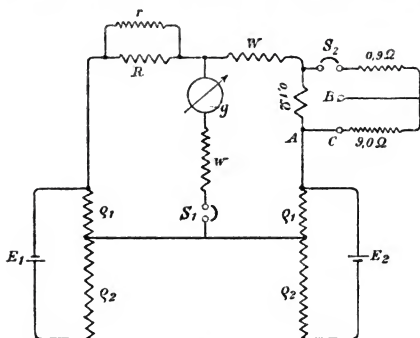


Fig. 5.

sondern sie mußte passend unterteilt werden. Zu dem Zweck wurden die beiden Akkumulatoren E_1 und E_2 durch die Widerstände $\varrho_1 + \varrho_2$ geschlossen und nur die an den Enden von ϱ_1 herrschenden Spannungen zur Messung benutzt. Im allgemeinen betrugen die Widerstände ϱ_1 1 oder 2 Ohm, ϱ_2 50 Ohm.

Ferner wurde zur feineren Abgleichung gegen den zu untersuchenden Draht W an die Klemmen des Stöpselrheostaten R ein bis 100000 Ohm gehender Kurbelrheostat r angelegt, da bei der hohen Empfindlichkeit der ganzen Anordnung eine Änderung von nur 0,1 Ohm in R schon Ausschläge des Galvanometers weit über die ganze Skala bewirkte.

Wie schon erwähnt, sollten die durch die Magnetisierung hervorgerufenen Änderungen des Widerstandes von W unmittelbar aus dem Ausschlag des Galvanometers entnommen werden. Zu diesem Zwecke wurde von Fall zu Fall durch den Versuch bestimmt, welcher Ausschlag des Galvanometers durch eine bekannte (0,01, bez. 0,001 Ohm) Widerstandsänderung in dem

den zu untersuchenden Draht W enthaltenden Zweige hervorgerufen wurde. Deshalb befand sich in diesem Zweige ein Normalwiderstand von 0,1 Ohm, dem mittels des Quecksilberschalters S_2 entweder 0,9 oder 0,9 + 9,0 Ohm parallel geschaltet werden konnten, je nachdem die Klemme A mit B oder mit C verbunden wurde. Die beiden Widerstände 0,9 und 9,0 Ohm waren im Interesse größerer Genauigkeit und Bequemlichkeit als Einzelwiderstände hergestellt. Durch Öffnen des Schalters S_2 konnte so der Widerstand des betreffenden Zweiges um genau 0,01 bez. 0,001 Ohm vergrößert werden. Mit den hierdurch bewirkten Galvanometerausschlägen (Empfindlichkeit ϵ) wurden dann die durch die Magnetisierung bewirkten Ausschläge α direkt verglichen. Da die zu messenden Widerstandsänderungen im Verhältnis zu den Widerständen des ganzen Kreises nur außerordentlich klein waren, so konnte einfach Proportionalität des Galvanometerausschlages mit der Änderung des Widerstandes angenommen werden.

Das Galvanometer g war ein Drehspulengalvanometer von Hartmann und Braun mit Spiegelablesung und 5 Ohm Widerstand der Meßspule, und war gerade seines geringen Widerstandes wegen für diese Schaltung vorzüglich geeignet. Um bei der Messung kleiner Widerstände keine zu starke Dämpfung zu erhalten, konnte dem Galvanometer ein passender Widerstand w vorgeschaltet werden. Der in dem Galvanometerkreis liegende Schalter S_1 war ebenfalls ein Quecksilberschalter.

Auf diese Weise ließen sich, wie aus den weiter unten mitzuteilenden Versuchsergebnissen zu ersehen ist, die Widerstandsänderungen sehr sicher bestimmen.

Auf das sorgfältigste war dafür gesorgt, daß ein Übertritt von Stromschleifen aus der Starkstromleitung des Magneten in die Meßanordnung nicht stattefinde. Deshalb waren alle mit der Starkstromleitung in Verbindung stehenden Teile, also der Elektromagnet, Regulierwiderstände, Schalter, Ampèremeter etc., sowie auch die in der Nähe des Magneten befindlichen Teile der Meßanordnung vom Erdboden durch Hartgummi- und Glasunterlagen isoliert. Wurde diese Vorsichtsmaßregel *nicht* beachtet, so zeigte das Galvanometer stets eine Änderung seiner Einstellung, sobald man die Pole der Starkstromleitung miteinander vertauschte, ohne daß deshalb der Magnet erregt zu

sein brauchte, und es ergaben demgemäß die Messungen der Widerstandsänderungen je nach der Erregungsrichtung etwas verschiedene Werte, bez. wenn man die Metallspiralen enthaltenden Ebonitplatten ganz aus dem Magnetfelde entfernt hatte, so ergaben sich bei Erregung des Magneten im einen oder anderen Sinne gleichgroße, entgegengesetzte Ausschläge des Galvanometers (von etwa 2 bis 3 Skalenteilen). Durch die Isolation der Versuchsanordnung vom Erdboden wurde jedoch diese Fehlerquelle vollkommen beseitigt. Trotzdem wurden bei den Hauptversuchen bei allen Metallen für jede Feldstärke je zwei Messungsreihen mit verschiedenen Richtungen des Erregungsstromes ausgeführt, um jede etwa auftretende Störung an der Abweichung der beiden Resultate sofort erkennen zu können.

Es handelt sich nun nur noch darum, zu zeigen, wie die durch das Steigen der Temperatur bewirkten Änderungen des Widerstandes zu eliminieren waren. Ursprünglich wurden die Beobachtungen in der Art angestellt, daß zur Zeit 0 die momentane Nullstellung n_0 des Galvanometers abgelesen und unmittelbar danach, etwa zur Zeit 2 Sekunden, der Magnet eingeschaltet wurde, daß dann zur Zeit 30'' wieder der Stand n des Galvanometers abgelesen, der Magnet sofort wieder ausgeschaltet wurde und zur Zeit 1' wieder die Ablesung der in der Zwischenzeit weitergewanderten Nullage des Galvanometers erfolgte. Die Differenz der zweiten Galvanometerablesung n gegen das Mittel der beiden Nullagen ergab dann den eigentlichen Ausschlag. Es zeigte sich jedoch bald, daß diese Art der Beobachtung bei den im Verhältnis zum Fortschreiten der Nullage kleinen Ausschlägen nicht zulässig war, weil sie auf der nicht zutreffenden Voraussetzung beruhte, daß die Änderung der Temperatur, also auch des Widerstandes bei unerregtem Feld eine *lineare* Funktion der Zeit wäre. Tatsächlich war nämlich die Zunahme der Temperatur mit der Zeit meistens eine beschleunigte. Deshalb wurde derart verfahren, daß der Magnet immer in Zwischenräumen von einer halben Minute wechselweise erregt und wieder ausgeschaltet und ebenso dazwischen der Stand des Galvanometers *genau* von halber zu halber Minute abgelesen wurde. Man erhielt so für jede volle Minute den Stand n_0 des Galvanometers, der dem Widerstande des Drahtes im unerregten Felde entsprach, und genau da-

zwischen, zu den *halben* Minuten, den dem Widerstand im erregten Felde entsprechenden Stand n . Die so abgelesenen Werte von n_0 wurden dann als Funktion der Zeit in Kurven aufgetragen und aus diesen die den Werten n entsprechenden zeitlichen Nullagen n_0' *graphisch interpoliert*.

Bei der höchsten Erregerstromstärke von 8 Amp. mußte dieses Verfahren etwas abgeändert werden, weil in diesem Falle bei *mehrmaligem* Erregen des Magneten die Galvanometerstellung infolge der Stromwärme zu schnell wanderte. Deshalb wurde bei der dieser Erregerstromstärke entsprechenden Feldstärke H so gearbeitet, daß der Magnet nur *einmal* auf die Dauer von 20" erregt und die Galvanometerstellung n_0 vorher und nachher etwa je fünfmal in Abständen von je 10" abgelesen wurde, um auch hier wieder den Stand n_0' für den Moment graphisch interpolieren zu können, in dem die Ablesung n der Galvanometerstellung bei erregtem Magneten erfolgte.

Da die Drähte (und deshalb auch die Wismutspirale bei der Feldstärkemessung) während einer Messungsreihe nicht aus dem Magnetfelde entfernt wurden, sondern stets zwischen den Polschuhen verblieben, so bezeichnen die angegebenen Widerstandsänderungen, genau genommen, nur die Widerstandsänderungen für eine Zunahme der Feldstärke von dem remanenten Felde des Magneten, das mittels Induktionsschleife zu etwa 160 Gauss bestimmt wurde, auf die Feldstärke $160 + H$.

Bei den diamagnetischen und paramagnetischen Metallen, deren Permeabilität nicht viel von 1 verschieden ist, kann man diese Kurven als identisch ansehen mit den Kurven, welche die Abhängigkeit der Widerstandsänderung von der *absoluten* Feldstärke angeben, weil die angewandten Feldstärken des Magneten bis auf den Wert von 16000 Gauss anstiegen, gegenüber welchem jene Remanenz sehr klein erscheint. Bei den ferromagnetischen Metallen jedoch genügt wegen des hohen Wertes ihrer Permeabilität schon das remanente Feld von 160 Gauss zur Erzeugung einer verhältnismäßig hohen induzierten Feldstärke B im Inneren der Drähte (für Eisen z. B., je nach der Sorte, bis zu 17000 Gauss); diese letztere dürfte aber wohl für die Größe der Widerstandsänderung nicht ohne Einfluß sein. So erklärt es sich, daß bei den ferromagnetischen

Metallen, wenn man vor Beginn einer Messungsreihe den Elektromagneten entmagnetisiert hatte und nach der oben beschriebenen Beobachtungsmethode arbeitete, man nach dem erstmaligen Ausschalten des Magneten nicht auf den Widerstandswert zurückkam, der unter Berücksichtigung des Temperaturganges zu erwarten gewesen wäre. Der erste Punkt der n_0 -Kurve fiel dann nämlich stets aus dem geschlossenen Linienzug heraus. Deshalb wurde bei Eisen, Nickel und Kobalt vor der Messung bei jeder einzelnen Feldstärke der Magnet und damit auch der zwischen den Polen befindliche Draht selbst auf bekannte Art *sorgfältigst* entmagnetisiert und durch Ablesungen in Intervallen von 10 zu 10 Sekunden die Kurven für die Abhängigkeit der Galvanometerstellung von der Zeit vor und nach dem Einschalten des Magneten aufgenommen. Durch graphische *Extrapolation* konnten dann die Werte von n_c' und n' bestimmt werden, die gleichen Zeiten entsprachen; Beobachtungen von n_0 nach dem ersten Widerausschalten des Magneten, fanden also bei den Versuchen mit ferromagnetischen Metallen nicht statt.

An dieser Stelle möge noch auf folgende magnetische Trägheitserscheinung hingewiesen werden: Wenn man bei den ferromagnetischen Metallen nach einer längeren Ruhepause die Widerstandsänderungen bei einer und derselben Feldstärke mehreremal hintereinander bestimmte, so zeigte sich, daß die bei der ersten Magnetisierung beobachtete Widerstandsänderung stets einen kleineren Wert hatte, als die bei den darauffolgenden Magnetisierungen beobachteten Widerstandsänderungen. Dies weist auf dieselbe Erscheinung der Trägheit hin, die man auch bei der Aufnahme von Magnetisierungskurven von Eisen und Stahl beobachtet, und die man durch mehrfache zyklische Magnetisierungen zu beseitigen pflegt. Deshalb müssen die ferromagnetischen Metalle, damit ihre Moleküle die erforderliche Beweglichkeit erhalten, auch behufs Bestimmung ihrer Widerstandsänderungen im magnetischen Felde vorher mehrfachen zyklischen Magnetisierungsprozessen unterworfen werden.

Der Gang einer vollständigen Messungsreihe war also nun der, daß in der Regel zu Anfang und Ende die Empfindlichkeit, d.h. die Ausschlagsänderung des Galvanometers für eine Widerstandsänderung von 0,001 oder 0,01 Ohm im Zweig W bestimmt

wurde. Wegen des Wanderns der Ruhelage erfolgten auch hier die Ablesungen in genau gleichen Zeitintervallen (30 Sekunden); jedoch genügte hier zur Berechnung der zu der Ablesung n gehörigen Ruhelage n_0 ein einfaches Mittelnehmen aus den symmetrisch zu n gelegenen Werten von n_0 , einmal, weil es sich hierbei um beträchtlich größere Ausschläge handelte, und dann vor allem, weil der Verlauf der n_0 -Kurve, solange der Magnet nicht erregt war, ein nahezu geradliniger war. Solange die Temperatur während einer Messungsreihe sich nicht allzu sehr änderte, blieb auch die Empfindlichkeit zu Anfang und Ende fast die gleiche. In diesem Falle wurde zur Berechnung einfach das Mittel aus den beiden zu Anfang und am Schluß jeder Messungsreihe beobachteten Empfindlichkeiten genommen. Wenn sich jedoch zu Ende ein wesentlich anderer Wert der Empfindlichkeit als zu Anfang ergab, wurde die Änderung gleichmäßig über die Messungsreihe verteilt (vgl. Zusammenstellung der Messungen p. 170 ff.). Da während einer Messungsreihe die Ruhelage des Galvanometers natürlich stark nach einer Seite hin wanderte, wurde sie vor Beginn der Messung bei einer jeden Feldstärke durch Regulieren des Rheostaten r stets wieder in den mittleren Teil der Skala zurückgeführt.

Wir gehen nunmehr zur Mitteilung unserer Beobachtungen über. Jedoch soll aus der großen Anzahl der für die verschiedenen Metalle ausgeführten und untereinander gut übereinstimmenden Beobachtungsreihen im folgenden der Raumersparnis wegen nur für einige Metalle je eine vollständige Messungsreihe mitgeteilt werden.

Die eigentlichen Versuche.

Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

n_0 = Nullstellung des Galvanometers.

n = Ablesung am Galvanometer bei erregtem Magneten, bez. bei Zuschalten von + 0,001 Ohm (vgl. oben p. 148).

n_0' = interpolierte Nullstellung des Galvanometers für die Zeit der Ablesung von n .

α = berechneter Ausschlag des Galvanometers = $n - n_0'$.

s = Empfindlichkeit der Anordnung.

J = Erregerstromstärke des Magneten in Ampère.

t = Temperatur des zu untersuchenden Drahtes in °C.

W = Widerstand desselben außerhalb des Feldes.

Stromrichtung I und II bedeuten die beiden verschiedenen Richtungen des Erregerstromes des Magneten.

Kadmium Nr. 1. — 6. Juli 1906.

Von C. A. F. Kahlbaum in Berlin bezogen.

Draht von 0,2 mm Durchmesser. Bifilare Spirale in Wachs nach Fig. 1.

 $W = 2,93 \text{ Ohm bei } 20,47^\circ \text{ C.}$ $\varrho_1 = \text{je } 1 \text{ Ohm} \quad \varrho_2 = \text{je } 50 \text{ Ohm} \quad w = 10 \text{ Ohm.}$ Bestimmung der Empfindlichkeit ε für $\Delta W = + 0,001 \text{ Ohm.}$

Zu Anfang:

Zu Ende:

 $n_0 = 485,4 \quad 504,6 \quad 522,0$ $n_0 = 498,4 \quad 502,0 \quad 502,7$ $n = 521,2_s \quad 539,0$ $n = 526,3 \quad 528,0$ $\varepsilon = +26,2_s \quad +25,7$ $\varepsilon = +26,1 \quad +25,6_s$ Im Mittel: $\varepsilon = + 25,9_s$ Im Mittel: $\varepsilon = + 25,8_s$

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0'	495,2				20,23°		Stromrichtung I
30''		502,1 _s	505,1	0,52		+2,9 _s	
1'	509,1		519,2	0,52		+3,0 _s	
30''	523,2	516,1 _s	532,0	0,52		+2,6 _s	
3'	535,6	529,4			20,23°		
			Mittel: 0,52		20,23°	+2,8 ₇	
0'	492,1				20,28°		Stromrichtung II
30''		496,8 _s	499,7 _s	0,52		+2,9 _s	
1'	501,6		509,0	0,52		+2,7 _s	
30''	511,0	506,3	518,0	0,52		+2,5 _s	
3'	520,0	515,5			20,30°		
			Mittel: 0,52		20,29°	+2,7 _s	
			Hauptmittel: 0,52		20,26°	+2,7 _s	

Stromrichtung II.

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	
0'	490,3	
10''	491,0 _s	
20''	492,0	
30''	492,7 _s	$n_0' = 495,2$
40''	493,6	$n = 548,8_s$
1'		$\alpha = + 53,1_s$
20''	497,3	$J = 8,12$
30''	499,8 _s	$t = 19,96^\circ$
40''	503,7	
50''	508,9	
2'	515,0	

Zeit	n_0	
0'	493,4	
10''	494,3	
20''	495,1	
30''	495,9	$n_0' = 498,0$
40''	496,4	$n = 551,0$
1'		$\alpha = + 53,0$
20''	500,0	$J = 8,18$
30''	502,6	$t = 20,50^\circ$
40''	506,2	
50''	511,6 _s	
2'	517,7	

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	
0'	492,3 ₅	
10''	492,4 ₅	
20''	492,7 ₅	
30''	492,9	$\left\{ \begin{array}{l} n_0' = 493,1 \\ n = 545,3 \\ \alpha = + 52,2 \\ J = 7,98 \\ t = 21,73^\circ \end{array} \right.$
40''	492,8 ₅	
1'		
20''	494,2	
30''	496,0	
40''	498,7	
50''	503,0	
2'	508,0	

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	
0'	489,4	
10''	489,9	
20''	490,1	
30''	490,3	$\left\{ \begin{array}{l} n_0' = 491,4 \\ n = 543,0 \\ \alpha = + 51,6 \\ J = 8,03 \\ t = 22,75^\circ \end{array} \right.$
40''	490,4	
1'		
20''	493,1	
30''	494,7	
40''	497,6	
50''	502,0	
2'	507,6	

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	
0'	499,9	
10''	499,8	
20''	499,6	
30''	499,1	$\left\{ \begin{array}{l} n_0' = 499,0 \\ n = 550,7_5 \\ \alpha = + 51,7_5 \\ J = 8,00 \\ t = 23,74^\circ \end{array} \right.$
40''	499,0	
1'		
20''	501,0	
30''	502,0	
40''	504,4	
50''	508,2	
2'	513,2	

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	
0'	502,7 ₅	
10''	502,6	
20''	502,4	
30''	502,3	$\left\{ \begin{array}{l} n_0' = 502,4 \\ n = 553,7 \\ \alpha = + 51,3 \\ J = 8,06 \\ t = 24,55^\circ \end{array} \right.$
40''	502,0	
1'		
20''	503,7	
30''	504,8	
40''	506,8	
50''	510,0	
2'	514,8	

Mittel: Stromrichtung II $J = 8,12$ $t = 21,68^\circ$ $\alpha = + 52,4_8$ „ I $8,01$ $22,74^\circ$ $+ 51,8_5$ Hauptmittel: $J = 8,06$ $t = 22,21^\circ$ $\alpha = + 52,1,$

Fortsetzung. — 7. Juli 1906.

Bestimmung der Empfindlichkeit ε für $\Delta W = + 0,001$ Ohm.

$n_0 = 489,0$	494,7 ₈	500,0 ₈	
$n = 517,5_8$	523,3		
$\varepsilon = +25,6_8$	+25,9 ₆		Im Mittel: $\varepsilon = + 25,7_9$

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0'	492,2 ₈				21,10°		
30''		494,0	509,2	1,42		+15,2	Stromrichtung II
1'	496,0	498,2	513,0 ₈	1,42		+14,8 ₅	
2'	500,3	503,3	518,0	1,42		+14,7	
30''					21,18°		
3'	506,3 ₈		Mittel: 1,42		21,14°	+14,9 ₂	
0'	502,0				21,22°		
30''		504,6 ₇	520,0	1,40		+15,3 ₈	Stromrichtung I
1'	507,3 ₈	510,2 ₂	525,7 ₈	1,41		+15,5 ₃	
2'	513,1	516,6 ₈	531,3	1,40		+14,6 ₈	
30''					21,30°		
3'	520,2		Mittel: 1,40		21,26°	+15,1 ₇	
			Hauptmittel: 1,41		21,20°	+15,0 ₈	

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0'	496,0				21,40°		
30''		502,3	530,5	2,77		+28,2	Stromrichtung I
1'	509,6 ₈	518,4	547,2	2,80		+28,8	
2'	529,0	541,2	570,0	2,80		+28,8	
30''					21,77°		
3'	555,1		Mittel: 2,79		21,58°	+28,6 ₀	
0'	508,9				22,22°		
30''		513,8	542,3	2,80		+28,5	Stromrichtung II
1'	520,9	529,3	557,2	2,80		+27,9	
2'	539,0	550,4	579,0	2,79		+28,6	
30''					22,50°		
3'	564,0		Mittel: 2,80		22,36°	+28,3 ₈	
			Hauptmittel: 2,79		21,9 ₇	+28,4 ₇	

Gold Nr. 2. — 14. Juli 1906.

Von Heräus in Hanau bezogen.

Draht von 0,1 mm Durchmesser. In Siegellack eingebettet nach Fig. 2.

 $W = 1,228 \text{ Ohm}$ bei $20,47^\circ \text{ C.}$ $q_1 = \text{je } 2 \text{ Ohm}$ $q_2 = \text{je } 50 \text{ Ohm}$ $w = 10 \text{ Ohm.}$ Bestimmung der Empfindlichkeit ε für $\Delta W = + 0,001 \text{ Ohm.}$

Zu Anfang:			Zu Ende:		
$n_0 = 496,3_s$	502,1 _s	507,7	$n_0 = 482,6$	492,4	500,6
$n = 562,0$		567,8	$n = 550,5$		559,2
$\varepsilon = +62,7_s$	+62,8 _s		$\varepsilon = +63,0$	+62,7	
Im Mittel: $\varepsilon = +62,8_2$			Im Mittel: $\varepsilon = +62,8_s$		
Hauptmittel:			$\varepsilon = +62,8_3.$		

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0'	508,0				20,20°		Stromrichtung I
1' 30"	511,9	509,9 _s	510,3	0,56		+0,3 _s	
2' 30"	516,0	513,9 _s	514,4	0,56		+0,4 _s	
3' 30"	520,7	518,3 _s	518,8	0,56		+0,4 _s	
			Mittel: 0,56			+0,4 _s	
0'	516,4						Stromrichtung II
1' 30"	520,0 _s	518,2 _s	518,9	0,56		+0,6 _s	
2' 30"	524,0	522,0 _s	522,5	0,56		+0,4 _s	
3' 30"	527,7	525,8 _s	526,3	0,56	20,30°	+0,4 _s	
			Mittel: 0,56			+0,5 _s	
			Hauptmittel: 0,56	20,25°		+0,4 _s	

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0'	507,4				20,34°		Stromrichtung II
1' 30"	509,8	508,6	510,4	1,47		+1,8 _s	
2' 30"	513,4	511,6	513,2	1,47		+1,6 _s	
3' 30"	520,0	516,7	518,9	1,47		+2,2 _s	
			Mittel: 1,47			+1,8 _s	
0'	506,0						Stromrichtung I
1' 30"	513,2	509,6	511,5	1,47		+1,9 _s	
2' 30"	522,0	517,6	519,7	1,47		+2,1 _s	
2' 30"	531,6	526,8	528,6	1,47	20,50°	+1,8 _s	
			Mittel: 1,47			+1,9 _s	
			Hauptmittel: 1,47	20,42°		+1,9 _s	

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0'	504,0				20,66°		Stromrichtung I
30''		506,6	510,7	2,90		+ 4,1	
1'	510,6						
30''		516,0	519,7	2,89		+ 3,7	
2'	522,7						
30''		531,5	535,2 ₅	2,88		+ 3,7 ₅	
3'	541,7				20,90°		
			Mittel: 2,89		20,78°	+ 3,8 ₅	
0'	503,3				21,30°		Stromrichtung II
30''		505,8	510,4	2,89		+ 4,6	
1'	509,9						
30''		514,9	518,8	2,88		+ 3,9	
2'	521,2						
30''		529,8	533,7	2,87		+ 3,9	
3'	539,7				21,50°		
			Mittel: 2,88		21,40°	+ 4,1 ₅	
			Hauptmittel: 2,88 ₅		21,09°	+ 3,9 ₀	

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	
0'	489,1	
10''	489,3	
20''	489,9	
30''	490,1	$n_0' = 491,0$ $n = 498,5$ $\alpha = + 7,5_0$ $J = 8,10$ $t = 22,05^\circ$
40''	490,4	
1'		
20''	492,5	
30''	494,1	
40''	497,0	
50''	501,3	
2'	506,6	

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	
0'	485,1	
10''	485,9	
20''	486,6	
30''	487,1	$n_0' = 488,9$ $n = 495,4$ $\alpha = + 6,5_0$ $J = 8,03$ $t = 23,02^\circ$
40''	487,5	
1'		
20''	490,7	
30''	492,1	
40''	495,0	
50''	499,1	
2'	504,0	

Hauptmittel: $J = 8,06_5$ $t = 23,03^\circ$ $\alpha = + 7,0_0$.

Palladium Nr. 2. — 14. Juli 1906. Von Heräus in Hanau bezogen.
Draht von 0,05 mm Durchmesser. In Siegellack eingebettet nach Fig. 2.

$W = 10,60$ Ohm bei $20,47^\circ \text{C}$.

$\varrho_1 = \text{je } 2 \text{ Ohm}$ $\varrho_2 = \text{je } 50 \text{ Ohm}$ $w = 0$.

Bestimmung der Empfindlichkeit ε für $\Delta W = + 0,001$ Ohm.

$n_0 =$	480,2	465,4	453,6	
$n =$	496,2	483,6		
$\varepsilon =$	+23,4	+24,1	Im Mittel: $\varepsilon = + 23,7_s$.	

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0'	471,4				23,80°		Stromrichtung I
30''		467,0	471,7	2,80		+4,7	
1'	466,4		474,7	2,79		+3,1	
30''		471,6	502,4	2,78		+2,9	
2'	482,3				23,85°		
30''		499,5				+3,5 ₇	
3'	521,6		Mittel: 2,79		23,83°		
0'	481,1				24,05°		Stromrichtung II
30''		482,5	487,4	2,79		+4,9	
1'	486,5		498,7	2,78		+3,2	
30''		495,5	532,5	2,77		+3,7	
2'	508,3				24,15°		
30''		528,8				+3,9 _s	
3'	553,6		Mittel: 2,78		24,10°		
			Hauptmittel: 2,78 _s		23,97°	+3,7 _s	

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0'	506,0				24,43°		Stromrichtung I
30''		515,9	508,0	1,40		+2,1	
1'	506,3		508,7	1,40		+1,1	
30''		507,6	514,5	1,40		+2,2	
2'	509,7				24,43°		
30''		512,3				+1,8 ₀	
3'	517,2		Mittel: 1,40		24,43°		
0'	509,0				24,48°		Stromrichtung II
30''		509,3	511,3	1,39		+2,0	
1'	509,7		511,0	1,39		+1,1	
30''		509,9	514,1	1,39		+1,8	
2'	510,4				24,48°		
30''		512,3				+1,6 _s	
3'	515,9		Mittel: 1,39		24,48°		
			Hauptmittel: 1,39 _s		24,45°	+1,7 _s	

Bei der folgenden Messungsreihe dienten zur Berechnung der Werte n_0' nur die fünf *vor* dem Erregen des Magneten beobachteten n_0 -Werte. Es zeigte sich nämlich, daß bei *Palladium* die ersten *nach* dem Ausschalten des Magneten beobachteten n_0 -Werte nicht wie bei den anderen para- und diamagnetischen Metallen eine unmittelbare Fortsetzung des ersten Teiles der n_0 -Kurve bilden, sondern stets zu hoch liegen, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die sämtlichen unten mitgeteilten n_0 -Werte als Funktion der Zeit graphisch aufträgt. Es scheint hiernach, daß bei Palladium die durch die Magnetisierung bewirkten Widerstandsvergrößerungen nicht momentan mit dem Aufhören der magnetisierenden Kraft verschwinden, sondern erst nach einer Zeit, die bei der höchsten Feldstärke (16000 Gauss) mehr als eine halbe Minute beträgt, bei geringeren Feldstärken aber etwas kleiner zu sein scheint. Vorläufig ist dies merkwürdige Verhalten des Palladiums nicht weiter von uns verfolgt worden.

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	
0'	501,1 ₈	
10''	501,9	
20''	502,3 ₈	
30''	502,3 ₈	$\left\{ \begin{array}{l} n_0' = 503,0 \\ n = 510,0 \\ \alpha = + 7,0 \\ J = 7,89 \\ t = 24,55^\circ \end{array} \right.$
40''	502,5	
1'		
20''	511,1	
30''	515,0	
40''	524,2	
50''	538,0	
2'	555,0	

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	
0'	482,2	
10''	479,8	
20''	477,1	
30''	474,3	$\left\{ \begin{array}{l} n_0' = 467,0 \\ n = 474,4 \\ \alpha = + 7,4 \\ J = 7,88 \\ t = 25,26^\circ \end{array} \right.$
40''	471,7	
1'		
20''	472,3	
30''	474,0	
40''	480,0	
50''	492,0	
2'	506,0	

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	
0'	505,0	
10''	504,0	
20''	503,3	
30''	502,4	$\left\{ \begin{array}{l} n_0' = 500,2 \\ n = 508,4 \\ \alpha = + 8,2 \\ J = 7,88 \\ t = 25,91^\circ \end{array} \right.$
40''	501,3	
1'		
20''	509,3	
30''	511,5	
40''	518,5	
50''	530,0	
2'	545,0	

Hauptmittel: $J = 7,88$
 $t = 25,24^\circ$
 $\alpha = + 7,5_8$

Zink Nr. 4. — 16. Juli 1906. Von Heräus in Hanau bezogen.
Draht von 0,1 mm Durchmesser, nach Fig. 2 in Siegellack eingebettet.

$W = 2,89$ Ohm bei $21,28^\circ \text{ C.}$

$\varrho_1 = \text{je } 1 \text{ Ohm}$ $\varrho_2 = \text{je } 50 \text{ Ohm}$ $w = 10 \text{ Ohm.}$

Bestimmung der Empfindlichkeit ε für $\Delta W = +0,001 \text{ Ohm.}$

Zu Anfang:			Zu Ende:		
$n_0 = 489,0$	494,8	500,0	$n_0 = 500,4$	515,7	526,9
$n = 518,1$	523,6		$n = 534,3$	547,6	
$\varepsilon = +26,2$	+26,2		$\varepsilon = +26,2_5$	+26,3	
Im Mittel: $\varepsilon = +26,2_0$			Im Mittel: $\varepsilon = +26,2_8$		
Hauptmittel: $\varepsilon = +26,2_4$					

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0' 30"	513,5				19,00°		Stromrichtung I
1' 30"	518,9	516,2	517,5	0,50		+1,3 ₀	
2' 30"	524,4	521,6 ₅	523,0	0,50		+1,3 ₅	
3' 30"	530,0	527,2	528,6	0,50		+1,4 ₀	
			Mittel: 0,50			+1,3 ₅	
0' 30"	535,2						Stromrichtung II
1' 30"	540,1	537,6 ₅	538,9	0,50		+1,2 ₅	
2' 30"	545,7	542,9	544,2	0,50		+1,3 ₀	
3' 30"	551,8	548,7 ₅	549,8	0,50	19,60°	+1,0 ₅	
			Mittel: 0,50			+1,2 ₀	
			Hauptmittel: 0,50		19,30°	+1,2 ₈	

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0' 30"	493,0 ₅				19,63°		Stromrichtung II
1' 30"	496,0 ₅	494,3	500,8	1,41		+6,5	
2' 30"	501,2	498,3	504,9	1,40		+6,6	
3' 30"	508,0	504,4	510,3 ₅	1,40	19,70°	+5,9 ₅	
			Mittel: 1,40 ₅		19,67°	+6,3 ₅	
0' 30"	489,1 ₅				19,92°		Stromrichtung I
1' 30"	492,0	490,3	497,0 ₅	1,40		+6,7 ₅	
2' 30"	495,3	493,7	499,2	1,40		+5,5	
3' 30"	499,9 ₅	497,6	504,1	1,40	20,00°	+6,5	
			Mittel: 1,40		19,96°	+6,2 ₅	
			Hauptmittel: 1,40 ₂		19,82°	+6,3 ₀	

Zeit	n_0	n_0'	n	J	t	α	
0'	471,1				20,10°		Stromrichtung I
30''		473,3	484,3 _s	2,73		+ 11,0 _s	
1'	476,1						
30''		479,7	491,0	2,71		+ 11,3	
2'	485,0						
30''		492,8	503,9	2,73		+ 11,1	
3'	501,8				20,30°		
			Mittel: 2,72 _s		20,20°	+ 11,1 _s	
0'	491,8 _s				20,70°		Stromrichtung II
30''		495,3	506,8	2,78		+ 11,5	
1'	499,6						
30''		504,3	515,8	2,77		+ 11,5	
2'	510,8						
30''		518,9	530,0	2,77		+ 11,1	
3'	527,9				20,90°		
			Mittel: 2,77 _s		20,80°	+ 11,3 ₇	
			Hauptmittel: 2,74 _s		20,50°	+ 11,2 ₆	

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	
0'	498,9	
10''	500,4	
20''	501,9	
30''	503,2 _s	$\left\{ \begin{array}{l} n_0' = 507,2_s \\ n = 526,5_s \\ \alpha = + 19,3_0 \\ J = 7,83 \\ t = 21,37^\circ \end{array} \right.$
40''	504,6 _s	
1'		
20''	510,3 _s	
30''	512,8 _s	
40''	516,3	
50''	521,0	
2'	526,7	

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	
0'	486,3 _s	
10''	487,4	
20''	488,4	
30''	489,5 _s	$\left\{ \begin{array}{l} n_0' = 492,7 \\ n = 511,6 \\ \alpha = + 18,9_0 \\ J = 7,79 \\ t = 22,46^\circ \end{array} \right.$
40''	490,5	
1'		
20''	495,7 _s	
30''	497,7 _s	
40''	500,9	
50''	505,0	
2'	509,9	

Hauptmittel: $J = 7,81$ $t = 21,92^\circ$ $\alpha = + 19,1$.

Kobalt Nr. 2 (vgl. p. 151). — 26. Juli 1906.

Von der Physik.-Techn. Reichsanstalt freundlichst zur Verfügung gestellt.
Band von 0,2 mm Dicke und 0,5 mm Breite. Biflare Spirale in Wachs
nach Fig. 1.

$$W = 0,290 \text{ Ohm bei } 20,40^\circ \text{ C.}$$

$$\varrho_1 = \text{je } 1 \text{ Ohm} \quad \varrho_2 = \text{je } 50 \text{ Ohm} \quad w = 10 \text{ Ohm.}$$

Bestimmung der Empfindlichkeit ε für $\Delta W = + 0,001 \text{ Ohm.}$

$$\begin{array}{rcl} n_0 = & 504,6 & 506,8_5 \quad 510,1_5 \\ n = & 582,0 & 584,7 \\ \varepsilon = & +76,2_8 & +76,2_0 \end{array} \quad \text{Im Mittel: } \varepsilon = +76,2_4.$$

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	n
0'	473,0 ₅	
10''	473,3 ₅	
20''	473,6 ₅	
30''	473,9 ₅	
40''	474,0 ₅	
42''		$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 474,1 \\ n' = 460,1 \\ \alpha = -14,0 \\ J = 0,57 \\ t = 20,35^\circ \end{array} \right.$
1'	461,7	
10''	462,3 ₅	
20''	462,9	
30''	463,1	
40''	463,3	

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	n
0'	489,3 ₅	
10''	489,3	
20''	489,2 ₅	
30''	489,3 ₅	
40''	489,3 ₅	
42''		$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 489,3_5 \\ n' = 476,0 \\ \alpha = -13,3_5 \\ J = 0,57 \\ t = 20,52^\circ \end{array} \right.$
1'	476,0	
10''	476,0	
20''	476,0	
30''	476,0 ₅	
40''	476,0	

Im Mittel für Stromrichtung II: $J = 0,57$, $t = 20,92^\circ$ $\alpha = -13,6_8$.

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	n
0'	480,7	
10''	480,9	
20''	481,0	
30''	481,1	
40''	481,3	
42''		$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 481,3 \\ n' = 468,9 \\ \alpha = -12,4 \\ J = 0,57 \\ t = 20,58^\circ \end{array} \right.$
1'		469,1
10''		469,2 ₅
20''		469,3 ₅
30''		469,4 ₅
40''		469,4 ₅

Hauptmittel:

$$\begin{array}{rcl} J = & 0,57 & \\ t = & 20,55^\circ & \\ \alpha = & -13,0_4 & \end{array}$$

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	n
0'	473,0	
10''	473,0	
20''	472,7	
30''	472,4	
40''	472,2	
42''		
1'	377,0	
10''	376,8	
20''	376,4	
30''	375,9	
40''		

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 472,2 \\ n' = 377,3 \\ \alpha = -94,9 \\ J = 1,33 \\ t = 20,70^\circ \end{array} \right.$$

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	n
0'	462,3 ₅	
10''	462,0 ₅	
20''	462,0	
30''	461,9 ₅	
40''	461,7	
42''		
1'	367,3	
10''	366,9	
20''	366,7	
30''	366,8	
40''		

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 461,7 \\ n' = 367,9 \\ \alpha = -93,8 \\ J = 1,33 \\ t = 20,80^\circ \end{array} \right.$$

Hauptmittel: $J = 1,33$ $t = 20,75^\circ$ $\alpha = -94,3_5$.

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	n
0'	—	
10''	—	
20''	465,8 ₅	
30''	465,2 ₅	
40''	464,6 ₅	
42''		
1'	338,1 ₅	
10''	337,0	
20''	336,4	
30''	335,8	
40''	335,1	

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 464,6_5 \\ n' = 338,8 \\ \alpha = -125,8_5 \\ J = 2,76 \\ t = 21,06^\circ \end{array} \right.$$

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	n
0'	—	
10''	—	
20''	457,5	
30''	457,6	
40''	457,9	
42''		
1'	333,1	
10''	332,4	
20''	332,5	
30''	332,5	
40''	—	

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 457,9 \\ n' = 331,8 \\ \alpha = -126,1 \\ J = 2,76 \\ t = 21,32^\circ \end{array} \right.$$

Hauptmittel: $J = 2,76$ $t = 21,19^\circ$ $\alpha = -125,9_8$.

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	n
0'	490,7 ₅	
10''	490,8	
20''	491,0 ₅	
30''	491,2 ₅	
40''	491,7	
42''		
1'	356,4	
10''	356,0	
20''	356,0	
30''	356,7	
40''	—	

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 491,7 \\ n' = 355,2 \\ \alpha = -134,5 \\ J = 8,00 \\ t = 22,08^\circ \end{array} \right.$$

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	n
0'	496,9	
10''	497,9	
20''	498,4	
30''	499,2	
40''	500,3	
42''		
1'	370,0	
10''	371,2	
20''	372,6	
30''	374,1	
40''	—	

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 500,4 \\ n' = 367,7 \\ \alpha = -132,7 \\ J = 7,94 \\ t = 23,82^\circ \end{array} \right.$$

Hauptmittel: $J = 7,97$ $t = 22,95^\circ$ $\alpha = -133,6$.

Eisen Nr. 2. — 19. Juli 1906.

Von Dieskau & Co. in Charlottenburg bezogen.

Sogenannter Klavierdraht. Durchmesser 0,2 mm. Biflare Spirale in Wachs nach Fig. 1.

 $W = 2,877 \text{ Ohm}$ bei $23,60^\circ \text{ C.}$ $\varrho_1 = \text{je } 1 \text{ Ohm}$ $\varrho_2 = \text{je } 50 \text{ Ohm}$ $w = 10 \text{ Ohm}$ Bestimmung der Empfindlichkeit ε für $\Delta W = + 0,01 \text{ Ohm.}$ $n_0 = 496,2$ $483,2$ $n = 738,2$ $\varepsilon = + 248,5$

Stromrichtung I.

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	n
0'	476,3	
10''	473,8	
20''	471,7	
30''	469,5	
40''	467,3	
42''		
1'		456,4
10''		454,0
20''		451,7
30''		449,3
40''		447,2

 $n'_0 = 466,9$ $n' = 460,7$ $\alpha = - 6,2$ $J = 0,50$ $t = 27,62^\circ$

Zeit	n_0	n
0'	494,0	
10''	492,0	
20''	490,0	
30''	488,1 ₅	
40''	486,4	
42''		
1'		478,9
10''		476,9 ₅
20''		475,0
30''		473,2 ₅
40''		471,6 ₅

 $n'_0 = 485,9$ $n' = 482,4$ $\alpha = - 3,5$ $J = 0,20$ $t = 27,20^\circ$

Fortsetzung. — 23. Juli 1906.

Bestimmung der Empfindlichkeit ε für $\Delta W = + 0,01 \text{ Ohm.}$ $n_0 = 473,2$ $475,4$ $478,0$ $n = 730,1_5$ $732,4$ $\varepsilon = + 255,8_5$ $+ 255,7$ Im Mittel: $\varepsilon = + 255,8.$

Stromrichtung I.

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	n
0'	479,0 ₅	
10''	479,1 ₅	
20''	479,7	
30''	480,0	
40''	480,3 ₅	
42''		
1'		478,0
10''		478,3 ₅
20''		478,9 ₅
30''		479,0 ₅
40''		479,2 ₅

 $n'_0 = 480,5$ $n' = 477,4$ $\alpha = - 3,1$ $J = 0,066$ $t = 19,42^\circ$

Zeit	n_0	n
0'	505,8	
10''	506,4	
20''	506,9	
30''	507,3	
40''	507,7	
42''		
1'		505,6
10''		506,1
20''		506,3
30''		506,7
40''		506,9

 $n'_0 = 507,8$ $n' = 505,4$ $\alpha = - 2,4$ $J = 0,066$ $t = 19,60^\circ$ Hauptmittel: $J = 0,066$ $t = 19,51^\circ$ $\alpha = - 2,7_5.$

Stromrichtung II.

Zeit	n_0	n
0'	502,4	
10''	502,8 ₅	
20''	503,2 ₅	
30''	503,8 ₅	
40''	504,2	
42''		$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 504,3 \\ n' = 501,9 \\ \alpha = -2,4 \end{array} \right.$
1'	502,0	$\left\{ \begin{array}{l} J = 0,030 \\ t = 19,80^\circ \end{array} \right.$
10''	502,3	
20''	502,7	
30''	503,0	
40''	503,4	

Hauptmittel: $J = 0,030$

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	n
0'	506,1	
10''	506,6 ₅	
20''	507,0	
30''	507,2	
40''	507,5	
42''		$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 507,5 \\ n' = 504,3 \\ \alpha = -3,2 \end{array} \right.$
1'	504,9	$\left\{ \begin{array}{l} J = 0,030 \\ t = 19,98^\circ \end{array} \right.$
10''	505,0 ₅	
20''	505,3 ₅	
30''	505,8	
40''	506,1	

 $t = 19,89^\circ$ $\alpha = -2,8$.

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	n
0'	479,0	
10''	479,1	
20''	479,3	
30''	480,0	
40''	480,4	
42''		$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 480,5 \\ n' = 468,7 \\ \alpha = -11,8 \end{array} \right.$
1'	469,0	$\left\{ \begin{array}{l} J = 1,40 \\ t = 20,20^\circ \end{array} \right.$
10''	469,3	
20''	469,7	
30''	470,3	
40''	471,1	

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	n
0'	499,8	
10''	500,3 ₅	
20''	501,0	
30''	501,5	
40''	502,1	
42''		$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 502,2 \\ n' = 474,0 \\ \alpha = -28,2 \end{array} \right.$
1'	481,8	$\left\{ \begin{array}{l} J = -2,80 \\ t = 20,30^\circ \end{array} \right.$
10''	486,0	
20''	490,2	
30''	494,7	
40''	499,1	

Eisen¹⁾ Nr. 5. — 24. Juli 1906.

Von Hartmann & Braun in Bockenheim bezogen.

Draht von 0,05 mm Durchmesser, als bifilare Spirale zwischen Wachs nach Fig. 1 montiert. Bei der folgenden Messung ist jedoch die zweite Hartgummiplatte noch nicht aufgekittet.

$$W = 13,80 \text{ Ohm bei } 20,60^\circ \text{ C.}$$

$$q_1 = \text{je } 1 \text{ Ohm} \quad q_2 = \text{je } 50 \text{ Ohm} \quad w = 0.$$

Bestimmung der Empfindlichkeit ϵ für $\Delta W = + 0,001 \text{ Ohm}$

$$n_0 = 483,9 \quad 483,2$$

$$n = 493,0$$

$$\epsilon = + 9,4_5$$

Stromrichtung I.

Zeit	n_0	n	
0'	470,7		
10''	471,6		
20''	472,7		
30''	473,9		
40''	475,1		
42''			$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 475,1 \\ n' = 327,8 \\ \alpha = -147,3 \\ J = 7,53 \\ t = 21,70^\circ \end{array} \right.$
1'		329,6	
10''		331,2	
20''		335,7	
30''		342,8	
40''		356,8	

Eisen Nr. 5. — 26. Juli 1906.

Dieselbe Spirale wie vorher, jedoch jetzt in gewohnter Weise durch eine zweite Hartgummiplatte verschlossen.

$$W = 13,80 \text{ Ohm bei } 20,60^\circ \text{ C.}$$

$$q_1 = \text{je } 1 \text{ Ohm} \quad q_2 = \text{je } 50 \text{ Ohm} \quad w = 0.$$

Bestimmung der Empfindlichkeit ϵ für $\Delta W = + 0,01 \text{ Ohm}$.

Zu Anfang:			Zu Ende:		
$n_0 = 491,6$	459,8	428,6	$n_0 = 505,0$	538,0	563,8
$n = 567,2$	535,4		$n = 613,8$	643,7	
$\epsilon = + 91,5$	+ 91,2		$\epsilon = + 92,3$	+ 93,0 ₅	
Im Mittel: $\epsilon = + 91,3_5$			Im Mittel: $\epsilon = + 92,6_8$		

1) Bei dieser und den folgenden Messungen wurden die Beobachtungen *nur noch bei Stromrichtung I* ausgeführt, weil sich bei allen früheren Messungen *stets* eine gute Übereinstimmung der bei verschiedenen Stromrichtungen erhaltenen Werte ergeben hatte.

Zeit	n_0	n
0'	485,0	
10''	481,0	
20''	477,2	
30''	473,3	
40''	468,8	
42''		
1'	492,1	
10''	488,3	
20''	484,2	
30''	480,0	
40''	476,0	
$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 468,7 \\ n' = 499,6 \\ \alpha = +30,9 \\ J = 0,32 \\ t = 26,15^\circ \end{array} \right.$		

Zeit	n_0	n
0'	489,3	
10''	484,6	
20''	480,3	
30''	476,0	
40''	471,7	
42''		
1'	508,0	
10''	504,6	
20''	501,0	
30''	497,0	
40''	493,1	
$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 470,8 \\ n' = 515,0 \\ \alpha = +44,2 \\ J = 0,68 \\ t = 25,94^\circ \end{array} \right.$		

Zeit	n_0	n
0'	495,4	
10''	492,0	
20''	488,3	
30''	485,0	
40''	482,0	
42''		
1'	496,6	
10''	494,0	
20''	491,2	
30''	488,0	
40''	485,2 ₅	
$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 481,2 \\ n' = 502,0 \\ \alpha = +20,8 \\ J = 1,05 \\ t = 25,66^\circ \end{array} \right.$		

Zeit	n_0	n
0'	483,7	
10''	480,7	
20''	477,7	
30''	474,4	
40''	471,3	
42''		
1'	439,3	
10''	437,6 ₈	
20''	436,0	
30''	433,8 ₆	
40''	431,7	
$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 470,6 \\ n' = 443,1 \\ \alpha = -27,5 \\ J = 1,40 \\ t = 25,55^\circ \end{array} \right.$		

Zeit	n_0	n
0'	493,4	
10''	493,3 ₅	
20''	493,2 ₅	
30''	493,0	
40''	492,6	
42''		
1'	384,0	
10''	385,2 ₅	
20''	385,7 ₅	
30''	386,5	
40''	388,4	
$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 492,5 \\ n' = 385,3 \\ \alpha = -107,2 \\ J = 2,62 \\ t = 25,50^\circ \end{array} \right.$		

Zeit	n_0	n
0'	508,2 ₅	
10''	512,1 ₈	
20''	516,0	
30''	519,4	
40''	522,6	
42''		
1'	382,0	
10''	390,0	
20''	398,5	
30''	410,0	
40''	426,0	
$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 523,3 \\ n' = 373,0 \\ \alpha = -150,3 \\ J = 8,04 \\ t = 25,88^\circ \end{array} \right.$		

Nickel Nr. 3. — 27. Juli 1906.

Von Heräus in Hanau bezogen.

Draht von 0,1 mm Durchmesser, in Siegellack eingebettet nach Fig. 2.

 $W = 4,065 \text{ Ohm}$ bei $19,83^\circ \text{ C.}$ $\varphi_1 = \text{je } 1 \text{ Ohm}$ $\varphi_2 = \text{je } 250 \text{ Ohm}$ $w = 10 \text{ Ohm.}$ Bestimmung der Empfindlichkeit ε für $\Delta W = + 0,1 \text{ Ohm.}$

Zu Anfang:

$n_0 = 475,3_s$	477,4	478,5
$n = 861,3_s$		863,0
$\varepsilon = +384,9_t$	+385,0_s	

Im Mittel: $\varepsilon = + 385,0_s$

Zu Ende:

$n_0 = 508,1$	512,4	515,3_s
$n = 893,2$		896,8
$\varepsilon = +382,9_s$	+382,9_t	

Im Mittel: $\varepsilon = + 382,9_s$

Zeit	n_0	n
0'	481,2	
10''	481,3_s	
20''	481,6_s	
30''	481,8_s	
40''	482,1	
42''		
1'	484,3_s	
10''	484,7_s	
20''	485,0_s	
30''	485,3_s	
40''	—	

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 482,0_s \\ n' = 483,7 \\ \alpha = + 1,6_s \\ J = 0,05_s \\ t = 19,92^\circ \end{array} \right.$$

Zeit	n_0	n
0'	495,4	
10''	495,7	
20''	495,9_s	
30''	496,1_s	
40''	496,4	
42''		
1'	498,3_s	
10''	498,3_s	
20''	498,3_s	
30''	—	
40''	—	

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 496,5 \\ n' = 498,3_s \\ \alpha = + 1,8_s \\ J = 0,11_s \\ t = 20,16^\circ \end{array} \right.$$

Zeit	n_0	n
0'	—	
10''	—	
20''	501,3_s	
30''	502,2	
40''	502,5	
42''		
1'	489,2_s	
10''	489,0_s	
20''	489,1_s	
30''	—	
40''	—	

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 502,5 \\ n' = 489,1_s \\ \alpha = - 13,3_s \\ J = 0,22_s \\ t = 20,22^\circ \end{array} \right.$$

Zeit	n_0	n
0'	501,0	
10''	501,0	
20''	501,0	
30''	501,0	
40''	501,1	
42''		
1'	367,2	
10''	366,0	
20''	366,0_s	
30''	366,2	
40''	366,3	

$$\left\{ \begin{array}{l} n'_0 = 501,1 \\ n' = 366,0 \\ \alpha = - 135,1 \\ J = 0,44_s \\ t = 20,27^\circ \end{array} \right.$$

Zeit	n_0	n		Zeit	n_0	n	
0'	—			0'	510,2		
10''	—			10''	510,5		
20''	502,0			20''	510,7		
30''	502,1 ₅			30''	511,0		
40''	502,4 ₅						
42''							
1'	(298,5)			1'	294,0		
10''	296,2 ₅			10''	294,6		
20''	296,7 ₅			20''	294,9		
30''	297,0			30''	295,1 ₅		
40''	297,3 ₅			40''	—		

Zeit	n_0	n	
0'	493,6 ₅		
10''	493,9		
20''	494,0		
30''	494,0 ₅		
32''			
1'		263,6 ₅	
10''		264,3	
20''		265,3 ₅	
30''		267,0 ₅	
40''		269,4	

Zusammenstellung der Ergebnisse und Diskussion derselben.

Die Hauptmittel sowie die Schlußresultate für die einzelnen Feldstärken (auch der hier nicht mitgeteilten Beobachtungsreihen) sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Dabei gelten außer den schon auf p. 152 angegebenen Bezeichnungen noch folgende:

W_t = Widerstand in Ohm im Felde Null, auf die Beobachtungstemperatur t umgerechnet.

ΔW = Widerstandsänderung infolge der Magnetisierung,
 $= 0,001 \cdot \frac{\alpha}{\varepsilon}$, bez. $= 0,01 \cdot \frac{\alpha}{\varepsilon}$, bez. $= 0,1 \cdot \frac{\alpha}{\varepsilon}$.

$\frac{\Delta W}{W_t}$ = Widerstandsänderung in Teilen des Ganzen ausgedrückt.

J = Erregerstromstärke des Magneten in Ampère.

H = Feldstärke des Magneten in Gauss.

Material	Juli 1906	Empfindlichkeit ε in Skalenteilen	J in Amp.	H in Gauss	t in $^{\circ}\text{C}$.	α in Skalen teilen	ΔW in Ohm	W in Ohm	ΔW in W
Silber Nr. 1									
$W = 3,67 \Omega$ bei $20,47^{\circ}\text{C}$.	2.	für $+0,001 \Omega$ $+27,5_8$	0,51	3450	23,49	$+0,6_0$	$+0,0,021_6$	3,71 ₄	$+0,0,05_9$
von C. A. F. Kahlbaum in Berlin bezogen, Draht von 0,05 mm Durchmesser; in Siegellack eingebettet nach Fig. 2	"	$+34,3_8$	1,41	8480	19,98	$+3,0_7$	$+0,0,089_4$	3,66 ₈	$+0,0,24_4$
	"	"	2,82	11580	20,96	$+6,6_0$	$+0,0,192_1$	3,67 ₇	$+0,0,52_2$
	"	"	8,03	16200	22,36	$+12,3_6$	$+0,0,359_4$	3,69 ₈	$+0,0,97_9$
Platin Nr. 2									
$W = 13,18 \Omega$ bei $20,47^{\circ}\text{C}$.	2.	für $+0,001 \Omega$ $+18,2_8$	2,81	11500	23,09	$+1,3_7$	$+0,0,07_5$	13,31 ₁	$+0,0,05_6$
von Heraeus in Hanau bezogen, Draht von 0,05 mm Durchmesser; in Siegellack eingebettet nach Fig. 2	4.	$+18,3_6$	8,04	16210	21,70	$+2,5_3$	$+0,0,13_8$	13,24 ₂	$+0,0,10_4$
Tantal Nr. 1									
$W = 22,95 \Omega$ bei $20,47^{\circ}\text{C}$.	4	für $+0,001 \Omega$ $+7,9$	2,79	11470	23,24	$+1,1_0$	$+0,0,13_9$	23,14 ₀	$+0,0,60_2$
von Siemens & Halske in Berlin freundl. zur Verfügung gestellt, Draht von 0,05 mm Durchmesser; in Siegellack eingeb. nach Fig. 2	"	"	8,00	16180	24,29	$+1,4_3$	$+0,0,18_4$	23,21 ₃	$+0,0,79_1$
Kadmium Nr. 1									
$W = 2,93 \Omega$ bei $20,47^{\circ}\text{C}$.	6.	für $+0,001 \Omega$ $+25,9_8$	0,52	3500	20,26	$+2,7_9$	$+0,0,010_7$	2,92 ₇	$+0,0,036_7$
von C. A. F. Kahlbaum in Berlin bezogen, Draht von 0,2 mm Durchmesser; bifilare Spirale in Wachs nach Fig. 1	7.	$+25,7_9$	1,41	8480	21,20	$+15,0_8$	$+0,0,058_3$	2,93 ₉	$+0,0,198_8$
	"	"	2,79	11470	21,97	$+28,4_7$	$+0,0,110_4$	2,94 ₈	$+0,0,374_8$
	6.	$+25,8_8$	8,06	16220	22,21	$+52,1_7$	$+0,0,201_6$	2,95 ₁	$+0,0,683_6$
Zinn Nr. 1									
$W = 4,68 \Omega$ bei $20,47^{\circ}\text{C}$.	13.	für $+0,001 \Omega$ $+38,0_6$	0,50	3430	20,74	$-0,0_1$	$-0,0,000_3$	4,68 ₈	$-0,0,000_6$
von C. A. F. Kahlbaum in Berlin bezogen, Draht von 0,2 mm Durchmesser; in Wachs nach Fig. 1	"	"	1,40	8440	20,98	$+1,4_1$	$+0,0,037_8$	4,69 ₄	$+0,0,08_1$
	"	"	2,78	11460	21,60	$+5,4_6$	$+0,0,143_3$	4,70 ₂	$+0,0,30_3$
	"	"	7,98	16180	22,12	$+10,6_2$	$+0,0,276_4$	4,72 ₇	$+0,0,68_6$

Material	Juli 1906	Empfindlichkeit ε in Skalenteilen	J in Amp.	H in Gauss	t in $^{\circ}\text{C}$.	α in Skalenteilen	ΔW in Ohm	W_t in Ohm	$\Delta W/W_t$
Kobalt Nr. 2 $W = 0,290 \Omega$ bei $20,40^{\circ}\text{C}$. von der Physik.-Techn. Reichsanstalt freundlichst zur Verfügung gestellt, Band von 0,2 mm Dicke und 0,5 mm Breite; bifilare Spirale in Wachs nach Fig. 1	26.	für $+0,001 \Omega$ +76,2 ₄	0,57	3800	20,55	-13,0 ₄	-0,0,017 ₁	0,290 ₁	-0,0,038 ₉
	"	"	1,33	8200	20,75	-94,3 ₅	-0,0,123 ₇	0,290 ₃	-0,0,423 ₃
	"	"	2,76	11420	21,19	-126,0	-0,0,165 ₃	0,290 ₈	-0,0,568 ₈
	"	"	7,97	16160	22,95	-133,6	-0,0,175 ₂	0,292 ₈	-0,0,599 ₁
	27.	für $+0,1 \Omega$ +385,0 ₂	0,054	350	19,92	+1,6 ₈	+0,00042 ₉	4,067 ₀	+0,00010 ₅
Nickel Nr. 3 $W = 4,065 \Omega$ bei $19,83^{\circ}\text{C}$. von Heräus in Hanau bezogen, Drabt von 0,1 mm Durchmesser; in Sieglack eingebettet nach Fig. 2	"	+384,6 ₀	0,110	720	20,16	+1,8 ₈	+0,00048 ₁	4,072 ₄	+0,00011 ₈
	"	+384,1 ₈	0,220	1490	20,22	-13,3 ₈	-0,00347 ₅	4,073 ₇	-0,00085 ₃
	"	+383,7 ₇	0,448	3000	20,27	-135,1	-0,0352 ₁	4,074 ₈	-0,00864 ₀
	"	+383,3 ₈	1,43	8540	20,38	-207,3	-0,0540 ₉	4,077 ₃	-0,0132 ₆
	"	+382,9 ₃	2,85	11580	20,48	-217,7	-0,0568 ₈	4,079 ₈	-0,0189 ₄
Eisen Nr. 2 $W = 2,877 \Omega$ bei $23,60^{\circ}\text{C}$. von Dieskau & Co. in Charlottenburg bezogen, sogenannter Klavierdraht, Durchmesser 0,2 mm; bifilare Spirale in Wachs nach Fig. 1	"	+382,5 ₁	8,03	16200	21,15	-231,4	-0,0603 ₁	4,094 ₈	-0,0147 ₆
	23.	für $+0,01 \Omega$ +255,8	0,030	220	19,89	-2,8	-0,0,010 ₀	2,825 ₈	-0,0,038 ₇
	"	"	0,066	470	19,51	-2,7 ₈	-0,0,010 ₀	2,820 ₈	-0,0,038 ₁
	19.	+248,5	0,200	1330	27,20	-3,5	-0,0,014 ₁	2,926 ₇	-0,0,048 ₁
	"	"	0,50	3400	27,62	-6,2	-0,0,024 ₉	2,932 ₈	-0,0,085 ₁
	23.	+255,8	1,40	8440	20,20	-11,8	-0,0,046 ₁	2,880 ₁	-0,0,163 ₀
	"	"	2,80	11480	20,30	-28,2	-0,0,110 ₁	2,831 ₈	-0,0,438 ₉

Eisen Nr. 3 $W = 4,875 \Omega$ bei $22,04^\circ \text{C}$. von Hartmann & Braun in Bocken- heim bezogen, Draht von 0,1 mm Durch- messer; in Siegellack eingebettet nach Fig. 2	25.	für $+0,01 \Omega$ $+955,8_s$	0,20	1330	23,30	+ 44,0	+ 0,0,123, + 0,0,242, + 0,0,173, + 0,0,053, - 0,0,273, - 0,0,422,	4,904, 4,902, 4,899, 4,900, 4,901, 4,909,	+ 0,0,252, + 0,0,495, + 0,0,354, + 0,0,108, - 0,0,558, - 0,0,859,
	19.	für $+0,01 \Omega$ $+77,7$	0,53	3580	21,32	+ 54,4,	+ 0,00700, + 0,00455, - 0,00045, - 0,01057, - 0,01545,	16,06, 16,09, 16,12, 16,17, 16,32,	+ 0,0,436, + 0,0,283, - 0,0,028, - 0,0,654, - 0,0,947,
	"	+ 77,3	1,01	6520	21,67	+ 35,2			
	"	+ 76,8	1,33	8300	22,12	- 3,5			
	"	+ 76,3	2,72	11360	22,68	- 80,7			
	"	+ 75,3	7,58	15960	24,61	- 116,4			
Eisen Nr. 5 $W = 13,80 \Omega$ bei $20,60^\circ \text{C}$. derselbe Draht, wie Eisen Nr. 4, jedoch als bifilare Spirale in Wachs nach Fig. 1	26.	für $+0,01 \Omega$ $+91,3_s$	0,32	2150	26,15	+ 30,9	+ 0,00338 + 0,00482 + 0,00226 - 0,00298 - 0,01160 - 0,01622	14,16, 14,15, 14,13, 14,12, 14,12, 14,15,	+ 0,0,0239 + 0,0,0341 + 0,0,0160 - 0,0,0211 - 0,0,0821 - 0,0,1146
	"	+ 91,6 _s	0,68	4500	25,94	+ 44,2			
	"	+ 91,8 _s	1,05	6820	25,66	+ 20,8			
	"	+ 92,1 _s	1,40	8440	25,55	- 27,5			
	"	+ 92,4 _s	2,62	11190	25,50	- 107,2			
	"	+ 92,6 _s	8,04	16210	25,88	- 150,3			
Dasselbe	24.	für $+0,001 \Omega$ $+9,45$	7,53	15930	21,70	- 147,3	- 0,01559	13,87 _s	- 0,0,1124

Um einen besseren Überblick über die erhaltenen Resultate zu gewinnen, sind für sämtliche untersuchten Metalle die Widerstandsänderungen $\Delta W/W_t$ als Funktion der Feldstärke H

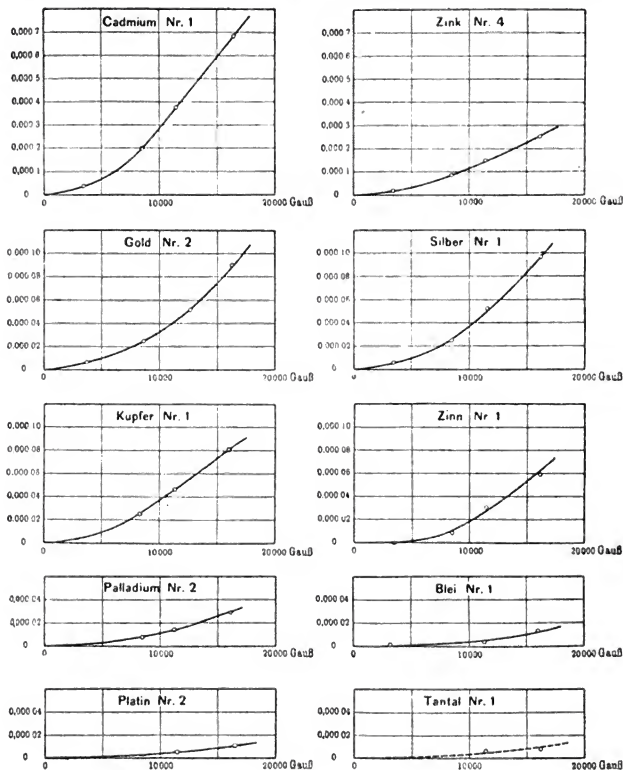


Fig. 6.

graphisch dargestellt (vgl. Fig. 6 u. 7). Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Kurven zum Teil in verschiedenen Ordinatenmaßstäben aufgetragen sind und sich deshalb nicht ohne weiteres direkt miteinander vergleichen lassen.

Betrachtet man diese Kurven in bezug auf den all-

gemeinen Charakter der Widerstandsänderung in Abhängigkeit von der Feldstärke, ohne zunächst auf die numerischen Werte Rücksicht zu nehmen, so fällt sofort auf, daß die ferromagnetischen Metalle (Fig. 7) sich gänzlich verschieden von den para- und diamagnetischen (Fig. 6) verhalten. Die untersuchten

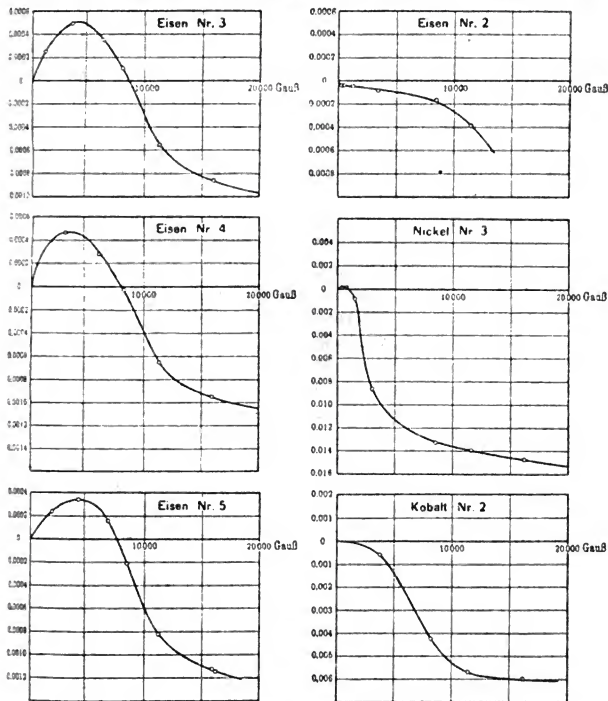


Fig. 7.

para- und diamagnetischen Metalle zeigen durchweg eine Widerstandsvermehrung im magnetischen Feld. Dies Resultat widerspricht insofern der in der Literatur vorhandenen Anschauung, als man bisher glaubte, bei paramagnetischen Metallen ein den diamagnetischen entgegengesetztes Verhalten annehmen zu müssen, d. h. eine Widerstandsverminderung infolge von Magneti-

sierung vorauszusetzen. Diese irrtümliche Auffassung beruht auf der nicht zutreffenden Annahme, daß paramagnetische Metalle sich bei der Magnetisierung ebenso verhalten wie ferromagnetische, also daß man die bei ferromagnetischen tatsächlich beobachteten Widerstandsverminderungen auch glaubte voraussetzen zu dürfen bei paramagnetischen Metallen, bei denen Widerstandsänderungen infolge von Magnetisierung überhaupt bisher noch nicht mit Sicherheit nachgewiesen worden sind. Daß bezüglich der Widerstandsänderungen im Magnetfeld ein solcher Unterschied zwischen paramagnetischen und diamagnetischen Metallen ohne weiteres nicht vorausgesetzt zu werden braucht, erhellt auch schon aus der bekannten und durch die vorliegenden Messungen in größerem Umfange bestätigten Tatsache, daß die Größe der Widerstandsänderungen in keinem bemerkbaren Zusammenhang mit der Suszeptibilität steht.

Allerdings wäre es auch nicht ausgeschlossen, daß die paramagnetischen Metalle im Magnetfelde in Wirklichkeit eine Verminderung ihres spezifischen Widerstandes infolge molekularer Umlagerung erfahren, daß diese Widerstandsverminderung jedoch dadurch verdeckt wird, daß bei Erregung des zur Stromrichtung senkrechten Magnetfeldes die vorher über den Querschnitt des Drahtes gleichmäßig verteilten Stromfäden eine Verschiebung erfahren, wodurch eine scheinbare Vermehrung des Widerstandes eintreten müßte. Ob diese jedoch hinreichen könnte, eine etwa vorhandene Widerstandsverminderung zu verdecken, wäre erst durch Rechnung festzustellen.

Weiter zeigt die Betrachtung der Kurven für die diamagnetischen und paramagnetischen Metalle, daß, abgesehen von Tantal, bei dem die numerischen Werte wegen ihrer Kleinheit nicht ganz sicher sind, *die Widerstandsänderungen mit der Feldstärke zunächst beschleunigt zunehmen* und dann von einer gewissen Feldstärke ab bei manchen Metallen fast linear verlaufen, ein Verhalten, das dem des Wismuts ganz analog ist.

Bemerkenswert ist ferner noch das Verhalten des *Palladiums*; bei diesem ging nämlich, wie bereits bei den Versuchen selbst erwähnt ist (vgl. p. 159), der Widerstand nach dem Aufhören der magnetisierenden Kraft *nicht momentan* wieder auf den Anfangswert zurück, wie bei den anderen Metallen, sondern erst nach etwa $\frac{1}{2}$ Minute. Diese Erscheinung wurde jedoch vorläufig nicht weiter verfolgt.

Ordnet man die diamagnetischen und paramagnetischen

Metalle entsprechend der Größe ihrer Widerstandsänderungen in starken Feldern, so ergibt sich folgende Reihe:

(Wismut), Kadmium, Zink, Silber, Gold, Kupfer, Zinn, Palladium, Blei, Platin, Tantal.

Ein von dem geschilderten wesentlich verschiedenes Verhalten zeigen dagegen die drei untersuchten ferromagnetischen Metalle Eisen, Nickel und Kobalt. Wie auch schon früher bekannt war, zeigen alle drei in starken Feldern eine Widerstandsabnahme. Bei Kobalt nimmt der Widerstand mit wachsender Feldstärke zunächst beschleunigt ab, um dann von einem gewissen Punkt ab wieder immer langsamer abzunehmen. Der Verlauf dieser Kurve erinnert an den der Magnetisierungskurve, was auch von vornherein erklärlich ist, da für die Größe der Widerstandsänderung die im Innern des Drahtes herrschende induzierte Feldstärke sicherlich von Einfluß ist.

Sehr eigentümlich ist das Verhalten der Eisendrähte Nr. 3, 4 und 5; alle drei ergaben nämlich stets bei steigender Feldstärke zuerst eine Widerstandszunahme, deren Maximum bei etwa 4000 Gauss liegt und etwa 0,0004 bis 0,0005 beträgt. Bei etwa 8000 Gauss war dann wieder der Anfangswert des Widerstandes erreicht, und erst darüber hinaus trat eine Widerstandsabnahme ein. Diese Drähte waren von Hartmann und Braun in Bockenheim bezogen, und zwar besitzt Nr. 3 eine Stärke von 0,1 mm, Nr. 4 und 5 dagegen eine solche von nur 0,05 mm. Als bei dem Eisendraht Nr. 3, der zwischen Siegellack eingebettet lag, zuerst diese eigentümliche Umkehr der magnetischen Wirkung, von der in der Literatur nirgends etwas erwähnt ist, beobachtet wurde, lag zunächst die Annahme nahe, der Eisendraht könnte trotz seiner festen Einbettung sich noch bewegen oder würde von dem Magneten so stark angezogen, daß eine Deformation der Kupferstreifen, an denen er angelötet war, hervorgebracht würde. Jedoch war beim Einschalten des Magneten eine Bewegung der den Draht einschließenden Hartgummiplatten nicht zu bemerken, und selbst wenn man die letzteren absichtlich so stark, als es der Polabstand zuließ, mit der Hand bewegte, so wurden hierdurch Ausschläge des Galvanometers von nur etwa 3 bis 5 Skalenteilen hervorgerufen. Der gleichfalls zwischen Siegellack eingeschlossene 0,05 mm dicke Eisendraht Nr. 4 zeigt fast genau das gleiche Verhalten, trotzdem seine Eisenmasse nur etwa $\frac{1}{4}$ von der des Drahtes Nr. 3 beträgt. Es bliebe also zur Erklärung der beobachteten anfänglichen Widerstandsvergrößerung nur noch die Annahme übrig,

daß entsprechend der Dicke der Glimmerblättchen, um die die Drähte gewickelt waren, ein Stück der letzteren, begünstigt durch die hohe Permeabilität des Eisens, vielleicht longitudinal magnetisiert würde und demgemäß eine Widerstandsvergrößerung erführe. Deshalb wurde das Präparat Nr. 5 aus dem gleichen 0,05 mm dicken Draht, aber als *vollkommen flache* bifilare Spirale (auf Wachs) gewickelt. Jedoch auch hier ergab sich, wie aus den Kurven ersichtlich, ein ganz analoges Verhalten.

Allgemein allen Eisensorten scheint dieses eigentümliche Verhalten jedoch nicht zuzukommen. Es wurde nämlich schließlich noch der Eisendraht Nr. 2 untersucht, sogenannter Klavierdraht von 0,2 mm Dicke, der als bifilare Spirale zwischen Wachs gewickelt war; er sollte zu den Hauptversuchen eigentlich nicht benutzt werden, weil diese Art der Montierung bei der verhältnismäßig großen Eisenmasse nicht sicher genug erschien; jedoch können die bei geringeren Feldstärken erhaltenen Resultate wohl als genügend beweiskräftig gelten. Dieser Draht zeigte von vornherein, schon bei den geringsten Feldstärken, eine *Widerstandsabnahme*. Es scheint sich also auch hier zu bestätigen, daß die magnetischen Eigenschaften des Eisens durch geringe Verunreinigungen und Zusätze stark verändert werden. Um vollkommene Klarheit in dieser Frage zu erzielen, wäre die Untersuchung einer möglichst großen Zahl von Eisensorten erforderlich, was einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben soll.

Nach diesen Beobachtungen erklärt es sich auch zwanglos, weshalb manche Forscher beim Eisen eine Widerstandsvermehrung, andere dagegen eine Widerstandsverminderung infolge transversaler Magnetisierung beobachteten.

Ein ähnliches Verhalten wie Eisen zeigte auch der *Nickel*-draht, indem auch hier bei zunehmender Feldstärke *zunächst eine Widerstandsvergrößerung* (im Maximum 0,0005 bei etwa 600 Gauss) und erst von einer Feldstärke von etwa 1000 Gauss ab eine *Widerstandsverminderung* eintrat.

Durch unsere Beobachtungen an Eisen und Nickel werden teilweise die Angaben von Hrn. Garbasso¹⁾ insofern bestätigt, als er ebenfalls für Eisen und Nickel eine Zunahme des Widerstandes bei transversaler Magnetisierung findet; nach ihm soll indessen das Maximum bei 3300 bez. 2200 Gauss liegen und den Wert 0,0026 bez. 0,0125 erreichen. Von einer späteren Abnahme des

1) A. Garbasso, Atti di Torino 27. p. 839. 1891; Naturwiss. Rundschau 6. p. 637. 1891.

Widerstandes bei wachsender Feldstärke unter den Anfangswert ist jedoch in der Arbeit des Hrn. Garbasso nichts erwähnt.

Eine genaue numerische Bestimmung der *remanenten* Widerstandsänderungen bei Eisen, Nickel und Kobalt konnte auf die angegebene Art nicht ausgeführt werden, weil die Drähte ja stets zwischen den Polen verbleiben mußten, und in diesem Falle die Wirkung des remanenten Feldes des Magneten nicht ausgeschaltet werden konnte. Jedoch sei erwähnt, daß bei Eisen Nr. 3, 4 und 5 nach dem Ausschalten des Magneten der Widerstand *stets* einen höheren Wert als zu Anfang besaß, *auch wenn die Feldstärke mehr als 8000 Gauss betragen hatte*, d. h. also, auch nachdem eine Widerstandsverminderung stattgefunden hatte. Nach den angegebenen Resultaten ist dies Verhalten auch ohne weiteres erklärlich, weil diese Eisendrähte in schwachen Magnetfeldern, also auch im remanenten Feld des Elektromagneten, eine Widerstandsvergrößerung zeigen.

Von den *ferromagnetischen* Metallen zeigt in *starken Feldern* Nickel die *größte Widerstandsverminderung*, dann folgt Kobalt und dann Eisen.

In bezug auf die Gesamtheit der Messungen sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß die einzelnen Punkte sich stets dem Verlaufe der Kurven gut einreihen, gleichviel in welcher zeitlichen Aufeinanderfolge die Messungen bei den verschiedenen Feldstärken ausgeführt wurden, d. h. gleichviel ob eine Messungsreihe bei steigender oder bei abnehmender Feldstärke, und ob sie an einem und demselben Tage, oder an verschiedenen Tagen durchgeführt wurde.

In dem vorliegenden Beobachtungsmaterial, das wir durch weitere Versuche noch auszudehnen beabsichtigen, ist nunmehr für eine größere Anzahl von Metallen das Verhalten ihrer Leitfähigkeit im magnetischen Feld mit Sicherheit festgestellt und somit eine breitere experimentelle Grundlage für die Theorie der Elektronenbewegung in Metallen gewonnen.

Zum Schlusse möchten wir auch an dieser Stelle den Herren Kandidaten Alfred Brasch und Georg Fuchs, die uns sowohl bei der Bestimmung der Feldstärken und der absoluten Widerstände der Metalldrähte, als auch bei den Berechnungen der Versuche, wertvolle Hilfe geleistet haben, unseren verbindlichsten Dank aussprechen.

Berlin, Physikalisches Institut der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 23. Oktober 1906).

**9. Die Plancksche Theorie der Strahlung und
die Theorie der spezifischen Wärme;
von A. Einstein.**

In zwei früheren Arbeiten¹⁾ habe ich gezeigt, daß die Interpretation des Energieverteilungsgesetzes der schwarzen Strahlung im Sinne der Boltzmannschen Theorie des zweiten Hauptsatzes uns zu einer neuen Auffassung der Phänomene der Lichtemission und Lichtabsorption führt, die zwar noch keineswegs den Charakter einer vollständigen Theorie besitzt, die aber insofern bemerkenswert ist, als sie das Verständnis einer Reihe von Gesetzmäßigkeiten erleichtert. In der vorliegenden Arbeit soll nun dargetan werden, daß die Theorie der Strahlung — und zwar speziell die Plancksche Theorie — zu einer Modifikation der molekular-kinetischen Theorie der Wärme führt, durch welche einige Schwierigkeiten beseitigt werden, die bisher der Durchführung jener Theorie im Wege standen. Auch wird sich ein gewisser Zusammenhang zwischen dem thermischen und optischen Verhalten fester Körper ergeben.

Wir wollen zuerst eine Herleitung der mittleren Energie des Planckschen Resonators geben, die dessen Beziehung zur Molekularmechanik klar erkennen läßt.

Wir benutzen hierzu einige Resultate der allgemeinen molekularen Theorie der Wärme.¹⁾ Es sei der Zustand eines Systems im Sinne der molekularen Theorie vollkommen bestimmt durch die (sehr vielen) Variabeln $P_1, P_2 \dots P_n$. Der Verlauf der molekularen Prozesse geschehe nach den Gleichungen

$$\frac{dP_\nu}{dt} = \Phi_\nu(P_1, P_2 \dots P_n), \quad (\nu = 1, 2 \dots n)$$

und es gelte für alle Werte der P_ν die Beziehung

$$(1) \quad \sum \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial P_\nu} = 0.$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 132. 1905 u. 20. p. 199. 1905.

Es sei ferner ein Teilsystem des Systemes der P_v bestimmt durch die Variabeln $p_1 \dots p_m$ (welche zu den P_v gehören), und es sei angenommen, daß sich die Energie des ganzen Systems mit großer Annäherung aus zwei Teilen zusammengesetzt denken lasse, von denen einer (E) nur von den $p_1 \dots p_m$ abhänge, während der andere von $p_1 \dots p_m$ unabhängig sei. E sei ferner unendlich klein gegen die Gesamtenergie des Systems.

Die Wahrscheinlichkeit dW dafür, daß die p_v in einem zufällig herausgegriffenen Zeitpunkt in einem unendlich kleinen Gebiete ($dp_1, dp_2 \dots dp_m$) liegen, ist dann durch die Gleichung gegeben¹⁾

$$(2) \quad dW = C e^{-\frac{N}{RT} E} dp_1 \dots dp_m.$$

Hierbei ist C eine Funktion der absoluten Temperatur (T), N die Anzahl der Moleküle in einem Grammäquivalent, R die Konstante der auf das Grammmolekül bezogenen Gasgleichung.

Setzt man

$$\int_{dE} dp_1 \dots dp_m = \omega(E) dE,$$

wobei das Integral über alle Kombinationen der p_v zu erstrecken ist, welchen Energiewerte zwischen E und $E + dE$ entsprechen, so erhält man

$$(3) \quad dW = C e^{-\frac{N}{RT} E} \omega(E) dE.$$

Setzt man als Variable P_v die Schwerpunktskoordinaten und Geschwindigkeitskomponenten von Massenpunkten (Atomen, Elektronen), und nimmt man an, daß die Beschleunigungen nur von den Koordinaten, nicht aber von den Geschwindigkeiten abhängen, so gelangt man zur molekular-kinetischen Theorie der Wärme. Die Relation (1) ist hier erfüllt, so daß auch Gleichung (2) gilt.

Denkt man sich speziell als System der p_v ein elementares Massenteilchen gewählt, welches längs einer Geraden Sinusschwingungen auszuführen vermag, und bezeichnet man mit x bez. ξ momentane Distanz von der Gleichgewichtslage bez. Geschwindigkeit desselben, so erhält man

$$(2a) \quad dW = C e^{-\frac{N}{RT} E} dx d\xi$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 11. p. 170 u. f. 1903.

und, da $\int dx d\xi = \text{konst. } dE$, also $\omega = \text{konst.}$ zu setzen ist¹⁾:

$$(3a) \quad dW = \text{konst. } e^{-\frac{N}{RT} E} dE.$$

Der Mittelwert der Energie des Massenteilchens ist also:

$$(4) \quad \bar{E} = \frac{\int E e^{-\frac{N}{RT} E} dE}{\int e^{-\frac{N}{RT} E} dE} = \frac{RT}{N}.$$

Formel (4) kann offenbar auch auf ein geradlinig schwingendes Ion angewendet werden. Tut man dies, und berücksichtigt man, daß zwischen dessen mittlerer Energie $\bar{E}$ und der Dichte ϱ_ν der schwarzen Strahlung für die betreffende Frequenz nach einer Planckschen Untersuchung²⁾ die Beziehung

$$(5) \quad \bar{E}_\nu = \frac{L^3}{8\pi\nu^2} \varrho_\nu$$

gelten muß, so gelangt man durch Elimination von $\bar{E}$ aus (4) und (5) zu der Reileighschen Formel

$$(6) \quad \varrho_\nu = \frac{R}{N} \frac{8\pi\nu^2}{L^3} T,$$

welcher bekanntlich nur die Bedeutung eines Grenzesatzes für große Werte von T/ν zukommt.

Um zur Planckschen Theorie der schwarzen Strahlung zu gelangen, kann man wie folgt verfahren.³⁾ Man behält Gleichung (5) bei, nimmt also an, daß durch die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität der Zusammenhang zwischen Strahlungsdichte und $\bar{E}$ richtig ermittelt sei. Dagegen verläßt man Gleichung (4), d. h. man nimmt an, daß die Anwendung der molekular-kinetischen Theorie den Widerspruch mit der Erfahrung bedinge. Hingegen halten wir an den Formeln (2) und (3) der allgemeinen molekularen Theorie der Wärme fest. Statt daß wir indessen gemäß der molekular-kinetischen Theorie

$$\omega = \text{konst.}$$

setzen, setzen wir $\omega = 0$ für alle Werte von E , welche den Werten $0, \epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon$ etc. nicht außerordentlich nahe liegen. Nur

1) Weil $E = ax^2 + b\xi^2$ zu setzen ist.

2) M. Planck, Ann. d. Phys. **1.** p. 99. 1900.

3) Vgl. M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. J. Ambr. Barth. 1906. §§ 149, 150, 154, 160, 166.

zwischen 0 und $0 + \alpha$, ϵ und $\epsilon + \alpha$, 2ϵ und $2\epsilon + \alpha$ etc. (wo bei α unendlich klein sei gegen ϵ) sei ω von Null verschieden, derart, daß

$$\int_0^{\alpha} \omega dE = \int_{\epsilon}^{\epsilon + \alpha} \omega dE = \int_{2\epsilon}^{2\epsilon + \alpha} \omega dE = \dots = A$$

sei. Diese Festsetzung involviert, wie man aus Gleichung (3) sieht, die Annahme, daß die Energie des betrachteten Elementargebildes lediglich solche Werte annehme, die den Werten 0, ϵ , 2ϵ etc. unendlich nahe liegen.

Unter Benutzung der eben dargelegten Festsetzung für ω erhält man mit Hilfe von (3):

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\int E e^{-\frac{N}{RT} E} \omega(E) dE}{\int e^{-\frac{N}{RT} E} \omega(E) dE} = \frac{0 + A \epsilon e^{-\frac{N}{RT} \epsilon} + A \cdot 2\epsilon e^{-\frac{N}{RT} 2\epsilon} \dots}{A + A e^{-\frac{N}{RT} \epsilon} + A e^{-\frac{N}{RT} 2\epsilon} + \dots} \\ &= \frac{\epsilon}{e^{\frac{N}{RT} \epsilon} - 1}. \end{aligned}$$

Setzt man noch $\epsilon = (R/N) \beta \nu$ (gemäß der Quantenhypothese), so erhält man hieraus:

$$(7) \quad \bar{E} = \frac{\frac{R}{N} \beta \nu}{e^{\frac{\beta \nu}{T}} - 1},$$

sowie mit Hilfe von (5) die Plancksche Strahlungsformel:

$$\rho_{\nu} = \frac{8\pi}{L^3} \cdot \frac{R\beta}{N} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{\beta \nu}{T}} - 1}.$$

Gleichung (7) gibt die Abhängigkeit der mittleren Energie des Planckschen Resonators von der Temperatur an.

Aus dem Vorhergehenden geht klar hervor, in welchem Sinne die molekular-kinetische Theorie der Wärme modifiziert werden muß, um mit dem Verteilungsgesetz der schwarzen Strahlung in Einklang gebracht zu werden. Während man sich nämlich bisher die molekularen Bewegungen genau denselben Gesetzmäßigkeiten unterworfen dachte, welche für die Bewegungen der Körper unserer Sinnenwelt gelten (wir fügen

wesentlich nur das Postulat vollständiger Umkehrbarkeit hinzu), sind wir nun genötigt, für schwingungsfähige Ionen bestimmter Frequenz, die einen Energieaustausch zwischen Materie und Strahlung vermitteln können, die Annahme zu machen, daß die Mannigfaltigkeit der Zustände, welche sie anzunehmen vermögen, eine geringere sei als bei den Körpern unserer Erfahrung. Wir mußten ja annehmen, daß der Mechanismus der Energieübertragung ein solcher sei, daß die Energie des Elementargebildes ausschließlich die Werte 0 , $(R/N)\beta\nu$, $2(R/N)\beta\nu$ etc. annehmen könne.¹⁾

Ich glaube nun, daß wir uns mit diesem Resultat nicht zufrieden geben dürfen. Es drängt sich nämlich die Frage auf: Wenn sich die in der Theorie des Energieaustausches zwischen Strahlung und Materie anzunehmenden Elementargebilde nicht im Sinne der gegenwärtigen molekular-kinetischen Theorie auffassen lassen, müssen wir dann nicht auch die Theorie modifizieren für die anderen periodisch schwingenden Gebilde, welche die molekulare Theorie der Wärme heranzieht? Die Antwort ist nach meiner Meinung nicht zweifelhaft. Wenn die Plancksche Theorie der Strahlung den Kern der Sache trifft, so müssen wir erwarten, auch auf anderen Gebieten der Wärmetheorie Widersprüche zwischen der gegenwärtigen molekular-kinetischen Theorie und der Erfahrung zu finden, die sich auf dem eingeschlagenen Wege heben lassen. Nach meiner Meinung trifft dies tatsächlich zu, wie ich im folgenden zu zeigen versuche.

Die einfachste Vorstellung, die man sich über die Wärmebewegung in festen Körpern bilden kann, ist die, daß die einzelnen in denselben enthaltenen Atome Sinusschwingungen um Gleichgewichtslagen ausführen. Unter dieser Voraussetzung erhält man durch Anwendung der molekular-kinetischen Theorie (Gleichung (4)) unter Berücksichtigung des Umstandes, daß jedem Atom drei Bewegungsfreiheiten zuzuschreiben sind,

1) Es ist übrigens klar, daß diese Voraussetzung auch auf schwingungsfähige Körper auszudehnen ist, die aus beliebig vielen Elementargebilden bestehen.

für die auf das Grammäquivalent bezogene spezifische Wärme des Stoffes

$$c = 3 R n$$

oder — in Grammkalorien ausgedrückt —

$$c = 5,94 n,$$

wenn n die Anzahl der Atome im Molekül bedeutet. Es ist bekannt, daß diese Beziehung für die meisten Elemente und für viele Verbindungen im festen Aggregatzustand mit bemerkenswerter Annäherung erfüllt ist (Dulong-Petitsches Gesetz, Regel von F. Neumann und Kopp).

Betrachtet man jedoch die Tatsachen etwas genauer, so begegnet man zwei Schwierigkeiten, die der Anwendbarkeit der Molekulartheorie enge Grenzen zu ziehen scheinen.

1. Es gibt Elemente (Kohlenstoff, Bor und Silizium), welche im festen Zustande bei gewöhnlicher Temperatur eine bedeutend kleinere spezifische Atomwärme besitzen als 5,94. Es haben ferner alle festen Verbindungen, in denen Sauerstoff, Wasserstoff oder mindestens eines der eben genannten Elemente vorkommen, eine kleinere spezifische Wärme pro Grammolekül als $n \cdot 5,94$.

2. Hr. Drude hat gezeigt¹⁾, daß die optischen Erscheinungen (Dispersion) dazu führen, jedem Atom einer Verbindung mehrere unabhängig voneinander bewegliche Elementarmassen zuzuschreiben, indem er mit Erfolg die ultraroten Eigenfrequenzen auf Schwingungen der Atome (Atomionen), die ultravioletten Eigenfrequenzen auf Schwingungen von Elektronen zurückführte. Hieraus ergibt sich für die molekularkinetiche Theorie der Wärme eine zweite bedeutende Schwierigkeit, indem die spezifische Wärme — da die Zahl der beweglichen Massenzentren pro Molekül größer ist als dessen Atomzahl — den Wert $5,94 n$ beträchtlich übersteigen müßte.

Nach dem Obigen ist hierzu folgendes zu bemerken. Wenn wir die Träger der Wärme in festen Körpern als periodisch schwingende Gebilde ansehen, deren Frequenz von ihrer Schwingungsenergie unabhängig ist, dürfen wir nach der Planckschen Theorie der Strahlung nicht erwarten, daß die

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 14. p. 677. 1904.

spezifische Wärme stets den Wert 5,94 n besitze. Wir haben vielmehr zu setzen (7)

$$\bar{E} = \frac{3R}{N} \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1}.$$

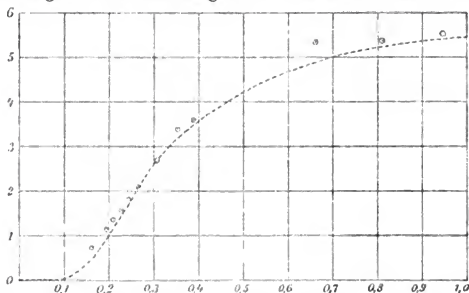
Die Energie von N solchen Elementargebilden, in Grammkalorien gemessen, hat daher den Wert

$$5,94 \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1},$$

so daß jedes derartige schwingende Elementargebilde zur spezifischen Wärme pro Grammäquivalent den Wert

$$(8) \quad 5,94 \frac{e^{\frac{\beta\nu}{T}} \cdot \left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1\right)^2}.$$

beiträgt. Wir bekommen also, indem wir über alle Gattungen von schwingenden Elementargebilden summieren, welche in dem



betreffenden festen Stoffe vorkommen, für die spezifische Wärme pro Grammäquivalent den Ausdruck¹⁾

$$(8a) \quad c = 5,94 \sum \frac{e^{\frac{\beta\nu}{T}} \left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1\right)^2}.$$

Die vorstehende Figur²⁾ zeigt den Wert des Ausdruckes (8) in Funktion von $x = (T/\beta\nu)$. Wenn $(T/\beta\nu) > 0,9$, unterscheidet

1) Die Betrachtung läßt sich leicht auf anisotrope Körper ausdehnen.

2) Vgl. deren gestrichelte Kurve.

sich der Beitrag des Gebildes zur molekularen spezifischen Wärme nicht beträchtlich vom Werte 5,94, der auch aus der bisher akzeptierten molekular-kinetischen Theorie sich ergibt; je kleiner ν ist, bei um so tieferen Temperaturen wird dies bereits der Fall sein. Wenn dagegen $(T/\beta\nu) < 0,1$, so trägt das betreffende Elementargebilde nicht merklich zur spezifischen Wärme bei. Dazwischen findet ein anfänglich rascheres, dann langsames Wachsen des Ausdruckes (8) statt.

Aus dem Gesagten folgt zunächst, daß die zur Erklärung der ultravioletten Eigenfrequenzen anzunehmenden schwingungsfähige Elektronen bei gewöhnlicher Temperatur ($T = 300$) zur spezifischen Wärme nicht merklich beitragen können; denn die Ungleichung $(T/\beta\nu) < 0,1$ geht für $T = 300$ über in die Ungleichung $\lambda < 4,8\mu$. Wenn dagegen ein Elementargebilde die Bedingung $\lambda > 48\mu$ erfüllt, so muß es nach dem Obigen bei gewöhnlicher Temperatur zur spezifischen Wärme pro Grammäquivalent nahezu den Beitrag 5,94 liefern.

Da für die ultraroten Eigenfrequenzen im allgemeinen $\lambda > 4,8\mu$ ist, so müssen nach unserer Auffassung jene Eigenschwingungen einen Beitrag zur spezifischen Wärme liefern, und zwar einen um so bedeutenderen, je größer das betreffende λ ist. Nach Drudes Untersuchungen sind es die ponderablen Atome (Atomionen) selbst, welchen diese Eigenfrequenzen zuzuschreiben sind. Es liegt also am nächsten, als Träger der Wärme in festen Körpern (Isolatoren) ausschließlich die positiven Atomionen zu betrachten.

Wenn die ultraroten Eigenschwingungsfrequenzen ν eines festen Körpers bekannt sind, so wäre also nach dem Gesagten dessen spezifische Wärme sowie deren Abhängigkeit von der Temperatur durch Gleichung (8a) vollkommen bestimmt. Deutliche Abweichungen von der Beziehung $c = 5,94n$ wären bei gewöhnlicher Temperatur zu erwarten, wenn der betreffende Stoff eine optische ultrarote Eigenfrequenz aufweist, für welche $\lambda < 48\mu$; bei genügend tiefen Temperaturen sollen die spezifischen Wärmen aller festen Körper mit sinkender Temperatur bedeutend abnehmen. Ferner muß das Doulong-Petitsche Gesetz sowie das allgemeinere Gesetz $c = 5,94n$ für alle Körper bei genügend hohen Temperaturen gelten, falls sich bei letzteren keine neuen Bewegungsfreiheiten (Elektronionen) bemerkbar machen.

Die beiden oben genannten Schwierigkeiten werden durch die neue Auffassung beseitigt, und ich halte es für wahrscheinlich, daß letztere sich im Prinzip bewähren wird. Daran, daß sie den Tatsachen exakt entspreche, ist natürlich nicht zu denken. Die festen Körper erfahren beim Erwärmen Änderungen der molekularen Anordnung (z. B. Volumänderungen), die mit Änderungen des Energieinhaltes verbunden sind; alle festen Körper, die elektrisch leiten, enthalten frei bewegliche Elementarmassen, die zur spezifischen Wärme einen Beitrag liefern; die ungeordneten Wärmeschwingungen sind vielleicht von etwas anderer Frequenz als die Eigenschwingungen der nämlichen Elementargebilde bei optischen Prozessen. Endlich aber ist die Annahme, daß die in Betracht kommenden Elementargebilde eine von der Energie (Temperatur) unabhängige Schwingungsfrequenz besitzen, ohne Zweifel unzulässig.

Immerhin ist es interessant, unsere Konsequenzen mit der Erfahrung zu vergleichen. Da es sich nur um rohe Annäherung handelt, nehmen wir gemäß der F. Neumann-Kopp'schen Regel an, daß jedes Element, auch wenn dasselbe abnorm kleine spezifische Wärme besitzt, in allen seinen festen Verbindungen den gleichen Beitrag zur molekularen spezifischen Wärme liefere. Die in nachstehender Tabelle angegebenen Zahlen sind dem Lehrbuche der Chemie von Roscoe entnommen. Wir bemerken, daß alle Elemente von abnorm kleiner Atomwärme kleines Atomgewicht besitzen; dies ist nach unserer

Element	Spezifische Atomwärme	$\lambda_{\text{ber.}}$
S und P	5,4	42
Fl	5	33
O	4	21
Si	3,8	20
B	2,7	15
H	2,3	13
C	1,8	12

Auffassung zu erwarten, da *ceteris paribus* kleinen Atomgewichten große Schwingungsfrequenzen entsprechen. In der letzten Spalte der Tabelle sind die Werte von λ in Mikron angegeben, wie sie sich aus diesen Zahlen unter der Annahme,

daß letztere für $T = 300$ gelten, mit Hilfe der dargestellten Beziehung zwischen x und c ergeben.

Wir entnehmen ferner den Tabellen von Landolt und Börnstein einige Angaben über ultrarote Eigenschwingungen (metallische Reflexion, Reststrahlen) einiger durchsichtiger fester Körper; die beobachteten λ sind in nachstehender Tabelle unter „ $\lambda_{\text{beob.}}$ “ angegeben; die Zahlen unter „ $\lambda_{\text{ber.}}$ “ sind obiger Tabelle entnommen, soweit sie sich auf Atome von abnorm kleiner spezifischer Wärme beziehen; für die übrigen soll $\lambda > 48 \mu$ sein.

Körper	$\lambda_{\text{beob.}}$	$\lambda_{\text{ber.}}$
CaF ₂	24; 31,6	33; > 48
NaCl	51,2	> 48
KCl	61,2	> 48
CaCO ₃	6,7; 11,4; 29,4	12; 21; > 48
SiO ₂	8,5; 9,0; 20,7	20; 21

In der Tabelle enthalten NaCl und KCl nur Atome von normaler spezifischer Wärme; in der Tat sind die Wellenlängen ihrer ultraroten Eigenschwingungen größer als 48μ . Die übrigen Stoffe enthalten lauter Atome mit abnorm kleiner spezifischer Wärme (ausgenommen Ca); in der Tat liegen die Eigenfrequenzen dieser Stoffe zwischen $4,8 \mu$ und 48μ . Im allgemeinen sind die aus den spezifischen Wärmen theoretisch ermittelten λ erheblich größer als die beobachteten. Diese Abweichungen können vielleicht in einer starken Veränderlichkeit der Frequenz des Elementargebildes mit der Energie desselben ihre Erklärung finden. Wie dem auch sein mag, jedenfalls ist die Übereinstimmung der beobachteten und berechneten λ hinsichtlich der Reihenfolge, sowie hinsichtlich der Größenordnung sehr bemerkenswert.

Wir wollen nun die Theorie noch auf den Diamanten anwenden. Die ultrarote Eigenfrequenz desselben ist nicht bekannt, läßt sich jedoch unter Zugrundelegung der dargelegten Theorie berechnen, wenn für einen Wert von T die molekulare spezifische Wärme c bekannt ist; das zu c gehörige x läßt sich aus der Kurve unmittelbar entnehmen, und man bestimmt hieraus λ nach der Beziehung $(T/L/\beta\lambda) = x$.

Ich benutze die Beobachtungsergebnisse von H. F. Weber, die ich den Tabellen von Landolt und Börnstein entnahm (vgl. nachstehende Tabelle). Für $T = 331,3$ ist $c = 1,838$; hieraus folgt nach der angegebenen Methode $\lambda = 11,0 \mu$. Unter Zugrundelegung dieses Wertes sind die in der dritten Spalte der Tabelle nach der Formel $x = (TL/\beta\lambda)$ berechnet ($\beta = 4,86 \cdot 10^{-11}$).

T	c	x
222,4	0,762	0,1679
262,4	1,146	0,1980
283,7	1,354	0,2141
306,4	1,582	0,2312
331,3	1,838	0,2500
358,5	2,118	0,2705
413,0	2,661	0,3117
479,2	3,280	0,3615
520,0	3,631	0,3924
879,7	5,290	0,6638
1079,7	5,387	0,8147
1258,0	5,507	0,9493

Die Punkte, deren Abszissen diese Werte von x , deren Ordinaten die in der Tabelle angegebenen, aus Beobachtungen Webers ermittelten Werte von c sind, sollen auf der oben dargestellten x, c -Kurve liegen. Wir haben diese Punkte — mit Ringen bezeichnet — in die obige Figur eingetragen; sie liegen tatsächlich nahezu auf der Kurve. Wir haben also anzunehmen, daß die elementaren Träger der Wärme beim Diamanten nahezu monochromatische Gebilde sind.

Es ist also nach der Theorie zu erwarten, daß der Diamant bei $\lambda = 11 \mu$ ein Absorptionsmaximum aufweist.

Bern, November 1906.

(Eingegangen 9. November 1906.)

10. *Über Kapillarität und Tropfengröße;
Nachtrag¹⁾;
von Friedrich Kohlrausch.*

Herr F. Louis Perrot hatte die Freundlichkeit, mich auf eine, von ihm mit Hrn. Ph. A. Guye ausgeführte umfassende, experimentelle und kritische Untersuchung über Tropfen aufmerksam zu machen. In zwei Abhandlungen²⁾ geben die Verfasser zunächst eine ausführliche Zusammenstellung der *Literatur* über Tropfen mit Inhaltsangabe und eingehender Besprechung. Dann folgen vielseitige Beobachtungen über das *Gewicht* und Abbildungen der *Gestalt hängender* sowie *rasch* oder *langsam* gebildeter *fallender Tropfen* an zahlreichen Flüssigkeiten, deren *Dichte* und aus Steighöhen abgeleitete *Oberflächenspannung* mitgeteilt wird. Die meisten Größen werden in mittlerer und in einer höheren Temperatur gemessen.

Die an 16 Körpern durchgeführten Messungen an fallenden, bei Zimmertemperatur langsam gebildeten Tropfen enthalten nun ein willkommenes Material, um die von Lord Rayleigh³⁾ aus Beobachtungen von tropfendem Wasser und von Hrn. Lohnstein⁴⁾ auf theoretischem Wege abgeleiteten Funktionen zu prüfen, in denen sich das Tropfengewicht durch den Halbmesser des Abtropfkreises und die Oberflächenspannung ausdrückt. Zu dieser Prüfung soll hier die Tabelle

1) Vgl. F. Kohlrausch, Ann. d. Phys. 20. p. 798—806. 1906.

2) Ph. A. Guye et F. Louis Perrot, Étude critique sur l'emploi du compte-gouttes pour la mesure des tensions superficielles, Arch. des Sc. phys. (4) 11. p. 225—265 und 345—389. 1901; Étude expérimentale sur la forme et sur le poids des gouttes statiques et dynamiques, ibid. (4) 15. p. 132—188. 1903.

3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 48. p. 321—326. 1899.

4) Th. Lohnstein, Ann. d. Phys. 20. p. 237—268 und p. 606 bis 618. 1906.

benutzt werden, die ich (l. c.) als Mittel aus den beiden genannten Untersuchungen dadurch gebildet habe, daß die beiderseitig aufgestellten Formeln auf dieselbe Gestalt gebracht wurden.

Der zu prüfende Ausdruck gibt das Gewicht G des von horizontaler benetzter Kreisfläche vom Halbmesser r abgefallenen Tropfens einer Flüssigkeit von der Oberflächenspannung α als

$$(1) \quad G = r \alpha \cdot \Phi;$$

Φ ist eine Funktion von r/a , wo a die in der Theorie der Kapillarität häufig gebrauchte Größe bedeutet, deren Quadrat

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\sigma} \quad (\sigma = \text{spez. Gew.})$$

die Steighöhenkonstante der Flüssigkeit darstellt.

Aus den Messungen von Guye und Perrot, in Verbindung mit der erwähnten Tabelle für Φ ¹⁾, erhält man nun die auf p. 193 zusammengestellten Prüfungsergebnisse.

Die ersten vier Spalten geben die Beobachtungen von Guye und Perrot²⁾; der Halbmesser der Kreisfläche, von welcher die Gewichte G langsam abtropften, war $r = 1,585$ mm. Alsdann folgt die Berechnung der Oberflächenspannung α , aus diesen Gewichten G unmittelbar in mg-Gew./mm erhalten, schließlich aber, um mit den, aus kapillaren Steighöhen gefundenen, von Guye und Perrot in C.G.S. angegebenen $[\alpha]_{\text{st}}$ vergleichbar zu werden, durch Multiplikation mit 9,809 ebenfalls in C.G.S. umgerechnet und mit $[\alpha]_{\text{Tr}}$ benannt.

1) Die Tabelle (l. c. Kohlrausch p. 805) lautet in ihrem, für die Messungen von Guye und Perrot in Betracht kommenden Teile:

$r/a = 0,4$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi = 4,24$	4,11	4,02	3,96	3,89	3,84	3,80.

Um $\Phi(r/a)$ zu kennen, wird a als bekannt vorausgesetzt, also muß, um die Gleichung (1) zur Ermittlung von α aus dem Tropfengewicht zu benutzen, ein Annäherungsverfahren gebraucht werden, welches indessen rasch konvergiert. Man setzt probeweise z. B. $\Phi = 4,0$, berechnet α und a hiermit und korrigiert dann Φ nach dem nun erhaltenen r/a . Die zweite Rechnung führt in der Regel schon zum Ziel.

2) Zu entnehmen aus deren Tab. X und XII p. 373 und 383 der ersten zitierten Abhandlung.

Messungen von Guye und Perrot			Berechnung der Oberfl.-Spannung aus G u. σ						
Temperatur	Oberfl.-Spannung aus Steighöhe $[\alpha]_{St}$	Spez. Gewicht σ	Tropfen-Gewicht G	α	$\frac{r}{a}$	ϕ	Oberfl.-Spannung aus Tropfen-Gewicht		$[\alpha]_{Tr} - [\alpha]_{St}$
							α	$[\alpha]_{Tr}$	
			mm				mm		
Äthylacetat	17,1°	0,9039	15,25	2,32	0,684	3,97	2,42	23,8	+ 0,2
Tetrachlorkohlenstoff.	22,1	1,5810	16,19	1,83	0,866	3,86	2,65	26,0	+ 1
Valeroxym	17,6	0,8944	17,54	2,49	,637	4,00	2,77	27,1	- 2
Benzol	16,6	0,8813	18,69	2,58	,614	4,01	2,94	28,8	+ 4
Metaxylol.	17,2	0,8676	18,44	2,59	,612	4,01	2,90	28,5	- 3
Piperidin	17,6	0,8647	19,75	2,68	,592	4,03	3,10	30,4	+ 8
Dimethylorthotoluidin	19,9	0,9231	20,88	2,66	,597	4,02	3,27	32,1	+ 7
Anisol	19,4	0,9927	22,92	2,69	,589	4,03	3,59	35,2	+ 8
Dimethylanilin	17,5	0,9582	24,03	2,80	,566	4,05	3,74	36,7	+ 8
Pyridin	19,1	0,9825	23,93	2,76	,575	4,04	3,74	36,6	+ 2
Metakresol	21,6	1,0324	23,85	2,69	,589	4,03	3,73	36,6	- 5
Benzonitril	19,6	1,0037	25,32	2,80	,566	4,05	3,94	38,7	+ 6
Acetophenon	17,5	1,0302	25,74	2,79	,568	4,05	4,01	39,4	+ 7
Äthylbromür.	21,2	2,1686	23,51	1,88	,843	3,87	3,84	37,6	$\pm$
Nitrobenzol	15,0	1,2041	28,43	2,72	,583	4,03	4,45	43,6	+ 5
(Anilin)	19,0	1,0188	28,50	2,94	,538	4,07	4,41	43,3	(+ 2,4)

(+2,4)

Bei *Anilin*, welches schon Guye und Perrot bezüglich der Tropfengröße als aus den übrigen Körpern herausfallend bezeichnen¹⁾, war die Übereinstimmung von vornherein ausgeschlossen; vielleicht waren hier die zu den Steighöhen und den Tropfversuchen gebrauchten Präparate nicht gleich.

Bei den 15 übrigen Stoffen beträgt die mittlere Abweichung zwischen den auf beiden Wegen gewonnenen $[\alpha] \pm 0,54$ oder etwa $\pm 1\frac{1}{2}$ Proz., womit man zufrieden sein wird. Allerdings überwiegen in $[\alpha]_{\text{Tr}} - [\alpha]_{\text{St}}$ die positiven Vorzeichen; die Resultate aus den Tropfversuchen sind im Mittel um etwa 0,3, d. h. gegen 1 Proz. größer. Eine systematische Abweichung in diesem Sinne war aber vielleicht zu erwarten.

Die Lord Rayleigh- und Lohnsteinschen Resultate und die aus diesen kombinierte Tabelle finden also in den Messungen von Guye und Perrot innerhalb des hier gebrauchten Gebietes von r/a eine gute Bestätigung.

Marburg, 1. Nov. 1906.

1) Siehe die erste Abhandlung p. 384 und Tab. XII p. 383. Mit der Oberflächenspannung 43,3 (vgl. unsere Rechnung) eingesetzt bildet das Anilin selbstverständlich nicht mehr diese Ausnahme.

(Eingegangen 5. November 1906.)

**11. Bemerkungen
über die Julius'sche Galvanometeraufhängung;
von Walter P. White.¹⁾**

Bei der vielfach verwendeten Galvanometeraufhängung nach den Angaben von Prof. Julius²⁾ sind besonders zwei Punkte von Bedeutung: die Aufhängung an Schnüren oder Drähten und die Anordnung des Galvanometerkopfes im Schwerpunkte der Aufhängevorrichtung, um die Schwingungen zu eliminieren, welche das Gehänge fortwährend um seinen Schwerpunkt ausführt. Indessen ist es offensichtlich erwünscht, die drehenden Schwingungen möglichst zu schwächen. Die beste Methode, dieses Ergebnis zu gewährleisten, ist der Gegenstand beträchtlicher Meinungsverschiedenheiten gewesen.

Prof. Julius schreibt diese Schwingungen ungleichmäßigen Impulsen zu, welche sich von oben her längs der Aufhängungsdrähte fortpflanzen, und empfiehlt, die Drähte nach Möglichkeit einander gleich zu machen.³⁾ Er meint, daß die Hauptursache der Mißerfolge dort, wo Federn angewandt worden sind, in der mangelnden Gleichmäßigkeit der verschiedenen Federn liege.

Es ist jedoch keineswegs klar, daß Ungleichmäßigkeit in den Drähten eine wesentliche Ursache für drehende Schwingungen sein muß; zeigen doch an einzelnen Schnüren aufgehängte Körper solche Schwingungen in sehr deutlicher Weise, obgleich bei ihnen doch jeder Mangel an Gleichmäßigkeit ausgeschlossen ist. Sicher ist jedenfalls, daß wir bei aller auf die Drähte zu verwendenden Sorgfalt niemals von den Drehbewegungen frei werden können. Ich habe daher geglaubt⁴⁾, daß es ein aussichtsvollerer Weg sein dürfte, zunächst die Intensität der Schwingungen herabzusetzen und sie dann zu

1) Aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.

2) W. H. Julius, Wied. Ann. 56. p. 151. 1895; Zeitschr. f. Instrumentenk. 16. p. 267. 1896.

3) Wied. Ann. 56. p. 158. 1895.

4) W. P. White, Phys. Rev. 19. p. 323. 1904.

dämpfen. Das *kann* durch die Verwendung von Federn geschehen, und ich habe, hauptsächlich gestützt auf die Arbeiten anderer Forscher, den Nachweis dafür zu erbringen versucht, daß Federn, geeignet angewandt¹⁾, auf eine Schwächung, und nicht auf eine Verstärkung der drehenden Schwingungen hinwirken.

In einer jüngst in den *Annalen* veröffentlichten Arbeit²⁾ erwähnt Prof. Julius meine Beweisführung und erklärt dann, gleichsam als Protest, daß er gleichfalls Federn verwendet habe.

Ich bedaure lebhaft, wenn ich mich unabsichtlich einer Unhöflichkeit gegen Hrn. Prof. Julius schuldig gemacht haben sollte, indem ich es unterlassen habe, seine Mitteilung über die Verwendung von Federn zu erwähnen. Ich habe dies indessen nicht aus Versehen unterlassen. Die Frage, um welche es sich damals allein handelte, war die Verringerung der *drehenden* Schwingungen. Prof. Julius hatte, wie mir schien, sich bemüht, sehr deutlich zu betonen, daß er Federn ausschließlich als ein Mittel zur Vermeidung *vertikaler* Schwingungen anwendete und empfahl. Sein Vorschlag schien mir daher vollständig außerhalb meiner Diskussion zu liegen.

Der Hauptzweck der vorliegenden Mitteilung ist jedoch nicht, über eine unwichtige Prioritätsfrage zu reden, sondern auf einen anderen Punkt von praktisch größerer Bedeutung hinzuweisen, in welchem unsere einigermaßen verschiedenen Anschauungen über die bei den drehenden Schwingungen mitspielenden Kräfte die Konstruktion von Galvanometeraufhängungen beeinflussen werden.

Einerseits wird empfohlen, den Flüssigkeitsdämpfer unter dem Träger anzubringen.³⁾ Julius verwirft diese Anordnung entschieden⁴⁾ und besteht darauf, daß die Dämpfer sich auf gleicher Höhe mit dem Schwerpunkt befinden. Wir sind in unserem Institut unabhängig dazu gelangt, die erstere An-

1) d. h. für die äußerste Stabilität, die Methode ist wohl etwas raffiniert für gewöhnliche Praxis. Bei Drehspulengalvanometern z. B. sind die drehenden Schwingungen meist nicht störend.

2) W. H. Julius, *Ann. d. Phys.* 18. p. 206. 1905.

3) Vgl. z. B. F. Kohlrausch, *Lehrbuch der praktischen Physik*, 10. Aufl. p. 48.

4) W. H. Julius, *Ann. d. Phys.* 18. p. 207. 1905.

ordnung für richtig zu halten, und finden in der Praxis, daß unsere Galvanometer mindestens ebenso rubig sind, wenn ein einziger Dämpfer unter dem Träger angebracht wird. Wir hatten dieses Ergebnis bereits ehe wir den Versuch anstellten, aus theoretischen Gründen vorausgesehen und gewannen daher die feste Überzeugung, daß Hrn. Julius' Analyse des Problems, die ihn zu einer abweichenden Schlußfolgerung geführt hat, in gewissen Einzelheiten unvollständig sein müsse.

Der Grund, weshalb Hr. Julius den Dämpfer nicht unter den Schwerpunkt verlegen will, ist, daß dann von der Bewegung des Dämpfers herrührende seitliche Impulse Drehungen der Galvanometeraufhängung verursachen würden. Es ist recht bedauerlich, daß diese von Hrn. Prof. Julius vorausgesagte Wirkung nicht schärfer ausgeprägt ist, als sie sich tatsächlich erweist. Wenn nämlich der Dämpfer stark genug wäre, um drehende Schwingungen hervorzurufen, so würde er auch imstande sein, sie zu dämpfen. Da nun der einzige Grund für die Verwendung eines Dämpfers darin besteht, daß seine hemmende Wirkung auf Schwingungen im allgemeinen stärker ist als seine Schwingungen erregende Wirkung, so würde der tiefer angebrachte Dämpfer auf die Drehbewegungen schwächend wirken. Überdies würde ein Impuls, der zur Erzeugung einer rotatorischen Bewegung ausreicht, wenn er an der Unterseite des Systems angreift, dann eine translatorische Bewegung hervorrufen, wenn er dem Schwerpunkt gegenüber angreift. Drehbewegungen sind unerwünscht, aber translatorische Bewegungen sind in ihrer Wirkung auf das Galvanometer noch viel schlimmer.¹⁾ Wenn also der Dämpfer wirklich derart auf den Träger einwirkt, daß er ihn merklich bewegt, so ist die Nachbarschaft des Schwerpunktes für seine Anbringung der ungünstigste Platz.

In der Praxis hat ein zur Unterdrückung der langsamen pendelartigen Schwingungen der Aufhängung angeordneter Dämpfer wahrscheinlich sowieso wenig Einfluß auf die schnellen drehenden Bewegungen. Der ganze Vorteil der An-

1) Diese letzte Überlegung führt zu dem Schlusse, daß die Drähte ebenso gut am oberen Ende des Trägers befestigt werden könnten. Diesen Schluß habe ich auch in der Tat bestätigt gefunden.

bringung des Dämpfers weit unten besteht demnach hauptsächlich darin, daß es bequemer ist, ihn aus dem Wege zu schaffen, und daß die Konstruktion einfacher und handlicher wird.

Vor einigen Jahren hat Dr. Arthur L. Day in diesem Laboratorium eine andere Methode zur Vereinfachung der gebräuchlichen Dämpfungsvorrichtungen an der Juliusschen Aufhängung eingeführt. Diese Vereinfachung besteht in der Verwendung von zwei unsymmetrisch angeordneten Dämpfern an Stelle der üblichen Anordnung mit drei Dämpfern. Diese Methode läßt sich natürlich auf vorhandene Aufhängungen durch einfaches Fortlassen eines der jetzt angebrachten Dämpfer anwenden. Sie hat zwei Vorteile: einmal wird der auf dem Träger stehende Apparat leichter zugänglich, denn die noch verbleibenden Dämpfer können an der Wand befestigt werden, zweitens zeigte es sich, daß das Galvanometer sich viel ruhiger erwies, was der Hauptgrund war, die Abänderung vorzunehmen. Bei drei Dämpfern muß einer weiter in das Zimmer hinein verlegt werden, und dort wird er dann von den Schwingungen des Gebäudes ernstlicher beeinflußt.

Washington, Geophysical Laboratory, Carnegie Institution, 16. Juli 1906.

(Eingegangen Ende Juli 1906¹.)

1) Der Abdruck wurde durch äußere Umstände verzögert; die Red.

12. *Über die Lichteinwirkung auf photographische Platten;*
von P. H. Eykman und A. P. H. Trivelli.

Wenn man von dem alten Standpunkte ausging, daß die photographische Platte bis in die Tiefe sich entwickelt, lag es nahe, jedesmal, wenn man nur kurz exponieren konnte, extradick gegossene Platten zu verwenden um genügende Deckung zu erhalten, da eine gewöhnliche Platte ein zu flauendes Bild geben würde. Dies gelingt aber nicht. In der Tageslichtphotographie könnte man das dem Umstande zuschreiben, daß das Licht eben nicht imstande sei genügend bis in die Tiefe einzudringen.

Dies gilt von Röntgenstrahlen *nicht* und doch geben dick und dünn gegossene Platten genau dasselbe Resultat.

Wir machten folgenden Versuch mit Platten der Trockenplattenfabrik Dr. C. Schleussner, Frankfurt a. M.

Versuch I. Eine sehr dünn, eine gewöhnliche und eine doppeldick gegossene Platte wurde zu gleicher Zeit den Röntgenstrahlen exponiert und beider gewöhnlichen Entwicklung zeigte sich kein Unterschied.

Da man dagegen einwenden könnte, daß die dickste Platte mehr Zeit brauche zur vollen Entwicklung in der Tiefe als eine dünnere Platte, haben wir Standentwicklung genommen, wobei die Zeit des längeren Eindringens ganz in Wegfall kommt.

Versuch II. Dieselben drei Plattensorten wie beim ersten Versuch wurden stufenweise bestrahlt während 20, 30, 40, 50 und 70 Sek., mit Glyzinstandentwicklung entwickelt während 55 Min., gaben ebenfalls keinen Unterschied, ebensowenig als folgende drei Versuche.

Versuch III. Dieselbe. Bestrahlung: 5, 10, 15, 20 und 25 Sek. Entwickelt: $1\frac{1}{2}$ Stunde.

Versuch IV. Dieselbe. Bestrahlung wie bei Versuch III. Entwickelt: $2\frac{1}{2}$ Stunde.

Versuch V. Dieselbe. Bestrahlung wie bei Versuch III. Entwickelt; 4 Std. 20 Min.

Zur näheren Betrachtung schnitten wir die nasse Schicht

der entwickelten Platte quer oder schief ab, so zeigt sich, daß nur die Oberfläche sich geschwärzt hat, daß aber die Tiefe der Schicht fast vollständig weiß bleibt. Die Arbeiten Neuhauss', Scheffers und Lehmanns haben dies Faktum durch eingehende mikroskopische Untersuchungen sicher gestellt.

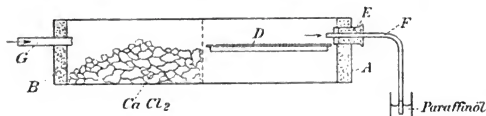
Man könnte denken, die Ursache liege daran, daß der Entwickler nicht genug in die Tiefe durchdringen könne; das dies aber nicht der Fall ist, lehrte uns folgender Versuch.

Versuch VI. Zwei fertige photographische Trockenplatten wurden für die Hälfte von neuem mit Bromsilbergelatine-Emulsion übergossen. Die eine wurde den Röntgenstrahlen und die andere dem gewöhnlichen Lichte exponiert. Nach Entwicklung zeigte die doppelt gegossene Schicht in beiden Fällen gestärkte Schwärzung. Es gelang stellenweise die obere Schicht wieder abzuheben und dann konnte man deutlich sehen, daß die untere Schicht ebensogut ein Bild trug wie die unbedeckt gebliebene Hälfte. Daraus geht hervor, daß die Kraft des Entwicklers nicht beim Durchdringen einer photographischen Schicht verloren geht. Es wäre weiter denkbar, daß die Licht-, bez. Röntgenstrahlen die photographische Schicht nur an ihrer freien Oberfläche beeinflussen konnten, da vielleicht die Anwesenheit von Luft, bez. Sauerstoff dabei erforderlich war. Dafür machten wir weiteren Versuch.

Versuch VII. Eine Glasplatte wird ziemlich dick mit photographischer Emulsion (bezogen von Dr. Stock, Berlin) übergossen und erstarren gelassen ohne zu trocknen. Nach der Exposition an Röntgenstrahlen wird auf die Mitte der Platte ein Papierstreifen gelegt, angedrückt und sofort wieder abgerissen. Der Streifen nimmt den oberflächigen Teil der Schicht mit. Die Oberfläche, die nur von den Strahlen beeinflußt sein sollte, ist also entfernt und doch zeigt nach Entwicklung diese Stelle auf der Platte ein sogar verstärktes Bild. Man wird daher zu der Annahme gezwungen, daß nur unter Mitwirkung der physikochemischen Kräfte der freien Oberfläche die Einwirkung des Entwicklers auf die bestrahlten Partien zustande kommen kann.

Um darüber weiter klar zu werden, ob die atmosphärische Luft bei der Plattenbereitung und Belichtung eine gewisse Rolle spielt, wurde folgender Versuch gemacht.

Versuch VIII. Wir fertigten drei der folgenden Apparate an. Ein liegendes Zylinderglas wird von beiden Seiten mittels Propfen *A* und *B* (vgl. Figur) verschlossen; durch ein kreisrundes Stück Mousseline *C* wird der Zylinder in zwei ungefähr gleiche Hälften geteilt. Die eine Abteilung wird mit CaCl_2 gefüllt, in der andern Abteilung wird eine kleine zu übergießende Glasplatte *D* horizontal gelagert. Hierfür ist in dem



Pfropfen *A* eine Öffnung *E* gelassen, wodurch der Gießlööffel gehen kann. Nach dem Guß wird die Öffnung mit einem Stöpsel verschlossen. Durch *B* steckt ein dünnes Rohr *G*, wodurch das betreffende Gas zugeleitet werden kann. Das Gas strömt wieder auf der anderen Seite heraus durch ein Rohr *F*, das am Ende unter Paraffinöl untergetaucht ist. Als Gase wurden gewählt:

1. Luft.
2. Sauerstofffreie Luft bereitet durch Durchleiten von Luft in eine Pyrogallollösung mit Kalilauge.
3. Sauerstoff bereitet aus Natrumperoxyd mit Wasser nach Reinigung durch Chromsäure.

Die Glaszylinder wurden aufgestellt in einen Dunkel-schrank der sich im photographischen Dunkelzimmer befindet und worin die Gasapparate aufgestellt wurden. Die betreffenden Gase wurden einige Zeit durchgeleitet, einen Augenblick die Stöpsel aus *E* genommen, die Platten gegossen, rasch die Stöpsel wieder eingesetzt und die Gase fortwährend durchgeleitet bis sie trocken waren. Die Dunkelkammer wurde zum Trocknen der Platten ziemlich kräftig geheizt.

Die Glasröhren *F* und *G* wurden entfernt und die Öffnungen abgeschlossen. Die drei Glaszylinder wurden in schwarzes Papier gehüllt und so die Platten, sich noch in ihren eigenen Gasatmosphären befindend, den Röntgenstrahlen ausgesetzt. Danach wurden die kleinen Platten aus ihrem Behälter gezogen und zugleich entwickelt mit Standentwicklung.

Ein Unterschied war nicht zu konstatieren. Daraus ergibt sich, daß ein spezifischer Einfluß von der Atmosphäre nicht zu erwarten ist.

Es liegt also in logischem Begriff, daß eine rauhe Schicht stärkere Wirkung zeigt als eine glatte, da doch letztere weniger aktive Oberfläche bietet.

Bei der Platte vom Versuch VII ist durch das Abreißen eine sehr rauhe Oberfläche entstanden und diesem Umstand ist es zuzuschreiben, daß diese Stelle mehr Schwärzung zeigt.

Denselben Versuch haben wir noch einmal gemacht, aber ein wenig abgeändert.

Versuch IX. Auf eine dickgegossene erstarrte Platte fiel ein unregelmäßiges, viereckiges Papierstück; wir rissen dasselbe ab und nach dem Trocknen der Platte wurde selbige exponiert und entwickelt. Diese Stelle zeigt Verstärkung des Bildes.

Versuch X. Eine fertige Schleußnerplatte wurde in der Mitte unberührt gelassen, aber die zwei Enden wurden von neuem mit Emulsion übergossen und getrocknet. Eine Aufnahme in der Kassette zeigt nach Entwicklung ein verstärktes Bild.

Wir konnten feststellen, daß die untere Schicht nicht trocken zu sein braucht, daß man sie in erstarrtem Zustande von neuem übergießen könnte, ohne daß die freie Oberflächenwirkung der unterliegenden Schicht vernichtet wurde. Man muß also in der Photographie die Idee der *relativen* Oberflächengröße einführen, d. h. eine rauhe Oberfläche hat eine größere relative Oberfläche als eine glatte.

Verteilt man die Quantität Emulsion, die man für eine Platte bestimmter Größe verwenden will in zwei Teile, die man übereinander gießt nach dem Erstarren, so hat man zweimal mehr relative Oberfläche als wenn man die ganze Quantität auf einmal aufgegossen hätte und die Empfindlichkeit ist dadurch gesteigert.

Statt in zwei wird es gut sein die Emulsion in mehreren Teilschichten aufzutragen, zeigt sich doch, daß bei der gewöhnlichen Platte nur $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{10}$ der Dicke der Einwirkung des Entwicklers unterliegt.

Darin liegt also das Mittel die Emulsion ganz oder fast ganz auszunutzen. Wissenschaftlich kann man sich die Vergrößerung der Oberfläche verschieden denken. Wir sind zu

unserm Verfahren gelangt durch wiederholte schichtweise Übergießung. Es zeigt sich dabei vorteilhaft viel dünnere Schichten zu nehmen als bis jetzt gebräuchlich.

Das künstliche Rauhmachen, wie wir das machten durch rohes Abreißen kann sicher auf regelmäßigere Weise geschehen, so daß man eine sehr feine, sammetartige oder gegitterte Oberfläche erhält.

Die allerfeinste Schichtung bekommt man allerdings durch Zerstäubung der Emulsion auf eiskalte Platten, worauf jedes hingelangte Tröpfchen sofort erstarrt und wieder von neuem bedeckt wird.

Bei unseren verschiedenen Versuchen wurden wir dazu gebracht einen gewissen Unterschied anzunehmen zwischen der Einwirkung der Röntgenstrahlen auf der photographischen Platte und des gewöhnlichen Lichtes.

Feuchtet man eine photographische Platte teilweise an, so werden die nassen und trockenen Stellen gleich stark von den Röntgenstrahlen beeinflußt. Mit gewöhnlichem Lichte aber bleiben die feuchten Stellen ganz erheblich zurück gegen die trockenen Stellen. Wir schrieben das dem Umstande zu, daß das gewöhnliche Licht von den feuchten Stellen teilweise reflektiert wird und darum nicht zur Geltung kommen kann. Darum haben wir den Versuch noch einmal wiederholt und die Platte von hinten belichtet, aber mit genau demselben Resultat.

Ein anderer Unterschied ergab sich bei physikalischer Entwicklung, welche bei den Röntgenstrahlen sich erheblich schwächer zeigte als bei dem gewöhnlichen Lichte. Vielleicht wirft das ein Licht auf die Tatsache, daß Daguerreotyp- und Kollodionplatten für Röntgenstrahlen sehr unempfindlich sind, ist doch die Entwicklung dieser Platten eine physikalische.

Zum Schlusse müssen wir unserm stetigen Mitarbeiter und Freund, Hrn. W. F. F. Oppenoorth, cand. Bergingenieur, für seine Mithilfe besten Dank abstatten.

(Eingegangen 18. Oktober 1906.)

13. *Über die Poissonsche Konstante des
Kautschuks;
von Ludwig Schiller.*

Durch das Erscheinen der Arbeit von Frank¹⁾ über „die Analyse endlicher Dehnungen und die Elastizität des Kautschuks“ sehe ich mich veranlaßt, über einige Untersuchungen zu berichten, die ich in den letzten Monaten über den Poissonschen Koeffizienten des Kautschuks gemacht habe, und die sich zum Teil mit Abschnitt I und II der Frankschen Arbeit decken.

Der Gesichtspunkt, von dem ich ausging, war in erster Linie ein praktischer. Es handelte sich nämlich für mich darum, die Dickenänderung einer Kautschukplatte bei gegebener Verlängerung zu bestimmen, m. a. W. den Poissonschen Koeffizienten für verschiedene Verlängerungen anzugeben. Die meines Wissens letzterschienenen und ausführlichsten Tabellen hierüber sind diejenigen von Bjerkén²⁾, der das μ aus seinen Beobachtungen einfach als $\frac{b_a - b_e}{b_a} \cdot \frac{l_a}{l_e - l_a}$ berechnet hat, worin l_a , l_e , b_a und b_e Anfangs- und Endlänge, bez. -breite bedeuten, und dabei immer von demselben Anfangswert ausgegangen ist.

Nun zeigt sich aber in einer Arbeit von Röntgen³⁾, daß für schrittweises Vorgehen, d. h. wenn man μ jedesmal aus den durch jeden Zuwachs der Belastung entstandenen Dimensionsveränderungen berechnet, bei 2—5 proz. Verlängerungen μ nahezu konstant bleibt. Ich habe dasselbe Resultat gefunden bei Dehnungen bis über 100 Proz. Hierbei habe ich μ auf folgende Weise aus den Beobachtungen errechnet:

Es sei b Breite, l Länge, b_a , l_a , b_e , l_e dasselbe wie oben. Dann ist

$$\frac{db}{dl} = -\mu \cdot \frac{b}{l}$$

1) O. Frank, Ann. d. Phys. 21. p. 602. 1906.

2) P. K. Bjerkén, Wied. Ann. 43. p. 818. 1891.

3) W. C. Röntgen, Pogg. Ann. 159. p. 601. 1876.

oder

$$\int_b^a \frac{db}{b} = \mu \int_a^b \frac{dl}{l}$$

und hieraus

$$(1) \quad \mu = \frac{\log \frac{b_a}{b_s}}{\log \frac{l_s}{l_a}}$$

Auf diese Weise erhielt ich aus 19 Messungen durch verschiedene Kombinationen folgende Tabelle für μ :

1	2	3	4	5	6	7
Nr.	Dilatation der Längen- einheit	1000 $\mu =$	b_a (mm)	b_s (mm)	l_s (mm)	l_a (mm)
1	0,023	457	10,487	10,376	258,5	252,6
2	0,048	462	10,376	10,262	264,8	258,5
3	0,074	453	10,262	10,148	271,4	264,8
4	0,104	509	10,148	10,010	278,8	271,4
5	0,105	531	10,148	9,997	279,1	271,4
6	0,132	500	10,377	9,871	285,9	258,7
7	0,022	434	10,484	10,389	258,6	253,0
8	0,047	478	10,389	10,271	264,9	258,6
9	0,073	528	10,271	10,137	271,5	264,9
10	0,101	462	10,137	10,019	278,5	271,5
11	0,783	500	9,300	7,999	390,6	289,0
12	0,829	490	9,300	7,923	400,8	289,0
13	0,829	472	9,313	7,923	400,8	284,6
14	0,048	459	10,487	10,262	264,8	252,6
15	0,074	457	10,376	10,148	271,4	258,5
16	0,104	482	10,262	10,010	278,8	264,8
17	0,047	457	10,484	10,271	264,9	253,0
18	0,073	503	10,389	10,137	271,5	258,6
19	0,101	494	10,271	10,019	278,5	264,9
20	1,021	472	10,342	7,420	243,9	120,7

Die Dicke des untersuchten Streifens betrug 1,07 mm. Irgend ein bestimmter Gang für die Werte von μ war nicht zu erkennen.

Von den Werten für die Dilatation der Längeneinheit in Kolonne 2 ist Nr. 1—6 und 14—16 bezogen auf eine Anfangs-

länge von 252,6 mm, Nr. 7—10 und 17—19 auf eine solche von 253,0 mm, Nr. 11—13 auf eine solche von 219,1 und Nr. 20 schließlich auf eine solche von 120,7, zu deren Charakteristik sich nur angeben läßt, daß sie ungefähr dem ungedehnten Zustande entsprachen, jedoch andererseits genügende Sicherheit boten, daß keine Quersalten mehr auftreten konnten. Kolumne 4—7 gibt die der jedesmaligen Berechnung für μ zugrunde gelegten beobachteten Werte an.

Als arithmetisches Mittel aus Kolumne 3 ergibt sich $1000 \mu = 480$, ein Wert, der infolge der großen Zahl von Beobachtungen wohl als ziemlich genau angenommen werden darf.

Aus dem derart gefundenen konstanten μ , definiert als $-\frac{db}{dl} \cdot \frac{l}{b}$, berechnet sich nun das variable μ' , welches ich nötig habe, wenn ich für endliche Dehnungen die Dickenänderung bestimmen will, folgendermaßen:

Aus Gleichung (1) ergibt sich

$$\left(\frac{l_e}{l_a}\right)^\mu = \frac{b_a}{b_e},$$

$$b_a - b_e = b_a \frac{l_e^\mu - l_a^\mu}{l_e^\mu}.$$

Nun ist aber

$$\mu' = \frac{b_a - b_e}{l_e - l_a} \cdot \frac{l_a}{b_a},$$

also

$$(2) \quad \mu' = \frac{l_e^\mu - l_a^\mu}{l_e - l_a} \cdot \frac{l_a}{l_e^\mu}.$$

Ich nehme nun auf Grund der obigen Beobachtungen $\mu = 0,480$ an, kann dann für jede beliebige Dehnung μ' berechnen und erhalte beispielsweise folgende Tabelle:

$\frac{l_e - l_a}{l_a}$	1000 μ'	$\mu' \frac{(l_e - l_a)}{l_a}$	$\frac{l_e - l_a}{l_a}$	1000 μ'	$\mu' \frac{(l_e - l_a)}{l_a}$
0,1	449	0,0449	0,9	295	0,2655
0,2	421	0,0842	1	283	0,283
0,3	394	0,1182	2	186	0,372
0,4	372	0,1488	3	162	0,486
0,5	354	0,1770	4	135	0,540
0,6	337	0,2022	5	115	0,575
0,7	321	0,2247	6	101	0,606
0,8	307	0,2456			

Diese Werte stimmen ziemlich gut mit den von Bjerkén angegebenen, haben jedoch wohl den Vorzug, daß nicht jeder einzelne speziellen Beobachtungsfehlern unterliegt, sondern deren Einfluß durch die obige große Anzahl von Beobachtungen auf ein Minimum herabgedrückt ist und lediglich der gesetzmäßige Ablauf in vorliegender Tabelle zum Ausdruck kommt. Die Werte in der dritten Spalte $\mu' ((l_e - l_a)/l_a)$ geben direkt die spezifische Dickenänderung einer Platte für die spezifische Verlängerung $(l_e - l_a)/l_a$.

Selbstverständlich muß man bei Benutzung der Formel (2), wenn man $\mu = 0,5$ setzt, auf dieselben Werte für μ' kommen, wie sie Röntgen mit Benutzung der Formel

$$\frac{b}{l} = \mu = \frac{1}{l} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+l}} \right)^2$$

für μ erhält. Dies ist auch der Fall mit Ausnahme des letzten Wertes in der Röntgenschen Tabelle 0,112, den Röntgen für eine Verlängerung der Längeneinheit um 4,0 angibt, und der auf einem Rechenfehler beruhen muß. Die Berechnung hat den Wert 0,138 zu liefern.

Hrn. Franks und meine Resultate 0,46 und 0,480 zeigen eine kleine Verschiedenheit. Vielleicht ist dieselbe in Materialverschiedenheiten begründet, vielleicht aber auch zum Teil in folgendem Umstand:

In der Anordnung des Hrn. Frank verhält sich Länge zu Breite des Streifens wie 40:10. Nun ist aber ersichtlich, daß bei einer derartig relativ großen Breite des Kautschukbandes der hindernde Einfluß, der von den festgeklebten Stellen auf die Kontraktion ausgeübt wird, ziemlich beträchtlich sein muß. Ich habe dies dadurch zu vermeiden gesucht, daß ich die Breite des Streifens sehr klein gegen seine Länge nahm in einem Verhältnis von ungefähr 1,6:35. Da die Anfangsbreite zwischen meinen Marken nur ca. 1 cm betrug, war ich natürlich genötigt, eine größere Genauigkeit bei den Breitenmessungen anzustreben, als sie mit einfachem Maßstab und Nonius zu erreichen ist. Diese lieferte mir die Benutzung einer Teilmaschine mit Mikroskopablesung. Die durchschnitt-

1) W. C. Röntgen, Pogg. Ann. 159. p. 612. 1876.

liche Genauigkeit der Ablesungen betrug 0,003 mm. Die Ursache der Abweichung meines Wertes für μ (0,480 gegen 0,46 des Hrn. Frank) dürfte vielleicht mit in der Benutzung des schmälere Streifens zu suchen sein. Wenigstens ist der Sinn der Abweichung dementsprechend. Eine Versuchsreihe, die ich mit einer Platte von ungefähr quadratischer Fläche anstellte, lieferte mir auch tatsächlich folgende Tabelle:

b_a	b_e	l_e	l_a	1000 μ
21,102	19,994	271,7	241,9	464
19,994	18,781	312,2	271,7	454
21,102	18,781	312,2	241,9	457
21,049	19,927	273,9	243,6	467
21,049	18,775	313,2	243,6	455
19,927	18,775	313,2	273,9	444

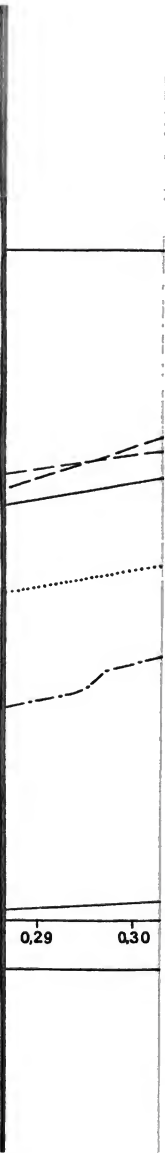
Das Mittel für μ ergibt 0,457.

Selbstverständlich wurde auch hierbei die Breite zwischen zwei Marken in der Mitte der Platte gemessen. Vielleicht dürfte die Versuchsreihe als experimentelle Bestätigung für obige Überlegung angenommen werden, besonders da die Werte eine verhältnismäßig große Übereinstimmung zeigen.

Der Einfluß der elastischen Nachwirkung auf die Beobachtungen wurde dadurch ausgeschaltet, daß zunächst eine entsprechende Zeit gewartet wurde (bei größeren Dehnungen nicht unbeträchtlich). Dann wurde in möglichst rascher Aufeinanderfolge eine Längen-, zwei Breiten- und nochmals eine Längenmessung vorgenommen und hieraus die arithmetischen Mittel genommen.

Leipzig, Physikal. Institut, November 1906.

(Eingegangen 27. November 1906.)



MAX KOHL, Chemnitz i. S.



Arbeits- (Praktikanten-) Tische
 in allen möglichen Ausführungen, ganz den jeweiligen örtlichen Verhältnissen angepaßt.



Radiumbromid von überraschender
 chemisch reiner Wirkung; —
 Preis auf Anfrage.

Weltausstellung Lüttich 1905: 2 Grands Prix!
Ausstellung St. Louis 1904: Grand Prix und Gold. Medaille,
 in der Sonderausstellung des Königl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im
 Auftrag der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsalles, letztere in der
 deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung wissenschaftliche Instrumente.
 Ehren Diplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Düsseldorf 1898.
 Goldene Medaille Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900, Athen 1904.
 Mit ausführlichen Kostenanschlägen, Beschreibungen, Referenzen usw. gratis und franko.

Experimentier-Schalttafeln

für Lehranstalten u. Laboratorien, als Wandtafeln
 und in Form fahrbarer Tische ausgeführt, gestatten
 die Verwendung
 des Stromes
 städtischer Centralen bis 110, 160,
 220 Volt u. 20 oder
 30 Amp. für alle
 im Experimental-
 unterricht vor-
 kommende Arbei-
 ten. Die Schalt-
 tafeln sind für
 kleine und große
 Stromstärken bei
 beliebigen Span-
 nungen von 0,3 bis
 110 resp. 230 Volt
 zu verwenden.
 Höhere Span-
 nungen als wie
 eingestellt, treten
 auch bei Strom-
 unterbrechung
 nicht auf. — Es ist
 damit also einem
 wirklichen, lang
 gefühlten Bedürf-
 nis abgeholfen.
 Ia. Referenzen. *Man verlange Spezial-Prospekt!*



D. D. Thermoskope nach Kolbe
 in neuester, verbesserter Ausführung.

Neu! Öl-Luftpumpen Neu!

System Kohl, D.R.-Patent 169180.

Allein-Vertrieb und Alleinberechtigung zur Fabrikation.

Die Pumpe verdünnt bis auf 0,0006 mm und ver-
 spritzt während des Pumpens kein Öl! Sie
 eignet sich vorzüglich zum Auspumpen von
 Röntgen-Röhren.

Man verlange Spezial-Prospekt!

Von Seiten meiner Konkurrenz wird schon seit längerer
 Zeit eine „Warnung“ erlassen, welche sich auf die Herstellung
 und den Gebrauch von Ölluftpumpen bezieht. Es dürfte da-
 durch der Ansehen erweckt werden, als ob der Gebrauch der
 von mir in den Handel gebrachten, nebenstehend abgebildeten
 Ölluftpumpe mit Unannehmlichkeiten verknüpft sein könnte.
 Demgegenüber sei darauf hingewiesen, daß meine Ölluftpumpe
 durch D. R.-P. No. 169180 und meine Patentanmeldung vom
 28. Januar 1906 geschützt und vollständig unabhängig von
 anderen Konstruktionen ist. Um aber jede Kontrahierung in
 den Kreisen meiner Abnehmer zu besetzen, erkläre ich aus-
 drücklich, daß ich für jede Benachteiligung, die durch den
 Gebrauch oder den Verkauf meiner Ölluftpumpen erwachsen
 sollten, in vollem Umfange aufkomme, und für alle Mitteilungen
 über erfolgte Androhungen dankbar sein würde, weil es mir
 dadurch möglich wird, die geeigneten Schritte zu unternehmen.

Neu! Spinthariskope Neu!

mit Phosphoreszenzschirm und einer kleinen Menge
 Radiumbromid auf beweglichem Zeiger, um die außer-
 ordentlichen radioaktiven Eigenschaften des Radiums
 zu zeigen. *Preis M. 12.— u. 28.—.*

E. Leybold's Nachfolger

Cöln a. Rh.

Alleinvertrieb und alleinige Berechtigung
zur Fabrikation der

Neuen

Hoch-Vakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede.

D. R. P. angemeldet.

D. R. P. angemeldet.

Die Pumpe evakuiert in $2\frac{1}{2}$ Minuten eine Röntgenröhre von Atmosphärendruck bis auf Röntgenvakuum, ein 6 Liter-Gefäß in 10 Minuten von 10 mm Druck bis auf 0,0016 und in 25 Minuten ein 6 Liter-Gefäß von 10 mm Druck auf 0,00007 mm.

Die Pumpe ermöglicht in kürzester Zeit die höchsten bisher erreichten Verdünnungen zu erzielen.

Preis ohne Quecksilber Mark 300.—

E. Leybold's Nachfolger,
Cöln a. Rh.

Alleinige Inseratenannahme durch: Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Ulrichstr.
Mit einer Beilage der „Umschau“, Frankfurt a. M.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 22. HEFT 2.

DES GANZEN REIHE 327. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1907.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den
Porträts und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in
15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.
(Ausgegeben am 5. Februar 1907.)*

Inhalt.

	Seite
1. Otto Schönrock. Zur Abhängigkeit der Breite der Spektrallinien vom Druck.	209
2. P. Dobler. Über die Sekundärstrahlung, welche entsteht, wenn die β -Strahlen des Radiums dünne Metallschichten treffen und den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit der primären Strahlen, Schichtdicke und Intensität der Sekundärstrahlen. (Hierzu Taf. II.)	227
3. Josef R. von Geitler. Über die Absorption und das Strahlungsvermögen der Metalle für Hertz'sche Wellen	246
4. C. Fischer. Experimentelle Untersuchung gekoppelter Kondensatorkreise	265
5. Rudolf Ladenburg. Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck.	287
6. J. S. Sachs. Elektrische Schwingungen in Spulen mit metallischen Kernen	310
7. Boris Weinberg. Über die innere Reibung des Eises. II.	321
8. Ernst Giesing. Untersuchungen ebener Reflexionsbeugungsgitter mit Rücksicht auf ihre Brauchbarkeit zur absoluten Messung von Lichtwellenlängen	333
9. Godfrey H. Thomson. Über den Durchgang Hertz'scher Wellen durch Gitter	365
10. Géza Zemplén. Über die Oberflächenspannungen wässriger Lösungen. II	391
11. B. Walter. Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Heinrich Schnell: Untersuchungen am Funkeninduktor mit Quecksilberunterbrecher	397
12. P. Gruner. Bemerkungen zu der Arbeit: „Über den Zerfall von Radium A, B und C, II. Mitteilung“, von Herrn H. W. Schmidt	399

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 22.

1. *Zur Abhängigkeit
der Breite der Spektrallinien vom Druck;
von Otto Schönrock.*

1. Einleitung.

Wie in einer vor kurzem erschienenen Arbeit¹⁾ gezeigt worden ist, kann bei geringen Drucken (unter 2 mm etwa) die Breite der Spektrallinien durch die Bewegung der Träger der Emissionszentren nach dem Dopplerschen Prinzip erklärt werden.²⁾ Danach würden also die Rotation der Molekeln und die zeitliche Dämpfung der emittierenden Schwingung nur einen unmerklichen Beitrag zur Linienbreite liefern und daher auch bei höheren Drucken keine Berücksichtigung erheischen. Als Ursachen für die Verbreiterung mit dem Druck kommen somit hauptsächlich die Störung bei Zusammenstößen der Molekeln und die gegenseitige Beeinflussung benachbarter Moleküle in Betracht. Soll der letztere Umstand in Rechnung gezogen werden, so muß man spezielle Hypothesen über die Einwirkung der sich bewegenden Gasmolekeln aufeinander zur Hilfe nehmen; es ist dann möglich, qualitativ Verschiebungen und Verbreiterungen der Linien herzuleiten, auch unsymmetrische Verbreiterungen, wie unter anderen Michelson³⁾ und Humphreys⁴⁾ gezeigt haben.

Wesentlich einfacher liegen dagegen die Verhältnisse, wenn man den Grund für das Wachsen der Breite mit dem

1) Otto Schönrock, Ann. d. Phys. 20. p. 995. 1906.

2) Dabei handelte es sich zwar um Elektrolumineszenz, indessen ist die Annahme, daß durch die elektrischen Kräfte keine sehr merklich vorherrschende Richtung der Geschwindigkeit unter den Molekülen entstehe, bei der gewöhnlichen Glimmentladung erfüllt. Das wird auch durch die außerordentlich große Konstanz der für die Wellenlängen gefundenen Werte trotz sehr verschiedener Leuchtbedingungen bewiesen.

3) A. A. Michelson, Astrophys. Journ. 2. p. 259. 1895.

4) W. J. Humphreys, Astrophys. Journ. 23. p. 233. 1906.

Druck (bis zu etwa 400 mm) in den Zusammenstößen der Molekeln sucht. Sicherlich werden bei dem Zusammenprallen ziemlich plötzliche¹⁾ und zufällige Änderungen in der Phase, Amplitude und Schwingungsebene eintreten, Störungen, welche auf Grund des Fourierschen Theorems das Licht der Linie unhomogen machen, selbst wenn alle Zentren die gleiche Schwingung erregen. Die Linie wird um so breiter werden, je kürzer die ungestörten Wellenzüge werden, die Breite wird also eine Funktion der molekularen Weglänge sein. Da man nun für diese Größe einigermaßen verlässliche Werte besitzt, so ist eine theoretische Berechnung der Linienbreite ermöglicht. Michelson²⁾ hat eine solche Berechnung ausgeführt und kommt in seiner Arbeit zu dem Schluß, daß die theoretisch berechneten Linienbreiten der Größenordnung nach mit den von ihm experimentell gefundenen übereinstimmen, indem sich beim Wasserstoff die berechnete zur beobachteten Weite wie 1 zu 2,8 verhält. Dieser Vergleich beruht indessen auf einer etwas rohen Schätzung, denn führt man die Rechnung unter Beibehaltung der von Michelson gemachten Annahmen genauer durch, so stellt sich das obige Verhältnis auf 1 zu 13. Aus diesem Grunde soll im folgenden näher auf die Frage eingegangen werden, ob die bloßen Zusammenstöße der Moleküle einen merklichen Beitrag zur Linienbreite liefern, und zwar unter der früher eingeführten Annahme, daß die einzelnen Atome die Träger der Emissionszentren sind. Dabei ist es für das Folgende völlig belanglos, ob man die Ansicht Starks³⁾ teilt, daß nur positive Atomionen Linienspektren emittieren, oder aber der Auffassung Lenards⁴⁾ beipflichtet, daß neben den Atomionen auch elektrisch neutrale Atome Emissionszentren von Spektrallinien sein können.

2. Intensitätsverteilung in der Spektrallinie.

Bezeichnet n die Änderung der reziproken Wellenlänge und r die Länge eines ungestörten Wellenzuges, der zwischen

1) Entsprechend der gewöhnlichen Annahme, daß die Dauer eines Zusammenstoßes klein ist gegen die Zwischenzeit zwischen zwei aufeinander folgenden Zusammenstößen.

2) A. A. Michelson, *Astrophys. Journ.* 2. p. 251. 1895.

3) J. Stark, *Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch.* 8. p. 111. 1906.

4) P. Lenard, *Ann. d. Phys.* 17. p. 197. 1905.

zwei Zusammenstößen emittiert wird, so ergibt sich nach dem Fourierschen Theorem die Verteilung der Intensität i_1 des Lichtes in der Spektrallinie gemäß der Gleichung

$$(1) \quad i_1 = \frac{C \sin^2(\pi n r)}{n^2},$$

worin C einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Für $n = 0$ d. h. für die mittlere Wellenlänge λ_0 in Luft¹⁾ ist $i_1 = C \pi^2 r^2 = i_0$. Die Hälfte dieses Wertes ergebe sich für $n = n_1$, es sei also

$$\frac{C \sin^2(\pi n_1 r)}{n_1^2} = \frac{C \pi^2 r^2}{2},$$

$$\frac{\sin(\pi n_1 r)}{\pi n_1 r} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

was

$$(2) \quad \pi n_1 r = 1,3915$$

ergibt.

Statt n werde die neue Variable

$$(3) \quad n_2 = \frac{1,3915 n}{n_1}$$

eingeführt, dann geht Gleichung (1) über in

$$(4) \quad i_1 = \frac{i_0 \sin^2 n_2}{n_2^2}.$$

Setzt man nun noch für λ_0 die Intensität $i_0 = 1$, so läßt sich die Intensitätsverteilung nach der einfachen Gleichung

$$(5) \quad i_2 = \frac{\sin^2 n_2}{n_2^2}$$

berechnen. Trägt man als Abszissen die Werte für n_2 , als Ordinaten die i_2 auf, so erhält man bekanntlich eine Kurve von der Form der in nachstehender Figur ausgezogenen Linie. Praktisch kommt hierbei nur das Hauptmaximum zur Geltung, da die kleineren Maxima zu geringe Intensität besitzen. So tritt das Maximum bei D für $n_2 = 4,4935$ ein und beträgt $i_2 = 0,047189$, d. h. nur 4,7 Proz. der maximalen Helligkeit der Linie.

Durch die Größe $n_1 = AB = BC$ wird wieder die ganze Intensitätsverteilung bestimmt. Die Intensitätskurve selbst

1) λ_0 ist der Wert, welcher sich ergeben würde, wenn r unendlich groß wäre, wie dies praktisch bei sehr kleinen Gasdrucken der Fall ist.

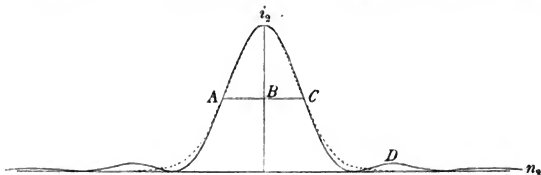
hat fast die gleiche Gestalt wie diejenige, welche sich früher für die Spektrallinien nach dem Dopplerschen Prinzip ergab. Hierfür war die Intensität

$$(6) \quad i = 2 \frac{-n^2}{n_1^2}$$

oder mit Hilfe der Gleichung (3)

$$(7) \quad i = 2 \frac{-n_2^2}{(1,3915)^2}.$$

Diese Intensitätskurve i , welche gleichfalls durch die Punkte A und C geht, ist in der Figur durch die gestrichelte Linie dar-



gestellt. Der größte Unterschied zwischen i und i_2 für dasselbe n_2 ergibt sich bei $n_2 = 2,5644$, wo $i - i_2 = 0,049704$ ist. Die durch den Druck bedingte Verbreiterung führt daher praktisch zu der gleichen Intensitätsverteilung wie die durch die Temperatur nach dem Dopplerschen Prinzip verursachte Breite. Tatsächlich hat denn auch Michelson bei seinen Interferenzversuchen stets Sichtbarkeitskurven erhalten, die mit dem Gesetze der obigen Intensitätsverteilung in Einklang stehen.

Die in Wellenlängen ausgedrückte Größe $AB = BC$ heiße nun wieder die Halbwerte δ_1 der Linie, dann ist

$$(8) \quad \delta_1 = n_1 \lambda_0^2.$$

Betrachtet man ferner wieder als wirksame Breite Δ_1 diejenige, welche bis zu den Stellen reicht, wo $i_2 = 0,05$ ist, die Intensität also 5 Proz. der maximalen Helligkeit der Linie beträgt, so wird, da $i_2 = 0,05$ für $n_2 = 2,5381$ ist,

$$\Delta_1 = 2 \cdot 2,5381 \lambda_0^2 \frac{n_1}{1,3915}$$

und mit Hilfe von Gleichung (8)

$$(9) \quad \Delta_1 = 3,6 \delta_1.$$

Dieser Wert ist wegen des im ganzen ein wenig steileren Abfalles der i_2 -Kurve etwas kleiner, als die wirksame Breite Δ war, welche durch die Temperatur gegeben wird. Hierfür ergab sich $\Delta = 4,2 \delta$, wenn δ entsprechend die Halbweite für die i -Kurve bezeichnet.

3. Theoretische Berechnung der Halbweite.

Aus Gleichung (8) folgt mit Hilfe von Gleichung (2)

$$(10) \quad \delta_1 = \frac{1,3915 \lambda_0^2}{\pi r}.$$

Bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit in Luft, $\bar{q}$ die mittlere Geschwindigkeit eines Atoms und L die mittlere freie Weglänge der strahlenden Atome, so ist offenbar im Mittel

$$(11) \quad r = \frac{c L}{\bar{q}},$$

so daß Gleichung (10) wird

$$(12) \quad \delta_1 = \frac{1,3915 \bar{q} \lambda_0^2}{\pi c L}.$$

Bezeichnet ferner T die absolute Temperatur, m_1 das Atomgewicht (für Sauerstoff gleich 16) und R die absolute Gaskonstante, so lehrt die kinetische Gastheorie

$$(13) \quad \bar{q} = \sqrt{\frac{8 R}{\pi}} \sqrt{\frac{T}{m_1}}.$$

Demgemäß wird Gleichung (12)

$$(14) \quad \delta_1 = \frac{1,3915}{\pi c} \sqrt{\frac{8 R}{\pi}} \frac{\lambda_0^2}{L} \sqrt{\frac{T}{m_1}}.$$

Im absoluten cm g sec-Maßsystem ist nun

$$R = 83155 \cdot 10^3, \quad c = 29980 \cdot 10^6,$$

so daß schließlich Gleichung (14) übergeht in

$$(15) \quad \delta_1 = 0,0_621499 \frac{\lambda_0^2}{L} \sqrt{\frac{T}{m_1}},$$

worin

$$(16) \quad T = t + 273,09$$

ist, wenn t die Temperatur in Celsiusgraden bedeutet.

Für die durch die Temperatur erzeugte Halbweite δ war früher der Ausdruck

$$(17) \quad \delta = 0,0_635813 \lambda_0 \sqrt{\frac{T}{m_1}}$$

abgeleitet worden.

Während für δ die Abhängigkeit von T und m_1 eine sehr einfache ist, läßt sich in dieser Hinsicht bei δ_1 direkt nichts aussagen, weil auch die Weglänge L von T und m_1 abhängt, und zwar in einer nicht allgemein angebbaren Weise. Sieht man für den Augenblick von der elektrischen Dissoziation ab, so kann man, was die Beziehung zwischen δ_1 und T betrifft, nur soviel sagen, daß bei konstantem Druck δ_1 mit wachsendem T noch schneller als proportional $1/\sqrt{T}$ abnimmt, weil die Erfahrung gezeigt hat, daß L mit wachsendem T noch schneller als proportional T zunimmt.

Bisher ist es nicht gelungen, theoretisch für die Intensitätsverteilung unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Zusammenstöße und translatorischen Bewegungen der Atome einen Ausdruck in geschlossener Form einwandfrei aufzustellen. Es soll daher mit Michelson die bei größeren Drucken beobachtete Halbweite δ_2 in erster Annäherung

$$(18) \quad \delta_2 = \delta + \delta_1$$

gesetzt werden. Für das Folgende darf dies unbedenklich geschehen, da mit zunehmendem Druck sehr bald δ_1 groß gegen δ wird.

4. Berechnung der Weglänge aus den von Michelson beobachteten Halbweiten.

Bekanntlich ist die Weglänge umgekehrt proportional dem Druck p . Entsprechend Gleichung (15) ist daher δ_1 proportional p , also auch $d\delta_2/dp$ konstant. Tatsächlich hat nun auch Michelson bei seinen Versuchen gefunden, daß die Halbweite δ_2 ziemlich genau mit dem Druck in linearem Verhältnis zunimmt. Untersucht wurden die folgenden neun Elemente: Wasserstoff, Lithium, Natrium, Magnesium, Kupfer, Zink, Silber, Kadmium und Gold. Die Resultate hat Michelson in einer Kurventafel niedergelegt, in welcher die Halbweiten eingetragen sind, worauf schon früher aufmerksam gemacht wurde.

Aus dieser Tafel sind für die größten beobachteten Drucke die Werte von δ_2 entnommen und in der dritten und vierten Spalte der folgenden Tab. 1 zusammengestellt worden.¹⁾ Da

1) Nach Albert A. Michelson in Phil. Mag. (5) 34. p. 295. 1892 gilt für H 6563, wenn p der Druck in Millimeter ist,

$$\delta_2 = 0,047 + 0,01193 p.$$

Michelson außer der Angabe, daß für Wasserstoff $\lambda_0 = 0,0,6563$ gebraucht wurde, keine näheren Mitteilungen über die benutzten Wellenlängen macht, so stehen in der fünften Spalte solche Wellenlängen, welche hinsichtlich der Helligkeit und Einfachheit im Linienbau als die wahrscheinlichsten gelten können und mit denen auch schon bei der Bestimmung der Halbweiten δ , teilweise sicher, gearbeitet worden ist. In der siebenten Spalte finden sich die Werte von δ , die entweder direkt beobachtet worden sind oder sich aus den in der sechsten Spalte verzeichneten, beobachteten Größen δ/λ_0 ergeben. Nach Gleichung (18) folgen dann die für die Drucke p geltenden Halbweiten δ_1 in der achten Spalte. Aus diesen ergeben sich, da δ_1 proportional p , die Werte von δ_1 bei $p = 100$ mm in der neunten Spalte. Die zehnte enthält die Temperaturen in Celsiusgraden, wie sie früher nach Gleichung (17) berechnet wurden und welche man schon als die wahrscheinlichsten nehmen muß, weil Michelson über die Temperaturen nichts sagt. Endlich in der letzten Spalte stehen die Weglängen L , welche entsprechend Gleichung (15) aus den beobachteten Werten von δ_1 in Spalte neun berechnet worden sind.

Tabelle 1.

Element	m_1	p in mm	δ_2 in cm beob.	λ_0 in cm	$\frac{\delta}{\lambda_0}$ beob.	δ in cm beob.	δ_1 in cm beob. nach Gl. (18)	δ_1 in cm beob. für $p =$ 100 mm	t	L in cm ber. nach Gl. (15)
H	1,008	200	0,0,233	0,0,6563	—	0,0,470	0,0,186	0,0,930	130	0,0,20
Li	7,03	207	0,0,212	0,0,6708	0,0,600	0,0,402	0,0,172	0,0,831	1700	0,0,20
Na	23,05	244	0,0,196	0,0,5688	—	0,0,115	0,0,184	0,0,754	600	0,0,57
Mg	24,36	400	0,0,155	0,0,5184	0,0,325	0,0,168	0,0,138	0,0,345	1700	0,0,15
Cu	63,6	400	0,0,188	0,0,5700	0,0,225	0,0,128	0,0,175	0,0,438	2100	0,0,98
Zn	65,4	319	0,0,208	0,0,6362	—	0,0,135	0,0,194	0,0,608	2200	0,0,88
Ag	107,93	400	0,0,940	0,0,5465	0,0,125	0,0,1683	0,0,872	0,0,218	940	0,0,99
Cd	112,4	400	0,0,141	0,0,6438	—	0,0,1663	0,0,134	0,0,335	570	0,0,73
Au	197,2	400	0,0,102	0,0,5838	0,0,112	0,0,1654	0,0,955	0,0,239	1600	0,0,95

Würden also die Halbweiten δ_1 in der Hauptsache durch die Zusammenstöße der Atome verursacht sein, so müßten die

mittleren freien Weglängen der leuchtenden Atome bei 100 mm Quecksilberdruck die in der letzten Spalte der Tab. 1 befindlichen Werte besitzen.

5. Berechnung der Weglänge nach der kinetischen Gastheorie.

Zum Vergleich mögen nun die Weglängen berechnet werden, welche die Gastheorie für die nicht leuchtenden Moleküle ergibt. Ist η der Koeffizient der inneren Reibung und ρ die auf Wasser von 4° bezogene Dichte des Gases, so lehrt die Gastheorie

$$(19) \quad \eta = 0,30967 \rho \bar{q} L.$$

Die allgemeine Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet, wenn m das Molekulargewicht (für Sauerstoff gleich 32) bezeichnet,

$$(20) \quad p = \frac{R \rho T}{m}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt mit Hilfe von Gleichung (13), in welcher m an Stelle von m_1 tritt,

$$(21) \quad L = \frac{1}{0,30967} \sqrt{\frac{\pi R}{8}} \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{T}{m}} = 18453 \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Hierin ist für 760 mm Quecksilberdruck

$$p = 10132 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-2}$$

zu setzen.

Nach dieser Gleichung läßt sich aber nur die Weglänge für Wasserstoff berechnen, weil der Reibungskoeffizient für die anderen acht Elemente nicht bekannt ist. Für Wasserstoff ist nach Breitenbach¹⁾ $\eta = 0,0,1117$ bei $t = 130$ und, da $m = 2,016$, bei $p = 100$ mm gemäß Gleichung (21) $L = 0,0,22$ cm.

Für die anderen Elemente bleibt uns ausschließlich die Loschmidtsche Schätzungsmethode, welche aber im folgenden zu einer solchen Annäherungsrechnung umgewandelt werden soll, daß sie für die vorliegenden Zwecke jedenfalls hinreichend genaue Resultate liefern wird. Bezeichnet g den Halbmesser der Wirkungssphäre bez. den mittleren Durchmesser einer

1) Paul Breitenbach, Ann. d. Phys. 5. p. 166. 1901.

Molekel und N die Anzahl der Molekeln in der Volumeneinheit (1 ccm), so ist nach der Gastheorie

$$(22) \quad L = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \varsigma^2 N},$$

worin N gemäß Gleichung (20) bei gleichem Druck und gleicher Temperatur für alle Gase den gleichen Wert hat, also von m nicht abhängt. Sind N_0 , T_0 und p_0 drei zusammengehörige Werte von Molekelzahl, Temperatur und Druck, so hat man

$$(23) \quad N = \frac{N_0 T_0}{p_0} \frac{p}{T},$$

und zwar ergibt sich aus der Theorie von van der Waals

$$N_0 = 54 \cdot 10^{18}, \quad T_0 = 273,09, \quad p_0 = 10132 \cdot 10^3.$$

Nehmen wir an, der Dampf werde verdichtet und im flüssigen bez. festen Zustande sei das gesamte Volumen b mal größer als der von den Molekülen ausgefüllte Raum, dann ist

$$(24) \quad \frac{\pi \varsigma^3 N}{6} = \frac{\varrho}{\varrho_1 b},$$

wenn ϱ_1 die auf Wasser von 4° bezogene, größte Dichte der Substanz im festen bez. flüssigen Zustande bedeutet. Aus dieser Gleichung läßt sich nun in einfacher Weise mit Hilfe der Gleichungen (20), (22) und (23) ein Ausdruck für L ableiten, nämlich

$$(25) \quad L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{b R}{6} \right)^{1/3} \left(\frac{p_0}{\pi N_0 T_0} \right)^{2/3} \frac{T}{p} \left(\frac{\varrho_1}{m} \right)^{1/3}.$$

Benutzt man diese Gleichung für solche Substanzen, für welche die aus der inneren Reibung abgeleiteten Weglängen bekannt sind, zur Berechnung von b , so erhält man für b Werte, die um 4 herum liegen. Es werde daher $b = 4$ gesetzt; dann geht Gleichung (25) über in

$$(26) \quad L = 0,29 \frac{T}{p} \left(\frac{\varrho_1}{m} \right)^{1/3}.$$

Zu bemerken ist, daß die Konstante 0,29 unabhängig ist von dem Werte, den man für N_0 annimmt, weil bei Änderung von N_0 dann b in entsprechendem Maße variiert. Eine Durchrechnung an zahlreichen Beispielen hat ergeben, daß die aus der inneren Reibung nach Gleichung (21) abgeleitete, richtige

Weglänge zwischen den Grenzen 0,58 L und 2,1 L liegt, wenn man L nach der angenäherten Gleichung (26) berechnet.

Für unsere Zwecke ist es daher erlaubt, die Weglängen der übrigen acht Elemente bei den gegebenen Temperaturen und 100 mm Druck aus Gleichung (26) zu berechnen. Die so gefundenen Weglängen enthält die folgende Tab. 2, in welcher aber für Wasserstoff der oben aus dem Reibungskoeffizienten abgeleitete Wert von L verzeichnet steht.

Tabelle 2.

Element	m	ϱ_1	L in cm berechnet nach Gl. (26)
H ₂	2,016	—	0,0,22
Li ₂	14,06	0,598	0,0,52
Na ₂	46,10	1,01	0,0,15
Mg ₂	24,36	1,75	0,0,74
Cu ₁	63,6	8,96	0,0,14
Zn ₁	65,4	7,24	0,0,12
Ag ₁	107,93	10,6	0,0,56
Cd ₁	112,4	8,69	0,0,33
Au ₁	197,2	19,4	0,0,86

Der Vergleich der Werte von L in Tab. 2 mit denen in Tab. 1 zeigt, daß auch der Größenordnung nach nicht von einer Übereinstimmung zwischen den einzelnen Werten gesprochen werden kann. Durchgehend sind die aus der Gastheorie abgeleiteten Weglängen bedeutend größer, zumal für die einatomigen Metaldämpfe, bei welchen also die Komplikationen wegen der teilweisen elektrischen Dissoziation der Moleküle in Fortfall kommen. Bei diesen einatomigen Dämpfen kann das Verhältnis der beiden Weglängen (etwa 87) mit Rücksicht auf die möglichen Fehler als konstant angesehen werden.

Daß bei den bisherigen Betrachtungen auf jeden Fall die richtige Größenordnung gewahrt geblieben ist, das zeigen wohl die Beobachtungen am Quecksilberdampfe, der ja auch einatomig ist. Für Hg₁ $\lambda_0 = 0,0,5461$ werde zunächst die Halb-

weite δ_2 bei $p = 60$ mm und $t = 500$ theoretisch berechnet. Die Reibungskoeffizienten hat Koch¹⁾ zwischen 270° und 380° bestimmt; er fand $\eta = 0,0,532$ bei 300° und η proportional $T^{1,6}$. Durch Extrapolation erhält man daher für $t = 500$

$$\eta = 0,0,532 \left(\frac{773}{573} \right)^{1,6} = 0,0,859$$

und somit, da $m = 200,0$, nach Gleichung (21) $L = 0,0,390$.²⁾ Den obigen Erfahrungen entsprechend setzen wir in Gleichung (15) $L = 0,0,390/87 = 0,0,448$ und bekommen $\delta_1 = 0,0,282$.³⁾ Aus Gleichung (17) folgt $\delta = 0,0,10385$, mithin ist $\delta_2 = \delta + \delta_1 = 0,0,32$. Nun hat Janicki⁴⁾ bei seinen Versuchen über die feinere Zerlegung der Spektrallinien mit der ohne Wasserkühlung benutzten Quarzlampe, für welche nach den Untersuchungen von Küch und Retschinsky⁵⁾ die obigen Bedingungen ungefähr zutreffen werden, eine Selbstumkehr der Hauptlinie beobachtet, wobei die Entfernung der beiden Teile der Umkehr $0,0,36$ cm betrug. Ein solcher Abstand läßt sich aber ungezwungen durch den obigen Wert der Halbweite δ_2 erklären.

6. Möglicher Grund für die Verschiedenheit der aus den Halbweiten bez. nach der Gastheorie berechneten Weglängen.

Wenn auch zu berücksichtigen ist, daß die theoretische Berechnung der Halbweiten δ_1 und δ_2 keine streng gültige gewesen ist, so dürfte doch kein Grund ersichtlich sein, daß diese theoretische Ableitung nicht der Größenordnung nach zutreffend ist. Will man also die Linienbreite allein auf die Bewegung und die Zusammenstöße der Atome zurückführen, so gilt es für die infolge Elektrolumineszenz leuchtenden Atome Weglängen herzuleiten, die mit den Werten der Tab. 1 übereinstimmen.

Man könnte zunächst versucht sein, die Drucke und die angesetzten Temperaturen als recht unsicher zu betrachten und

1) Synesius Koch, Ann. d. Phys. 19. p. 857. 1883.

2) Die angenäherte Gleichung (26) liefert, weil $e_1 = 14,4$, $L = 0,0,48$.

3) Dies würde $\delta_1 = 0,0,47$ für $p = 100$ mm geben.

4) L. Janicki, Ann. d. Phys. 19. p. 36. 1906.

5) R. Küch u. T. Retschinsky, Ann. d. Phys. 20. p. 563. 1906.

eine bessere Übereinstimmung zwischen L nach Gleichung (15) und L nach Gleichung (21) bez. (26) dadurch zu erzielen, daß man für p und T merklich andere Werte wählt. Kämen den L in Tab. 1 tatsächlich größere Drucke zu als angegeben, so würden die nach der Gastheorie berechneten Weglängen wie gewünscht kleiner werden, da L umgekehrt proportional p ist. Indessen müßte man dann zu so hohen Drucken greifen, daß solche, wenn sie wirklich während des Leuchtens geherrscht hätten, Michelson wohl sicher nicht entgangen wären.

Weniger einfach liegt es mit den Temperaturen. Nimmt man T größer, so wächst L nach Gleichung (15) noch ein wenig schneller als proportional $\sqrt{T}$, weil noch nach Gleichung (17) δ größer und somit δ_1 kleiner wird. Andererseits nimmt die nach der Gastheorie berechnete Weglänge, wie bereits früher bemerkt, noch schneller als proportional T zu. Demgemäß ändert sich das Verhältnis der beiden Weglängen $\frac{L \text{ nach Gl. (21) bez. Gl. (26)}}{L \text{ nach Gl. (15)}}$

nur ungefähr proportional $\sqrt{T}$. Es muß also T kleiner gewählt werden. Aus diesem Grunde und auch mit Rücksicht auf den erforderlichen Dampfdruck ist es daher ausgeschlossen, durch Wahl niedrigerer Temperaturen zu erreichen, daß dieses Verhältnis der Weglängen nahe gleich eins wird. Die großen Unterschiede in den Weglängen lassen sich mithin nicht durch etwaige Fehler des Druckes und der Temperatur erklären.

Nach Gleichung (22) nimmt die Weglänge mit größer werdender Wirkungssphäre ab. Nun ist es sehr wohl denkbar, daß die Ausdehnung der Wirkungssphäre eines strahlenden Atoms größer als die eines nicht leuchtenden Atoms sei. Wollte man darauf aber bei den einatomigen Dämpfen die Differenzen in den Weglängen zurückführen, so müßte man selbst in dem extremen Falle, daß fast alle Atome emittierende seien, den Halbmesser ς der Wirkungssphäre des leuchtenden Atoms bereits etwa neunmal größer als das ς des gewöhnlichen Atoms annehmen. Solche bedeutende Änderungen von ς erscheinen jedoch wenig einleuchtend.

Eine Ursache indessen gibt es noch, welche die Weglängen eines Gases, sobald dieses infolge Elektrolumineszenz leuchtet, verkürzen könnte und wenigstens theoretisch verkürzen muß,

und zwar die Leitungselektronen, die unregelmäßig zwischen den ponderablen Molekeln und Atomen herumschwirren. Der Einfluß der negativen Elektronen in dieser Hinsicht soll daher näher untersucht werden unter Einführung einiger auch durch ihre Einfachheit einleuchtenden Annahmen, die nach dem Vorgange von Thomson schon in der Ionentheorie der Gase gebräuchlich sind. Der Einfachheit halber mögen vorläufig die Betrachtungen auf die einatomigen Dämpfe beschränkt bleiben, was um so eher geschehen kann, weil gerade für diese die Weglängen am meisten differieren. Dem Sinne nach behalten übrigens die gezogenen Schlüsse auch für die zweiatomigen Gase ihre Gültigkeit.

Bei den verhältnismäßig hohen Temperaturen, um die es sich hier handelt, werden überwiegend die Leitungselektronen zumeist als freie Elektronen existieren können. Für eine Überschlagsrechnung¹⁾ genügt es daher, im leuchtenden Dampf nur freie negative Elektronen, positive Atomionen, neutrale Atome und höchstens noch mit Elektronen beladene Atome anzunehmen. Da den Elektronen eine große Geschwindigkeit, sowie ihrem scheinbaren Atomgewicht $m_2 = 0,0,5140$ entsprechend²⁾ eine gewisse Wirkungssphäre zukommt, so können behufs Berechnung der Weglängen die Elektronen wie gewöhnliche Gasmoleküle behandelt werden. Auf den leuchtenden Dampf sind daher die für die Weglängen in gemischten Gasen geltenden Gesetze anwendbar.

Dabei können die folgenden Betrachtungen im wesentlichen ungeändert bleiben, ob man wie bisher gewöhnlich Zusammenstöße der Elektronen mit den Atomen annimmt oder die Auffassung Lenards teilt, daß die Elektronen teils fortwährend von Atomen absorbiert und wieder neu emittiert werden³⁾, teils bei genügend großer Geschwindigkeit direkt durch die Atome hindurchfahren können.⁴⁾ Nur muß man im letzteren Falle jede Durchquerung eines Atoms durch ein

1) Im gegenwärtigen Stadium der Forschung kann es sich doch nur um erste Annäherungen handeln.

2) Es ist $m_2 = \frac{107,93}{0,01118 \cdot 1878 \cdot 10^4}$.

3) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 714. 1903.

4) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 191. 1902.

Elektron auch als einen mit Störung des Emissionsvorganges verbundenen Zusammenstoß ansehen, was aus folgenden Gründen berechtigt ist. Die Durchdringungen der Atome erfolgen ja durchaus nicht ohne jede Wechselwirkung zwischen Elektron und Atom, vielmehr sind nach Lenard¹⁾ wenn auch sehr geringe Änderungen in der Größe und Richtung der Geschwindigkeiten der hindurchtretenden Elektronen zuzulassen. In anderer Hinsicht ist die Einwirkung des durchgelassenen Elektrons auf das Atom beträchtlich, indem dieses bei der Durchdringung ein und mehr Elektronen emittieren kann.²⁾ Mit Rücksicht auf die Zentren der Lichtemissionen muß man daher notwendig annehmen, daß bei jeder Durchfahrung eines Atoms auch seine inneren elektrischen Eigenschwingungen und folglich die Lichtschwingungen eine plötzliche Änderung erleiden; hierbei kann sogar der Träger einer Linienserie zum Träger einer anderen Serie werden. Nach den jetzigen Anschauungen sind ja die relativ plötzlichen Schwingungsänderungen bei den Zusammenstößen und Durchquerungen als Folge der Nähewirkung³⁾ zwischen den elektromagnetischen Kraftfeldern der Atome und Elektronen aufzufassen. Auch sonst ist es üblich, beim Zusammentreffen von Atom und Elektron optisch starke Wechselwirkungen zu behaupten. So läßt z. B. Stark⁴⁾ die Ausstrahlung des Bandenspektrums eine Folge der Einwirkung des an das positive Atomion sich anlagernden Elektrons auf die Schwingungen der Elektronen im Ion sein, und Lenard⁵⁾ führt die Emission der außer allen Serien liegenden Linien darauf zurück, daß ein Atomion zu diesen Außerserienschwingungen dann erregt wird, wenn ein Elektron das Innere des Atomions durchquert. Übrigens verlangen solche Durchfahrten von Atomen zu einiger Häufigkeit ihres Ein-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 737. 1903.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 475 u. 485. 1903; 17. p. 229 u. Anm. 1 p. 230. 1905.

3) Vielleicht ist es möglich, sobald eine merkliche gegenseitige Beeinflussung zweier benachbarten Kraftfelder in Betracht kommt, gas-kinetisch auch von einem Zusammenstoße der betreffenden Atome zu sprechen.

4) J. Stark, Ann. d. Phys. 14. p. 506. 1904.

5) P. Lenard, Ann. d. Phys. 17. p. 235. 1905.

tretens Elektronen-Geschwindigkeiten, welche mehr als 100 Volt entsprechen, also $61 \cdot 10^7 \text{ cm sec}^{-1}$ überschreiten.¹⁾

In der Volumeneinheit einer Gasmischung seien N_1 Molekeln des ersten und N_2 Molekeln des anderen Gases vorhanden; werden dann in entsprechender Weise die früheren Größen L , σ und $\bar{q}$ mit den Indizes 1 bez. 2 versehen, so ist nach Maxwell²⁾

$$(27) \quad L_1 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \epsilon_1^2 N_1 + \pi \sigma^2 N_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1}\right)^2},$$

wobei bekanntlich sehr wahrscheinlich

$$(28) \quad \sigma = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$$

gesetzt werden darf. Durch Vertauschung der Indizes in Gleichung (27) erhält man den entsprechenden Ausdruck für L_2 . Bei der Anwendung auf das leuchtende Gas mögen sich die Größen mit dem Index 1 auf die Atome, diejenigen mit dem Index 2 auf die Elektronen beziehen.

Dann ist für die Weglänge L im nicht leuchtenden Dampfe nach Gleichung (27) und in Übereinstimmung mit Gleichung (22)

$$(29) \quad L = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \epsilon_1^2 N_1}.$$

Für die Weglänge L_2 der Elektronen ergibt sich ein sehr einfacher Ausdruck, wenn man bedenkt, daß sie sich mit einer Geschwindigkeit bewegen, die im Vergleich mit derjenigen der Atome sehr groß ist, und daß der Halbmesser der Wirkungssphäre des Elektrons gegen denjenigen eines Atoms wohl vernachlässigt werden darf. Es ist also $\bar{q}_2$ groß gegen $\bar{q}_1$, ϵ_2 klein gegen ϵ_1 und folglich

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi \epsilon_2^2 N_2 + \pi \sigma^2 N_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi \epsilon_2^2 N_2 + \pi \frac{\epsilon_1^2}{4} N_1} = \frac{1}{\pi \frac{\epsilon_1^2}{4} N_1} = \frac{4 \sqrt{2}}{\sqrt{2} \pi \epsilon_1^2 N_1}, \\ (30) \quad L_2 &= 4 \sqrt{2} L, \end{aligned}$$

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 732. 1903.

2) J. C. Maxwell, Phil. Mag. (4) 19. p. 19. 1860.

solange N_2 nicht sehr groß gegen N_1 wird. Wäre es dagegen nicht gestattet, ς_2 klein gegen ς_1 anzunehmen, so würde sich L_2 kleiner als nach Gleichung (30) ergeben und auch mit wachsendem N_2 abnehmen.

Für die Weglänge der Atome folgt nun

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \varsigma_1^2 N_1 + \pi \frac{\varsigma_1^2}{4} N_2 \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1}},$$

$$(31) \quad L_1 = \frac{L}{1 + \frac{N_2 \bar{q}_2}{4 \sqrt{2} N_1 \bar{q}_1}},$$

d. h. die Weglänge der Atome wird um so kleiner, je mehr der Ionisationsgrad und desto mehr die Geschwindigkeit der Elektronen steigt. Käme ς_2 gegen ς_1 in Betracht, so würde wieder L_1 nur noch kleiner werden. Nunmehr bleibt also nur noch übrig nachzusehen, ob durch Annahme möglicher Ionisationsgrade die Differenzen in den Weglängen aufgeklärt werden können. Dabei liegt wohl kein zwingender Grund vor zu der Annahme, daß den Elektronen Temperatur und Druck in dem realen Sinne und in der meßbaren Weise zukommen, wie dies bei den Gasatomen entsprechend den Gleichungen (13) und (20) der Fall ist.

Wird das Verhältnis der beiden Weglängen $\frac{L_{\text{nach Gl. (26)}}}{L_{\text{nach Gl. (15)}}} = f$ gesetzt, so soll $L_1 = L/f$ werden. Danach ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (31)

$$(32) \quad \frac{N_2}{N_1} = 4\sqrt{2}(f-1)\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2}.$$

Als spezielles Beispiel sei $f = 50$, ein Wert, welcher sich sehr nahe für Magnesium, Silber und Kadmium ergeben hat. Wir setzen $m_1 = 100$ und $T = 1400$, dann ist nach Gleichung (13) $\bar{q}_1 = 544 \cdot 10^3$. Selbst wenn nun nur $\bar{q}_2 = 10^8$ angenommen wird, so folgt aus Gleichung (32) $N_2/N_1 = 0,15$, ein Wert, der wohl nicht außerhalb des Bereiches der Möglichkeit liegt, auch wenn man selbst die Annahme macht, daß jedes Atomion nur ein Elektron verloren habe.

Auf Grund dessen, was man bis jetzt über die Ionisation in leuchtenden Gasen weiß, läßt sich wohl allerdings zur Zeit

noch nicht endgültig entscheiden, ob bei Drucken unter 400 mm die Linienbreite im wesentlichen durch die Bewegung und die Zusammenstöße der Atome verursacht ist. Soviel dürfte aber aus dem Vorhergehenden folgen, daß die Zusammenstöße der Atome jedenfalls einen merklichen Beitrag zur Linienbreite liefern und hierbei der Einfluß der Elektronen nicht zu vernachlässigen ist. Näheren Aufschluß über die hier auftauchenden Fragen dürften noch am ersten Untersuchungen mit den einatomigen Gasen, wie Helium, Argon, Quecksilber, bringen, deren Linien auch zum Teil einfach ohne Trabanten sind. Auch die von Michelson zuweilen beobachtete Abhängigkeit der Halbweite von den Versuchsbedingungen, wie Stromstärke, Größe und Art der Elektroden, Durchmesser des Vakuumrohres etc., könnte teilweise mit auf die Elektronen und die verschiedene Ionisation zurückzuführen sein.

Zum Schluß werde noch kurz darauf eingegangen, daß möglicherweise auch die beträchtlichen Linien-Verbreiterungen im Falle der Erregung des Leuchtens durch elektrische Schwingungen mit durch die Elektronen erklärt werden können, wenn auch die Vermutung sehr nahe liegt, daß unter dem Einfluß der elektrischen Schwingungen noch neue Komponenten¹⁾ entstehen. Macht man nämlich die Annahme, daß die sehr schnellen elektrischen Oszillationen eine sehr große Konzentration der Elektronen zur Folge haben, eine Hypothese, die manches für sich hat, so können sich auch für kleine Drucke bereits sehr große Linienbreiten ergeben. Nehmen wir z. B. Quecksilberdampf von $t = 500$ bei $p = 2$ mm, so ist bei gewöhnlicher Glimmentladung für $\lambda_0 = 0,045461$ nach Gleichung (17) $\delta = 0,010385$, nach Abschnitt 5

$$\delta_1 = \frac{0,0469}{50} = 0,011938$$

und daher $\delta_2 = \delta + \delta_1 = 0,01048$, eine Halbweite, wie sie Michelson etwa beobachtet hat. Setzen wir nun bei der Erregung des Leuchtens durch Schwingungen den etwas extremen Fall $N_2/N_1 = 1$ und $\bar{q}_2 = 10^9$, so wird, da nach Gleichung (13) $\bar{q}_1 = 286 \cdot 10^2$ ist, nach Gleichung (32) $f = 618 \cdot 10^1$. Nach

1) Man könnte auch daran denken, daß die Leuchtkraft von solchen Atomen, die viele Elektronen verloren haben, bedeutend wird.

Abschnitt 5 war $\eta = 0,0_3859$ und somit nach Gleichung (21) $L = 0,0117$. Bei der Berechnung von δ_1 nach Gleichung (15) ist an Stelle von L mithin $L_1 = \frac{0,0117}{618 \cdot 10^1}$ einzusetzen, so daß $\delta_1 = 0,0_9667$ wird. Es ergibt sich also $\delta_2 = \delta + \delta_1 = 0,0_971$ bei $t = 500$, bedeutend größer als vorher. Wollte man diese Halbweite allein auf Grund des Dopplerschen Prinzips erklären, so käme man auf die enorm hohe Temperatur von zweihundertsechzigtausend Grad.

(Eingegangen 29. November 1906.)

**2. Über die Sekundärstrahlung,
welche entsteht, wenn die β -Strahlen des Radiums
dünne Metallschichten treffen und den
Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit der
primären Strahlen, Schichtdicke und Intensität
der Sekundärstrahlen; von P. Dobler.**

(Hierzu Taf. II.)

1. Einleitung.

Bald nachdem Becquerel die radioaktiven Substanzen entdeckt hatte, fand er, daß Körper, welche von der neuen Strahlung getroffen werden, sekundäre Strahlen aussenden.¹⁾ Weiterhin machte Paschen die Beobachtung, daß ein dünnes Metallblättchen, in den Weg der β -Strahlen gebracht, keine Schattenwirkung hervorbringt, sondern daß infolge von Sekundärstrahlung hinter dem Schirm verstärkte Strahlung vorhanden ist.²⁾ Er ließ auf eine photographische Platte, die teilweise mit einem dünnen Platinstreifen bedeckt war, die β -Strahlen des Radiums einwirken und fand, daß unter dem Platin die Schwärzung größer war als an den direkt getroffenen Stellen.

Die Strahlung hinter dem Schirm setzt sich zusammen aus den nicht absorbierten primären β -Strahlen und aus den Sekundärstrahlen. Die Intensität der Gesamtstrahlung ist abhängig von der Geschwindigkeit der primären β -Strahlen und der Dicke der getroffenen Platinschicht. Auf Anraten von Hrn. Prof. Paschen, dem ich auch an dieser Stelle meinen innigsten Dank aussprechen möchte für die Anregung zu dieser Arbeit und die mannigfache Förderung, die er mir zuteil werden ließ, unternahm ich es, die Abhängigkeit festzustellen, die zwischen der Geschwindigkeit der β -Strahlen, der Dicke der vorgelegten Platinschicht und der Intensität der Strahlung hinter dem Schirm besteht.

1) H. Becquerel, Mémoires de l'Académie 46. p. 37f. 1903.

2) F. Paschen, Physik. Zeitschr. 16. p. 502 f. 1904.

2. Versuchsanordnung.

Die β -Strahlen des Radiums werden durch die Einwirkung eines homogenen Magnetfeldes gezwungen, sich in kreisförmigen Bahnen zu bewegen. Zwischen der Geschwindigkeit v der β -Strahlen, ihrem Verhältnis von Ladung zu Masse, e/m , dem Radius R des Kreises und der Stärke H des Magnetfeldes besteht die bekannte Beziehung:

$$(1) \quad R \cdot H = \frac{v}{e/m}.$$

Bei den vorliegenden Versuchen muß man eine Vorrichtung treffen, welche erlaubt, die Geschwindigkeit der β -Strahlen zu bestimmen. Zu dem Zweck wurden sie durch ein homogenes Magnetfeld in ein Spektrum auseinandergezogen und dieses auf einer photographischen Platte aufgefangen. Dabei war das Spektrum derart hergestellt, daß jedem Punkt der photographischen Platte eine bestimmte, leicht zu berechnende Geschwindigkeit zugeordnet ist. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit benutzte man die Eigenschaft der β -Strahlen, daß für jede Geschwindigkeit das Produkt $R \cdot H$ einen konstanten Wert besitzt. Man maß den Krümmungsradius des β -Strahls, der einen bestimmten Punkt der photographischen Platte traf, und die Stärke des Magnetfeldes. Damit kennt man $R \cdot H$. Da Kaufmann die Werte von v und e/m bestimmt hat¹⁾, so läßt sich infolge von Gleichung (1) aus seiner Tabelle die Geschwindigkeit v für den durch $R \cdot H$ charakterisierten Strahl entnehmen.

Der Krümmungsradius eines Strahls im homogenen Magnetfeld ist bestimmt, wenn man die gegenseitige Lage von drei Punkten seiner Bahn kennt. Zweckmäßig benützt man als einen Punkt die strahlende Substanz, als zweiten eine Öffnung in einem Schirm und als dritten die betreffende Stelle des Spektrums auf der photographischen Platte. Um ein reines Spektrum zu erhalten, verwendeten Kaufmann und Becquerel als Strahlungsquelle ein Körnchen Radiumsalz. In einer gewissen Entfernung von diesem brachten sie einen Schirm an mit einem kleinen Loch und ließen die hindurchgehenden Strahlen auf eine photographische Platte einwirken. Auf diese

1) W. Kaufmann, Göttinger Nachrichten p. 1 u. f. 1901.

Weise ist jedem Punkt des Spektrums ein bestimmter Kreis zugeordnet, dessen Radius sich berechnen läßt.

Da bei den vorliegenden Versuchen die Stellen gleicher Helligkeit im direkten und im verstärkten Spektrum bestimmt werden (vgl. Abschnitt 6. p. 237 f.), so ist es von Wichtigkeit, daß in dem Spektrum die Punkte gleicher Geschwindigkeit in einer geraden Linie liegen. Das ist bei der Anordnung von Becquerel nicht der Fall.¹⁾ Außerdem muß man sehr lange exponieren, da nur sehr wenig Radium verwendet werden kann, wenn das Spektrum rein bleiben soll. Geeigneter wird diese Anordnung, wenn man statt der punktförmigen Strahlungsquelle und der punktförmigen Öffnung im Schirm parallele Spalte benutzt. Dann kann man ein dünnes, mit Radium gefülltes Glasröhrchen verwenden und die Stellen gleicher Helligkeit liegen auf Parallelen zu dem Spalt. Allerdings ist dann das Spektrum nicht ganz rein; die Unsicherheit, welche dadurch entsteht, ist aber so klein, daß sie gegenüber den anderen Fehlern kaum in Betracht kommt.

3. Berechnung der Halbmesser.

Es wurden zwei Anordnungen getroffen: 1. Eine Anordnung, bei welcher die photographische Platte mit der Verbindungsebene Spalt-Radium (in der Fig. 1 AB) einen spitzen Winkel einschließt. Bei dieser Anordnung schneidet die Platte nicht alle Strahlen unter demselben Einfallswinkel. Die stark abgelenkten Strahlen fallen mehr streifend auf, die Strahlen großer Geschwindigkeiten beinahe senkrecht. Diese Anordnung möge Anordnung I heißen. Die Entfernung des Spaltes vom Radium sei a . Die Lage der Ebene der photographischen Platte gegen A und B ist bestimmt durch die Abstände

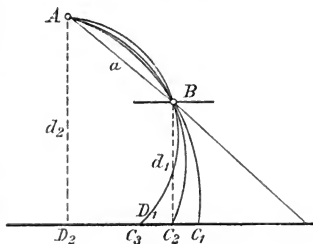


Fig. 1.

1) H. Becquerel, l. c. 46. p. 157. 1903.

$BD_1 = d_1$ und $AD_2 = d_2$ (vgl. Fig. 1). Die γ -Strahlen, welche das Radium aussendet, werden durch das Magnetfeld nicht abgelenkt, ihr Markierungsstrich auf der Platte stellt die Schnittlinie ihrer Ebene mit der Ebene AB dar. Die Lage irgendeines Punktes der Platte gegenüber dem Apparat ist also vollständig bestimmt, wenn man den Abstand vom Strich der γ -Strahlen kennt. Der Halbmesser des Kreises, der durch einen beliebigen Punkt des aufgefangenen Spektrums, den Spalt und die strahlende Substanz gegeben ist, läßt sich somit berechnen.

Ist A das Radium, B der Spalt, C ein Punkt auf der photographischen Platte (vgl. Fig. 2), so wird der Halbmesser des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises:

$$R = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}.$$

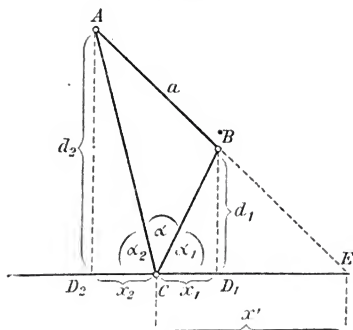


Fig. 2.

Nach Fig. 2 ist:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Setzt man diesen Wert für $\sin \alpha$ in die obige Gleichung ein, so wird

$$\begin{aligned} R &= \frac{a}{2(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2)} \\ &= \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_1) + (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_2)}}{\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_1} \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Abstand des Punktes C von D_1 mit x_1 , den Abstand des Punktes C von D_2 mit x_2 , so ist

$$R = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{x_1}{d_1}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{x_2}{d_2}\right)^2\right)}}{\frac{x_2}{d_2} + \frac{x_1}{d_1}}.$$

Apparatkonstante sind a , d_1 und d_2 . Gemessen wird auf der photographischen Platte der Abstand $CE = x'$, hieraus ergibt sich dann x_1 und x_2 , und zwar ist

$$x_1 = x' - D_1 E = x' - 1,54$$

$$x_2 = D_2 E - x' = 4,14 - x'.$$

Bei der Ausmessung der Apparatdimensionen war

$$a = 4,55 \text{ cm}, \quad d_1 = 2,20 \text{ cm}, \quad d_2 = 5,93 \text{ cm}.$$

Zweite Anordnung. Um Fehler zu vermeiden, welche durch die verschiedenen Einfallswinkel der Strahlen entstehen könnten, und zur Kontrolle wurde eine Anordnung hergestellt, ähnlich der, welche Becquerel benutzte¹⁾ und bei welcher alle Strahlen die photographische Platte senkrecht schneiden. Diese Anordnung möge Anordnung II heißen. Der Einfallswinkel aller Strahlen wird ein Rechter, wenn man die photographische Platte in die Mittellotebene CD von Spalt B und Radium A bringt (vgl. Fig. 3). Ohne besondere Vorrichtung markieren sich hier die γ -Strahlen nicht, die bei der ersten Anordnung eine feste Marke zum Ablesen der Abstände abgaben. Deswegen muß bei dieser Anordnung der Rand der photographischen Platte immer denselben Abstand von der Verbindungsebene des Spaltes mit dem Radium haben, um verschiedene Platten messungsweise miteinander vergleichen zu können.

Die Berechnung der Halbmesser ist bei der Anordnung II sehr einfach. Ist $AB = 2a$ der Abstand des Radiums von

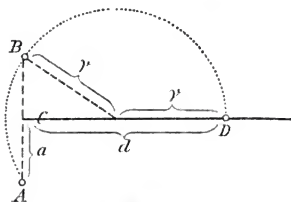


Fig. 3.

1) H. Becquerel, l. c. 46. p. 156 f. 1903.

dem Spalt, $DE = d$ der Abstand eines Punktes D der photographischen Platte von der Verbindungsebene durch A und B , so wird der Halbmesser des durch die drei Punkte ABD bestimmten Kreises:

$$r^2 = a^2 + (d - r)^2.$$

Hieraus

$$r = \frac{a^2 + d^2}{2d}.$$

Hier ist a eine konstante Größe, die sich aus den Apparatdimensionen ergibt, während d für jede einzelne Platte gemessen wird und deshalb veränderlich ist.

Bei dem verwendeten Apparat war $a = 1$ cm. Die Größe d erhielt man, wenn man dem Abstand des Punktes gleicher Helligkeit vom Rand der Platte eine konstante Größe, 2,25 cm hinzufügte, nämlich die Entfernung des Randes der Platte von der Ebene AB .

In Taf. II sind einige Aufnahmen für beide Anordnungen zusammengestellt.

4. Apparatdimensionen und Art der Ausführung der Versuche.

Zu den Versuchen wurde reines Radiumbromid benutzt, und zwar abwechselungsweise 15 mg und 20 mg, die je in ein dünnes Glasröhrchen eingeschmolzen waren. Das mit der strahlenden Substanz gefüllte Röhrchen wurde in die Rille R eines Bleiklotzes B gelegt und mit einer Bleiplatte P bedeckt (vgl. Fig. 4). In das Bleistück B war ein Ausschnitt A gemacht, so daß nicht alle vom Radium ausgehenden Strahlen den Schirm treffen konnten. Unterhalb des Radiums war ein Bleischirm S angebracht, in welchem sich der Spalt C befand, welcher aus den Strahlen ein schmales Bündel ausschied. Der Schirm war 2,3 cm dick und 3,1 cm breit; es konnten somit auch die durchdringendsten γ -Strahlen keine Wirkung auf die photographische Platte hervorbringen. Um die eventuell von dem Schirm ausgehenden sekundären Strahlen unschädlich zu machen, war parallel zu ihm in $\frac{1}{2}$ cm Entfernung ein Messingblech M angebracht. Die Bleistücke befestigte man in einem Kasten aus Holz und schob diesen so zwischen die Pole eines Elektromagneten, daß Radium, Spalt und photographische Platte sich noch im homogenen Feld befanden. Die Versuche wurden im verdunkelten Zimmer angestellt und außerdem der ganze

Kasten mit einem schwarzen Tuch eingehüllt. Man benutzte Schleussnerssche Trockenplatten, die man in passende Größe schnitt. Die photographische Platte wurde in eine kleine Kassette

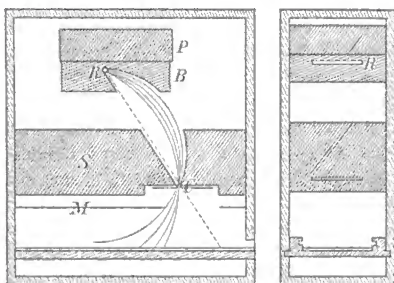


Fig. 4.

aus Holz gelegt und diese Kassette in den Holzkasten geschoben. Eine Führung F sorgte dafür, daß sie und damit die lichtempfindliche Platte immer denselben Abstand von Radium und Spalt hatte. Obenstehende Fig. 4 zeigt die Anordnung in $\frac{1}{2}$ natürlicher Größe.

Bei der Anordnung II war die strahlende Substanz auf dem Boden eines Bleikästchens B von 0,5 cm Wandstärke und 3,3 cm Breite (vgl. Fig. 5). Oben in der Wand des Kästchens befand sich ein schmaler Spalt S . Das Bleikästchen war in einem größeren Kasten aus Holz so befestigt, daß die Verbindungsebene von Spalt und Radium senkrecht auf der photographischen Platte stand. Die Holzkassette, in welcher die Platte lag, lief in einer Führung F der Holzwandung und berührte immer einen festen Anschlag. Der Abstand des Radiums von dem Spalt war 2 cm.

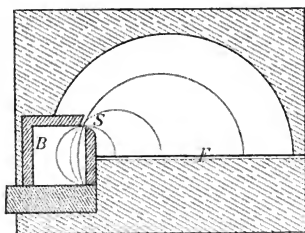


Fig. 5.

5. Ausmessung des Magnetfeldes.

Zur Erregung des Magnetfeldes diente ein Elektromagnet, welcher von der Akkumulatorenbatterie des Instituts gespeist wurde. Die Endflächen der Polschuhe waren Kreise und hatten einen Durchmesser von 8 cm, ihr Abstand betrug 4 cm. Die Windungen bestanden aus dickem Draht, durch welchen Ströme von mehreren Ampère Stärke hindurchgeschickt werden konnten, ohne daß er sich merklich erwärmte. Ursprünglich hatte man die Absicht, bei jeder Aufnahme das Feld mit einer Wismutspirale auszumessen. Es stellte sich aber heraus, daß das Magnetfeld auch durch den Strom genügend genau definiert war, welcher durch die Windungen des Elektromagneten floß, wenn man den remanenten Magnetismus durch wiederholtes Kommutieren des Stromes vorher beseitigt hatte. Zunächst wurde das Magnetfeld mit Hilfe der Wismutspirale relativ ausgemessen. Da für die Versuche Felder unter 1000 absoluten Einheiten nötig waren, so konnte man mit der gewöhnlichen Anordnung der Wheatstoneschen Brücke die geringe Widerstandsänderung der Wismutspirale nicht messen. Deshalb wurde folgende Anordnung getroffen:

In die Zweige a und b der Wheatstoneschen Brücke (vgl. Fig. 6) waren die nahezu gleichen, sehr sorgfältig her-

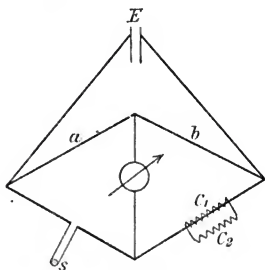


Fig. 6.

gestellten Widerstände W_a und W_b eingeschaltet, deren Widerstandsverhältnis vor der Messung bestimmt wurde. Im dritten Zweig lag die Wismutspirale W_s , im vierten waren die Widerstände W_{c1} und W_{c2} parallel geschaltet. Der eine Widerstand W_{c1} war nahezu gleich dem Widerstand der Wismutspirale. Änderte sich ihr Widerstand um einen geringen Betrag, so hatte man den Widerstand W_{c1} be-

deutend zu ändern, damit kein Strom durch das Galvanometer ging. Die Wismutspirale konnte auf einem Schlitten leicht verschoben werden. Bei jeder Feldstärke maß man ihren Widerstand im Feld und außerhalb desselben.

Wurde der Strom vor den Messungen oft kommutiert, so war das Magnetfeld, wie die Ausmessung mit der Wismutspirale ergab, durch ihn genügend definiert. Deshalb wurde bei den späteren Messungen die Wismutspirale nicht mehr benutzt, sondern nur der Strom bestimmt, welcher das Magnetfeld erzeugte. Hr. Prof. Paschen hatte die Freundlichkeit, die absolute Ausmessung des Magnetfeldes mit Hilfe seines neuen Meßapparates¹⁾ auszuführen. Die so erhaltenen Werte für die mittlere Feldstärke sind auf der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Stromstärke (Ampère)	Feldstärke (abs. Einh.)
1,1	221,6
1,6	315,0
2,03	399
2,48	455
3,08	632
4,30	828
5,40	1024
6,38	1182
7,52	1324
8,99	1481
9,35	1552
10,64	1671

Es wurde auch untersucht, wie für die verwendeten schwachen Magnetfelder die Widerstandsänderung der Wismutspirale von der Feldstärke abhängt. Man erhielt folgende Werte:

Feldstärke (abs. Einh.)	Widerstandsänderung $\frac{\Delta W}{W} \cdot 10^5$
342	129,2
452	256,5
1051	1212
1383	2099
1699	3142

1) F. Paschen, Physik. Zeitschr. 6. p. 371. 1905.

Sucht man diese Abhängigkeit zwischen H und $\Delta W/W$ gesetzmäßig darzustellen, so erhält man dieselbe Gleichung, wie sie Carpinì¹⁾ gefunden hat, nur sind die konstanten Faktoren andere. Dieser Unterschied rührt wohl daher, daß verschiedenes Wismutmaterial verwendet wurde.

6. Geschwindigkeit derjenigen β -Strahlen, für welche die Absorption der ursprünglichen Strahlen durch die Platinschicht gerade gleich ist der Verstärkung durch die entstehende Sekundärstrahlung.

Legt man eine lichtempfindliche Platte in die Holzkassette, bringt diese in das homogene Magnetfeld und läßt die Strahlung einwirken, so bemerkt man nach dem Entwickeln der photographischen Platte an zwei Stellen eine Schwärzung. Man sieht einen schmalen Streifen quer über die Platte, welcher durch die Einwirkung der vom Radium ausgehenden γ -Strahlen entstand. Dieser Strich der γ -Strahlen stellt die Schnittlinie der durch das Radium und den Spalt bestimmten Ebene mit der Glasplatte dar und bildet eine feste Marke. Nach einem kleinen Zwischenraum, der je nach der Stärke des Magnetfeldes größer oder kleiner ist, ist die Platte durch das Spektrum der β -Strahlen geschwärzt. Die Strahlen einer und derselben Geschwindigkeit liegen auf Parallelen zu dem Strich der γ -Strahlen; die β -Strahlen größter Geschwindigkeit liegen am nächsten, die langsamsten sind am weitesten von der Marke entfernt.

Nicht alle β -Strahlen bringen gleiche Schwärzung hervor. Die ganz schnellen und die ganz langsamen Strahlen bringen die geringste Schwärzung hervor, eine maximale Wirkung haben die Strahlen mittlerer Geschwindigkeit. Bei den verwendeten Platten waren dies Strahlen einer Geschwindigkeit $v = 2,6 \cdot 10^{-10}$ cm/sec. Bedeckt man jetzt die photographische Platte teilweise mit einem dünnen Platinstreifen und zwar so, daß diesen Streifen Strahlen aller Geschwindigkeiten treffen können, so ist das Spektrum unter diesem zum Teil verstärkt, zum Teil geschwächt gegenüber dem Spektrum der unbedeckten Platte. Man bestimmte nun diejenige Stelle der beiden Spektren,

1) C. Carpinì, Physik. Zeitschr. 1904. p. 819.

für welche die Absorption der ursprünglichen Strahlen durch die Platinschicht gerade gleich ist der Verstärkung durch die entstehende Sekundärstrahlung. Diese Stelle ist daran zu erkennen, daß im direkten und im verstärkten Spektrum gleiche Helligkeit vorhanden ist. Man bestimmte diese Stelle, indem man im verdunkelten Zimmer hinter der Platte den geraden Faden einer Glühlampe so lange verschob, bis er in seiner ganzen Ausdehnung gleich hell erschien. Die Bestimmung ließ sich ziemlich scharf ausführen. Der Ort der Geraden gleicher Helligkeit wurde am Rand der Platte markiert, ihr Abstand x' vom Strich der γ -Strahlen abgelesen. Aus diesem Abstand x' und den Apparatdimensionen, die auf p. 231 angegeben sind, berechnet man den Krümmungsradius R der Strahlen, welche im direkten Spektrum und unter dem Platinstreifen gleiche Helligkeit hervorgebracht hatten. Aus der Stärke des Stromes, welcher durch die Windungen des Elektromagneten floß, erhält man nach der Tabelle auf p. 235 die Stärke H des Magnetfeldes. Man kann das Produkt $R \cdot H$ für die Strahlen bilden und erhält dann aus der Tabelle von Kaufmann für v und e/m nach den Betrachtungen von Abschnitt 2 den Wert der zugehörigen Geschwindigkeit v . Für die Platindicke $d = 13 \mu$ möge die Berechnung angeführt werden. Es wurden folgende Ablesungen gemacht: Abstand der Geraden gleicher Helligkeit vom Strich der γ -Strahlen: $x' = 1,36$ cm. Zur Bestimmung wurde die Anordnung I verwendet. Nach p. 231 werden also die Größen x_1 und x_2 , die in dem Ausdruck für den Krümmungsradius vorkommen:

$$x_1 = 1,54 \text{ cm} - 1,36 \text{ cm} = 0,18 \text{ cm},$$

$$x_2 = 4,14 \text{ cm} - 1,36 \text{ cm} = 2,78 \text{ cm}.$$

Somit ist:

$$R = \frac{4,55}{2} \sqrt{\frac{\left(1 + \left(\frac{0,18}{2,2}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{2,78}{5,93}\right)^2\right)}{\left(\frac{2,78}{5,93} - \frac{0,18}{2,2}\right)}} = 6,54 \text{ cm}.$$

Der Strom, welcher durch die Windungen des Elektromagneten floß, hatte eine Stärke von $i = 2,40$ Amp.; bei der obigen Aufnahme war also nach Tab. I auf p. 235 die Stärke H des Magnetfeldes = 445 abs. Einh. und demgemäß $R \cdot H = 2910$.

Aus der Tabelle von Kaufmann erhält man zu diesem Wert von $R.H$ die Geschwindigkeit $v = 2,7 \text{ cm/sec} \cdot 10^{10}$. Führt man diese Bestimmung für verschiedene Platindicken aus, so erhält man eine Reihe zusammengehöriger Werte von v und d . Auf die photographische Platte wurden etwa $\frac{1}{2} \text{ cm}$ breite Platinstreifen von 1μ , $2,5 \mu$, $4,6 \mu$, 13μ , $19,6 \mu$, $34,7 \mu$ und 50μ Dicke gelegt und ungefähr 1 Stunde lang der Einwirkung des Spektrums der β -Strahlen ausgesetzt. Für jede Platindicke wurden eine Anzahl Aufnahmen gemacht.

Da nicht alle β -Strahlen des Spektrums die photographische Platte senkrecht treffen, so muß man diejenige Platindicke berechnen, die an der Stelle gleicher Helligkeit von den β -Strahlen wirklich durchdrungen wird. Ist der Einfallswinkel α , so ist diese Dicke bei einer Platinschicht von der gemessenen Dicke d gleich $d/\sin \alpha$. Die erhaltenen Werte sind folgende:

Tabelle a.

Die Platinstreifen liegen auf der unbedeckten photographischen Platte.

Dicke des Platinstreifens $d = 2,5 \mu$; $\alpha = 60^\circ$; $\frac{d}{\sin \alpha} = 2,9 \mu$.

Platte	$R.H$	Mittelwert	Fehler $\%$	$v \cdot 10^{-10} \text{ cm/sec}$
1	1985	1930	+4	2,37
2	1965		+1,8	
3	1980		+2,5	
4	1930		0	
5	1860		-3,5	
6	1860		-3,5	

Dicke des Platinstreifens $d = 4,6 \mu$; $\frac{d}{\sin \alpha} = 4,7 \mu$.

1	2370	2280	+4	2,53
2	2320		+1,8	
3	2210		-3	
4	2210		-3	
5	2300		+0,9	

Dicke d des Platinstreifens 13μ ; $\alpha = 90^\circ$.

1	2870	2894	-0,7	2,75
2	2910		+0,5	
3	2910		+0,5	
4	2910		+0,5	
5	2870		-0,7	

Tabelle a (Fortsetzung).

Dicke d des Platinstreifens $19,6 \mu$; $\frac{d}{\sin \alpha} = 19,8 \mu$.

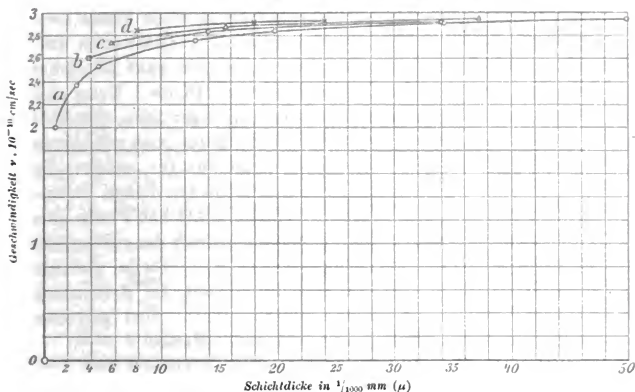
Platte	$R \cdot H$	Mittelwert	Fehler $\%$	$v \cdot 10^{-10}$ cm/sec
1	3660	3480	+5,2	2,83
2	3310		-5	
3	3470		-0,3	
4	3580		+3	
5	3370		-3,2	

Dicke d des Platinstreifens $34,7 \mu$; $\frac{d}{\sin \alpha} = 35,2 \mu$.

1	4330	4570	-5,3	2,92
2	4660		+2,4	
3	4530		-0,9	
4	4660		+2,4	
5	4660		+2,4	

Für $d = 50 \mu$ war $R \cdot H = 4900$ und $v = 2,94 \cdot 10^{-10}$ cm/sec.

Für $d = 1 \mu$ war $R \cdot H = 1450$ und $v = 2,0 \cdot 10^{10}$ cm/sec.



Kurve a, photogr. Platte unbedeckt.

„ b „ „ mit Pt von 1μ Dicke bedeckt.

„ c „ „ „ „ „ $2,5 \mu$ „ „

„ d „ „ „ „ „ 5μ „ „

Fig. 7.

In Fig. 7 ist diese Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Schichtdicke graphisch dargestellt. Die Dicke der Platin-

schicht wurde als Abszisse, die zugehörige Geschwindigkeit als Ordinate in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingetragen. Vgl. Fig. 7, Kurve *a*.

Auf diese Weise erhält man für die unbedeckte Platte den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Schichtdicke. Nicht nur die Platinstreifen, welche auf die photographische Platte gelegt sind, geben Anlaß zu Sekundärstrahlung, sondern auch das Glas der photographischen Platte selbst. Es ist also, als ob eine sehr dünne Schicht Platin über die ganze Platte gebreitet wäre. Es lag nahe, zu untersuchen, was für eine Abhängigkeit sich ergibt, wenn man über die ganze photographische Platte Platin ausbreitet und darüber Streifen verschiedener Dicke legt. Dieses Verfahren hat auch den Vorteil, daß die leicht absorbierbare Sekundärstrahlung, welche durch die Wandungen des Kästchens veranlaßt wird, nicht mehr auf die lichtempfindliche Schicht einwirken kann.

Man vergleicht also auf der photographischen Platte zwei Spektren, welche unter verschiedenen dicken Platinstreifen entstanden sind. Die beiden Spektren zeigen ein ganz ähnliches Verhalten wie oben bei der unbedeckten Platte. Unter der dicken Schicht ist das Spektrum zum Teil verstärkt, zum Teil geschwächt gegenüber dem Spektrum unter der dünneren Platinschicht. Es gibt wie oben eine Stelle, für welche die Intensität der Strahlung hinter den verschieden dicken Platinschichten gleich ist, d. h. auf der photographischen Platte eine Gerade gleicher Helligkeit parallel zu dem Strich der γ -Strahlen. Auf dieselbe Weise wie früher wurde diese Stelle gleicher Intensität bestimmt und die Geschwindigkeit der β -Strahlen berechnet, welche die photographische Platte dort getroffen haben. Die Ausmessung lieferte folgende Werte:

Tabelle b.

Die Platte mit Platin von $1\ \mu$ Dicke bedeckt, darüber Streifen von $2,9\ \mu$, $13\ \mu$ und $34\ \mu$ Dicke gelegt.

Platindicke <i>d</i>	Geschwindigkeit <i>v</i> · 10^{-10} cm/sec
$3,9\ \mu$	2,60
14	2,83
35	2,92 ₅

Tabelle c.

Die Platte mit Platin von $2,5\ \mu$ Dicke bedeckt, darüber Streifen von $3,2\ \mu$, $13\ \mu$ und $35\ \mu$ Dicke gelegt.

Platindicke d	Geschwindigkeit $v \cdot 10^{-10}$ cm/sec
5,7 μ	2,74
15,5	2,87
37,5	2,93

Tabelle d.

Die Platte mit Platin von $5\ \mu$ Dicke bedeckt, darüber Streifen von $2,9\ \mu$, $13\ \mu$ und $19\ \mu$ Dicke gelegt.

Platindicke d	Geschwindigkeit $v \cdot 10^{-10}$ cm/sec
7,9 μ	2,84
18	2,91
24	2,92

Vgl. Kurve b , c , d in Fig. 7.

Die obigen Werte wurden mit Hilfe von Anordnung I erhalten. Zur Kontrolle wurden einige Aufnahmen mit Anordnung II hergestellt. Man erhielt da folgende Werte:

Dicke des Platinstreifens: $d = 2,5\ \mu$; $R \cdot H = 1920$.

Ebenso wurde für die Stelle gleicher Helligkeit erhalten:

Platte 1: Platindicke $d = 5\ \mu$; $R \cdot H = 2380$,

„ 2: „ $d = 5\ \mu$; $R \cdot H = 2280$.

Man erhält also mit Anordnung II Werte, welche innerhalb der Fehlergrenzen mit den mit Hilfe von Anordnung I erhaltenen Werten übereinstimmen. Die Aufnahmen wurden mit Anordnung I gemacht, weil man hier nicht so lange exponieren mußte, und weil man weniger Störungen infolge von Sekundärstrahlung der Kastenwandungen ausgesetzt war.

Bei den mit Anordnung II hergestellten Aufnahmen bemerkt man zwei Stellen gleicher Helligkeit der beiden Spektren, zu welchen verschiedene Geschwindigkeiten gehören. Bei Anordnung I bemerkt man nur die Stelle, zu welcher die kleinere

Geschwindigkeit gehört, wahrscheinlich, weil die Dispersion nicht groß genug ist. Anordnung II ergab folgende Werte:

Dicke des Platinstreifens . . .	$d = 2,5 \mu$;	$v = 2,8 \cdot 10^{10}$ cm/sec,	
„ „ Aluminiumstreifens . . .	$d = 7,5 \mu$;	$v = 2,6 \cdot 10^{10}$	„ .

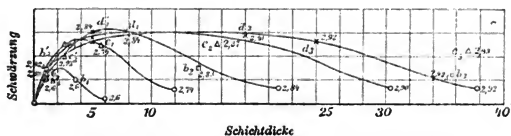
7. Abhängigkeit der Intensität der Strahlung von der Geschwindigkeit der β -Strahlen und der Dicke der durchstrahlten Schicht.

Im vorigen Abschnitt hat man die Abhängigkeit der Geschwindigkeit der primären β -Strahlen von der Dicke des vorgelegten Platinstreifens bestimmt. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, in welcher Beziehung die Schichtdicke und die Geschwindigkeit der β -Strahlen zu der Intensität der Strahlung hinter dem Platin stehen. Als Maß der Intensität der Strahlung diene ihre photographische Wirksamkeit, also die Schwärzung, welche sie auf der lichtempfindlichen Schicht hervorbringen.

Der Zusammenhang, der zwischen Intensität der Strahlung, Schichtdicke und Geschwindigkeit besteht, wurde graphisch ermittelt. Auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems trug man die Platindicke d , auf der Ordinatenachse die Intensität J der Strahlung ab. Jedem Wert von d und J entspricht also ein Punkt der Koordinatenebene. Diesem Punkt ordnet man die Geschwindigkeit zu, welche nach der Messung des vorigen Abschnittes für die betreffende Platindicke die Stelle gleicher Schwärzung hervorbringt. Trägt man auf diese Art die Werte ein, so erhält man in der Koordinatenebene ein System von Punkten, wobei jedem Punkt eine gewisse Geschwindigkeit zugeordnet ist, wie auf einer Landkarte zu jedem Punkt außer seiner Länge und Breite noch seine Höhe über dem Meere gehört. Verbindet man die Punkte gleicher Geschwindigkeit durch einen stetigen Kurvenzug, wie man auf den Landkarten die Punkte gleicher Höhe durch die Höhenkurven verbindet, so erhält man in der Koordinatenebene ein System von Kurven. Jeder Geschwindigkeit entspricht eine Kurve, welche angibt, wie für diese Geschwindigkeit die Intensität der Strahlung hinter dem Platin von der Dicke der durchstrahlten Schicht abhängt.

Ist z. B. die ganze photographische Platte mit Platin von

$1\ \mu$ Dicke bedeckt und darüber ein Streifen von $2,5\ \mu$ Dicke gelegt, so bringt nach Tab. b auf p. 240 eine Geschwindigkeit $v = 2,60 \cdot 10^{10}$ cm/sec unter beiden Schichten gleiche Helligkeit hervor. Der Schwärzung an dieser Stelle wurde schätzungsweise der Wert 1 gegeben. Trägt man diesen Wert der Schwärzung als Ordinate, die Dicke der Platinschicht als Abszisse in das Koordinatensystem ein, so erhält man in der Koordinatenebene zwei Punkte, einen Punkt mit der Abszisse $d = 1\ \mu$ und einen Punkt mit der Abszisse $d = (2,5 + 1)\ \mu$. Zu diesen beiden Punkten ist je die Geschwindigkeit $v = 2,60 \cdot 10^{10}$ cm/sec zu schreiben. Auf die mit Platin von $1\ \mu$ bedeckte photographische Platte hat man außerdem noch einen Platin-



x Punkte für die mit Pt von $5\ \mu$ bedeckte Platte.

Δ " " " " " " $2,5\ \mu$ " "

□ " " " " " " $1\ \mu$ " "

○ " " " unbedeckte Platte.

Fig. 8.

streifen von $13\ \mu$ Dicke und von $34,7\ \mu$ Dicke gelegt. Nach Tab. b bringt die Geschwindigkeit $v = 2,83 \cdot 10^{10}$ cm/sec bez. $v = 2,92 \cdot 10^{10}$ cm/sec die Stelle gleicher Schwärzung hervor. Die Intensität der Strahlung ist für die Stelle gleicher Helligkeit ein wenig größer als für den Streifen von $2,5\ \mu$ Dicke. Für die mit $1\ \mu$ bedeckte Platte hat man also in der Koordinatenebene sechs Punkte erhalten, nämlich b_1 und b_1' , b_2 und b_2' , c_2 und c_2' . (Vgl. Fig. 8.)

Ist die ganze photographische Platte mit Platin von $2,5\ \mu$ Dicke bedeckt und darüber ein Streifen von $2,5\ \mu$ Dicke gelegt, so bringt nach Tabelle c, p. 241 die Geschwindigkeit $v = 2,74 \cdot 10^{10}$ cm/sec unter beiden Schichten gleiche Schwärzung hervor, d. h. die Intensität der Strahlung ist für diese Geschwindigkeit hinter einer Platinschicht von $2,5\ \mu$ und von $5\ \mu$ dieselbe. Die Intensität der Strahlung ist schätzungsweise

$2\frac{1}{2}$ mal so groß als für die mit Platin von $1\ \mu$ Dicke bedeckte Platte. Trägt man die Werte in dasselbe Koordinatensystem wie oben ein, so erhält man die Punkte c_1 und c_1' , zu denen je die Geschwindigkeit $v = 2,74 \cdot 10^{10}$ cm/sec zu schreiben ist. Für einen darüber gelegten Streifen von $13\ \mu$ Dicke erhält man die Punkte c_2 und c_2' , zu denen die Geschwindigkeit $v = 2,87 \cdot 10^{10}$ cm/sec gehört. Ebenso ergibt sich für den Streifen von $35\ \mu$ Dicke ein Punkt c_3 und ein Punkt c_3' , denen die Geschwindigkeit $v = 2,93 \cdot 10^{10}$ cm/sec zugeordnet werden muß.

Bedeckt man die ganze photographische Platte mit einer Platinschicht von $5\ \mu$ Dicke und legt darüber wieder Streifen von $2,5\ \mu$, $13\ \mu$ und $19,6\ \mu$, so erhält man die Punkte d_1 und d_1' , d_2 und d_2' , d_3 und d_3' , zu denen die Geschwindigkeit $2,84 \cdot 10^{10}$ cm/sec bez. $2,91 \cdot 10^{10}$ cm/sec bez. $2,92 \cdot 10^{10}$ cm/sec gehört.

Für jede Geschwindigkeit läßt sich jetzt die Kurve zeichnen, welche angibt, wie für diese Geschwindigkeit die Intensität der Strahlung an der Stelle gleicher Schwärzung von der Schichtdicke abhängt.

In Fig. 8 wurden durch Interpolation die Kurven konstruiert, welche zu den Geschwindigkeiten

$$v = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec, } 2,74 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec, } 2,84 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec,}$$

$$2,90 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec und } 2,92 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$$

gehören.

Schneidet man das Kurvensystem der Fig. 8 durch eine Parallele zur Ordinatenachse, z. B. im Abstand $5\ \mu$, so bringen Strahlen der Geschwindigkeit $v = 2,84 \cdot 10^{10}$ cm/sec das Maximum der Wirkung hervor. Die schnelleren und langsameren Strahlen schwärzen weniger. Dasselbe Verhalten zeigt die mit $5\ \mu$ bedeckte Platte. Das Kurvensystem der Fig. 8 erhält man also auch, wenn man die Helligkeiten mißt, welche die verschiedenen Geschwindigkeiten unter der Schicht hervorbringen, und die Werte für d , v und Schwärzung einträgt. Das Bild ist nur wenig abhängig von der Schätzung der Intensitäten.

8. Schlußbetrachtungen.

Die Kurven, welche die Abhängigkeit der Gesamtstrahlung von der Schichtdicke für die einzelnen Geschwindigkeiten an-

geben, zeigen alle ein ganz charakteristisches Verhalten. Sie steigen ziemlich rasch an, verlaufen eine Strecke beinahe horizontal und fallen dann allmählich ab, wobei der absteigende Ast einen Wendepunkt hat. Besonders bei den Kurven für die großen Geschwindigkeiten ist dies auffallend, auch die Umhüllungslinie der Kurven zeigt dasselbe Verhalten.

Hr. Eve¹⁾ hat die Wirkung untersucht, welche die Sekundärstrahlen eines Gemisches von β - und γ -Strahlen auf ein Elektrometer ausüben, hat aber nicht die Abhängigkeit für die einzelnen Geschwindigkeiten der β -Strahlen gemessen. Seine Kurve zeigt ein ganz ähnliches Verhalten wie die hier beobachteten, besonders ist die Analogie mit der Umhüllungskurve groß.

Unter der Annahme, daß das Absorptionsgesetz für die β -Strahlen von der Form ist $e^{-d\alpha}$, wo d die Dicke der absorbierenden Schicht und α den Absorptionskoeffizienten darstellt, hat Hr. Prof. Paschen für die sekundäre Strahlung bei dünnen Platinschichten die Formel aufgestellt:

$$\frac{\alpha \cdot A}{\alpha - \beta} (e^{-d\beta} - e^{-d\alpha}),$$

wo β der Absorptionskoeffizient der entstehenden Sekundärstrahlung ist. Nimmt man den Absorptionskoeffizienten α der primären Strahlen klein an im Vergleich zu dem Absorptionskoeffizienten β der entstehenden Strahlen und zeichnet die durch obige Gleichung dargestellten Kurven, so erhält man ein ganz ähnliches Kurvensystem wie das Kurvensystem II. Die Formel von Hrn. Prof. Paschen stellt also die Beobachtungen in erster Annäherung dar, doch reichen für eine genaue Bestimmung von α , β und A die vorhandenen Beobachtungen nicht aus.

1) S. A. Eve, Phil. Mag. 1904. p. 669 ff.

(Eingegangen 25. November 1906.)

**3. Über die Absorption und das Strahlungsvermögen der Metalle für Hertz'sche Wellen¹⁾;
von Josef R. von Geitler.**

V. Bjerknes²⁾ hat gezeigt, daß die nichtmagnetischen Metalle hinsichtlich ihrer Fähigkeit, elektrische Wellen zu dämpfen, sich in derselben Reihenfolge ordnen wie ihre spezifischen elektrischen Widerstände. Seine Versuche beziehen sich jedoch nur auf Wellen *einer* Periode. Es schien mir daher nicht ohne Interesse, zu untersuchen, ob und in welcher Weise das Verhältnis der Dämpfungskonstanten verschiedener Metalle von der Wellenlänge abhängt; denn eine etwa vorhandene anomale Absorption müßte durch solche Messungen nachgewiesen werden können; von vornherein war aber ein normales Verhalten der verschiedenen Metalle nicht mit Sicherheit zu erwarten, hatte doch Drude³⁾ bei Flüssigkeiten anomale Absorption im Gebiete der Hertz'schen Wellen erhalten. Bei Metallen wäre eine solche Erscheinung vielleicht sogar weniger überraschend, wenn man bedenkt, daß infolge des enormen Brechungsexponenten die Länge der ins Metall eindringenden Wellen nur Bruchteile eines Millimeters beträgt, so daß in den kleinen Strukturelementen des Materials eine mögliche Ursache für das Auftreten anomaler Dispersion vermutet werden könnte.

I. Theoretischer Teil.

Das Prinzip der Messungen war dasselbe, das Bjerknes in der oben erwähnten Arbeit verwendet hatte. Bjerknes bediente sich bekanntlich möglichst gleichdimensionierter, kreisförmiger Resonatoren aus verschiedenen, durch dasselbe Loch gezogenen Metalldrähten, deren Enden mit einem Hertz-

1) Gekürzt mitgeteilt aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien mathem.-naturw. Kl. 115. Abt. IIa. 5. Juli 1906.

2) V. Bjerknes, Wied. Ann. 47. p. 69. 1892.

3) P. Drude, Wied. Ann. 58. p. 1. 1896.

Bjerknesschen Elektrometer verbunden werden konnten. Die verschiedenen Drähte wurden von ihm gegeneinander ausgetauscht und nacheinander der Beobachtung unterworfen, indem für jedes Material der Elektrometerrausschlag gemessen wurde, den ein und derselbe auf die Periode des Resonators abgestimmte und mit ihm lose gekoppelte Primärkreis erzeugte.

Nach Bjerknes¹⁾ kann man schon nach wenigen Oszillationen des rasch gedämpften primären Kreises den Resonator selbst als Erreger betrachten und seine Schwingungen durch die Gleichung darstellen:

$$(1) \quad \varphi = B \cdot e^{-\beta t} \cos \delta t,$$

wo φ die Potentialdifferenz der Elektrometerplatten bedeuten möge. Der Elektrometerrausschlag ist dann dem Impulse

$$J = \int_0^{\infty} \varphi^2 dt$$

proportional, der sich für nicht zu große Werte der *Dämpfungs-konstanten* β zu

$$(2) \quad J = \frac{B^2}{4\beta}$$

berechnet.

Hieraus ergeben sich für den vorliegenden Zweck nachstehende *Folgerungen*:

Für verschiedene Resonatoren, deren Anfangspotentialdifferenz B dieselbe ist, wird das Verhältnis n der Elektrometerrausschläge

$$(3) \quad n = \frac{J}{J'} = \frac{\beta'}{\beta}.$$

Da bei der Bjerknesschen (und bei meiner) Versuchsanordnung die B -Werte für alle Resonatoren dieselben sind, wie sich aus der Unabhängigkeit der maximalen Funkenlänge eines Resonators von dessen materieller Beschaffenheit ergibt²⁾, so bietet die Methode die Möglichkeit, das Verhältnis n der Dämpfungskonstanten für verschiedene Wellenlängen in einfacher Weise zu ermitteln.

Die Dämpfung der Schwingungen in einem Hertzschen Erreger — und als solchen können wir nach dem oben Gesagten

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 44. p. 83. 1891.

2) H. Hertz, Ges. Werke 2. p. 50.

den Resonator betrachten — ist, wie schon Hertz¹⁾ gezeigt und besonders Bjerknes²⁾ ausgeführt hat, das Resultat zweier verschiedenen Wirkungen, und demgemäß setzen sich die Konstanten β aus zwei Summanden zusammen; der eine, im folgenden α genannte, bezieht sich auf jenen Teil der aufgefängenen Energie, der sich beim Eindringen der Wellen in den Draht in (Joulesche) Wärme verwandelt; der andere stellt die Dämpfung dar, die durch Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen vom Erreger (Resonator) in den umgebenden Raum erzeugt wird; er soll mit dem Buchstaben δ bezeichnet und nach Bjerknes das Hertzsche Dekrement genannt werden. Wir müssen daher das Verhältnis n in der Form schreiben:

$$(3) \quad n = \frac{\alpha' + \delta'}{\alpha + \delta}.$$

Die Jouleschen Dekremente sind wesentlich von dem Material und der Gestalt des Resonators, sowie von der Schwingungsdauer abhängig. Sie haben bekanntlich den Wert

$$(4) \quad \alpha = \frac{w \cdot \tau}{2L},$$

wo τ die ganze Schwingungsdauer, L den Selbstinduktionskoeffizienten, w den Widerstand des Resonators für das betreffende τ bedeuten. Nach Lord Rayleigh und J. Stefan³⁾ ist für unmagnetisches Material und sehr schnelle Schwingungen der Periode τ der Widerstand

$$(5) \quad w = \frac{l}{R} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}},$$

wenn l die Gesamtlänge, R den Halbmesser und σ den spezifischen Widerstand des Drahtes für Gleichstrom darstellen.

Bei Verwendung vollkommen kongruenter Erreger (Resonatoren) verschiedenen Materials ist also das Verhältnis der Jouleschen Dekremente

$$(6) \quad v = \frac{\alpha'}{\alpha} = \sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}}$$

1) l. c. p. 147.

2) V. Bjerknes, Bihang till k. Svenska Vet.-Akad. Handlingar 20. Afd. I. Nr. 5. 1895; Über elektrische Resonanz II. Mit dieser Arbeit wurde ich erst in einem späten Zeitpunkte meiner Versuche bekannt.

3) J. Stefan, Wied. Ann. 41. p. 411. 1890.

von der Periode unabhängig. Wären demnach die Hertz'schen Dekremente sehr klein gegen die Jouleschen (Gleichung (3)), so müßte auch $n = \nu$ von der Schwingungsdauer unabhängig sein. In diesem Falle müßte sich das Vorhandensein *anomal*er Absorption eines der Metalle für die betreffende Schwingungsdauer durch eine Abweichung des Wertes von n von der Konstanten ν kundgeben.

Nun wäre es aber ein verhängnisvoller Irrtum, die Hertz'schen Dekremente gegenüber den Jouleschen ohne weiteres vernachlässigen zu wollen. Hertz selbst hat für einen 1 m langen geradlinigen Oszillator, an dessen Enden Kugeln von 15 cm Halbmesser angebracht waren (entsprechend einer Wellenlänge von etwa 480 cm), näherungsweise berechnet, daß die dem Erreger ursprünglich mitgeteilte Energie schon nach elf Halbschwingungen durch die Strahlung allein auf die Hälfte ihres Anfangswertes gesunken sein mußte, selbst wenn der Widerstand des Leiters zu vernachlässigen gewesen wäre.¹⁾

Das Hertz'sche Dekrement eines elektromagnetischen Oszillators hängt offenbar sehr von dessen geometrischer Gestalt ab und ist wohl gerade in dem von Hertz betrachteten Falle des geradlinigen Erregers besonders groß. Daß aber auch für anders gestaltete Systeme die Hertz'schen Dekremente von der Größenordnung der Jouleschen sein, ja diese beträchtlich übertreffen können, zeigen die Versuche von Bjerknes²⁾ mit kreisförmigen Resonatoren; er fand z. B. für 0,2 mm-Kupferdrähte $\alpha = 0,021$, $\delta = 0,018$, für 0,5 mm-Kupferdrähte $\alpha = 0,0078$, $\delta = 0,0266$.

Bei meinen Versuchen kamen durchwegs *Paralleldrahtresonatoren* zur Verwendung. Die folgenden Überlegungen über die zu erwartende Abhängigkeit des Verhältnisses n (Gl. (3)) von der Periode τ , wenn die Dekremente δ gegen die α nicht vernachlässigt werden dürfen, beziehen sich daher in erster Linie auf Erreger (Resonatoren) dieser Gestalt.

Zunächst sei bemerkt, daß für eine und dieselbe Schwingungsdauer τ die Werte δ und δ' in dem Ausdrucke für n einander gleich (δ) gesetzt werden können. Dies folgt aus der

1) H. Hertz, Ges. Werke 2. p. 160.

2) V. Bjerknes, l. c. p. 36.

Erwägung, daß für den Wert von δ neben der materiellen Beschaffenheit des Mediums in der *Umgebung*¹⁾ des Resonators (in unserem Falle also Luft) nur die geometrische Konfiguration des Resonators selbst, nicht aber dessen eigene materielle Beschaffenheit maßgebend sein dürfte.²⁾ Es sei jedoch betont, daß trotzdem das *Strahlungsvermögen* eines Resonators, wie weiter unten noch gezeigt werden soll, von seinen stofflichen Eigenschaften abhängig ist.

Wir können demnach schreiben:

$$(7) \quad n = \frac{\alpha' + \delta}{\alpha + \delta} = \frac{\nu + \gamma}{1 + \gamma},$$

wenn $\gamma = \delta/\alpha$ gesetzt wird und ν die frühere Bedeutung (Gleichung (6)) besitzt; hierbei soll festgesetzt werden, daß stets $\nu < 1$ sei, was durch passende Wahl der verglichenen Metalle natürlich immer erfüllt werden kann. Um die *Abhängigkeit des Verhältnisses n von der Periode τ* zu finden, soll folgendermaßen verfahren werden: Aus Gleichung (7) folgt unmittelbar:

$$(8) \quad \frac{dn}{d\gamma} = \frac{1 - \nu}{1 + \gamma}.$$

Nach der Voraussetzung über ν ist die rechte Seite von Gleichung (8) stets > 0 ; um daher den Sinn der Abhängigkeit des n von τ zu ermitteln, genügt es, $d\gamma/d\tau$ zu berechnen. Nach der Definition von γ ergibt sich daher, daß

$$(9) \quad \frac{d\gamma}{d\tau} \geq 0,$$

wenn

$$(10) \quad \frac{d\delta}{d\tau} - \gamma \frac{d\alpha}{d\tau} \geq 0.$$

Setzt man in Gleichung (4) den Wert von w aus Gleichung (5) und für L den Wert für parallele Drähte vom Abstände d und der Gesamtlänge l , nämlich $2l \cdot \log \text{nat } d/R$, so folgt

$$(4a) \quad \alpha = \frac{\sqrt{\sigma \cdot \tau}}{4 R \log \text{nat } \frac{d}{R}} = c \cdot \sqrt{\tau},$$

1) R. Clausius, *Mechan. Wärmetheorie* III. Aufl. 1. p. 335 ff.

2) Vgl. auch V. Bjerknes, *l. c.* p. 36.

wo der Faktor c stets > 0 ist. Demnach ist auch

$$(4b) \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{c}{2\sqrt{\tau}}$$

stets > 0 und es hat $d\alpha$ dasselbe Zeichen wie $d\tau$. Wie sich schon aus Gleichung (4a) ergibt, *nimmt also das Joulesche Dekrement mit abnehmender Schwingungsdauer (Wellenlänge) ebenfalls ab.*

Es ist sonach in Formel (10) stets $\gamma \cdot (d\alpha/d\tau) > 0$. Über das Vorzeichen des Wertes $d\gamma/d\tau$ entscheidet daher das Vorzeichen und eventuell die Größe von $d\delta/d\tau$. Nun gelingt es allerdings im allgemeinen und auch für den vorliegenden Fall nicht, das Dekrement δ als Funktion der geometrischen Konstanten und somit der Periode des Resonators analytisch zu berechnen; aber es ist möglich, den Sinn dieser Abhängigkeit und demnach das Vorzeichen von $d\delta/d\tau$ für die hier in Betracht kommenden Verhältnisse und andere einfache Fälle mit einiger Wahrscheinlichkeit vorauszusehen. Wenn nämlich die von den einzelnen Punkten des Erregers (Resonators) ausgehenden Elementarwellen einander in allen Punkten des umgebenden Raumes vernichten, so wird überhaupt keine Strahlung stattfinden und $\delta = 0$ und unabhängig von der Periode sein.¹⁾ Dies wäre der Fall, wenn der Resonator aus zwei unmittelbar nebeneinander gelegten parallelen Drähten bestünde, deren Abstand also gegen die Wellenlänge vollständig zu vernachlässigen wäre, da hier entsprechende Punkte der Drähte stets in entgegengesetzten Phasen schwingen. Ein solcher Resonator würde übrigens auch keine zugestrahlte Energie aufzunehmen vermögen. Zieht man nun die wirklich vorkommenden Fälle in Betracht, also z. B. Resonatoren aus parallelen, in endlichem Abstände befindlichen Drähten wie in den folgenden Experimenten, so ergibt sich leicht, daß die Strahlung für eine gegebene Schwingungsdauer um so größer sein muß, je größer der Abstand der Drähte, und für einen gegebenen Abstand d der Drähte um so größer, je kürzer die Wellenlänge und daher die Periode τ ist. Für unseren Fall

1) Vgl. H. Poincaré, Les oscillations électriques p. 100. § 51. Paris 1894.

eines Paralleldrahtresonators von konstantem d und durch eine Brücke veränderlicher Länge folgt demnach, daß

$$(11) \quad \frac{d\delta}{d\tau} < 0$$

sein muß. Für unseren Fall ist also stets

$$\frac{d\delta}{d\tau} - \gamma \frac{d\alpha}{d\tau} < 0$$

und nach Gleichung (10) daher auch stets

$$(10a) \quad \frac{d\gamma}{d\tau} < 0.$$

Da wir aber (Gleichung (8)) fanden, daß stets $dn/d\gamma > 0$, so ergibt sich das Resultat, daß im Falle unserer Versuche das Verhältnis n der Dämpfungskonstanten mit abnehmender Schwingungsdauer wachsen muß.¹⁾

Eine Anwendung der voranstehenden Betrachtungen auf den *Leuchtprozeß* ist naheliegend. Betrachtet man die strahlenden Elementarkomplexe leuchtender Dämpfe unter dem Bilde äußerst kleiner Hertzscher Erreger oder Gruppen von solchen²⁾ und wünscht hierbei der überraschend kleinen Dämpfung des ausgesendeten Lichtes Rechnung zu tragen, wie sie sich aus den Versuchen über Interferenzen mit sehr hohen Gangunterschieden ergibt, so wird man genötigt sein, die Dimensionen dieser Erreger wenigstens nach einer Richtung hin als sehr klein gegen die ausgestrahlte Wellenlänge anzunehmen.

Bei etwaigem *anomal* Verhalten eines der beiden Metalle innerhalb eines bestimmten Wellenlängenbezirkes sollen Anomalien der Dekremente δ nach den früheren Auseinandersetzungen für ausgeschlossen gelten. Eine sprunghafte Vergrößerung (Verkleinerung) von α' hätte nach Gleichung (7) eine ähnliche Wirkung wie eine anomale Verkleinerung (Vergröße-

1) Da Drude (Ann. d. Phys. 9 p. 331 u. 609. 1902) findet, daß die halbe Eigenwellenlänge ($\lambda/2$) eines nahezu zum Kreise gebogenen dünnen Drahtes um 6,5 Proz. größer als die Drahtlänge l ist, so folgt daraus — innerhalb der Grenzen der Gültigkeit von Drudes Regel — die Unabhängigkeit des Verhältnisses λ/l von der Periode. Es sind demnach die geometrischen Verhältnisse, die die Strahlung bedingen, von der Schwingungsdauer unabhängig und man darf daher vermuten, daß für kreisförmige Oszillatoren $d\delta/d\tau = 0$ ist.

2) Vgl. z. B. H. Ebert, Wied. Ann. 49. p. 651. 1893 u. a.

rung) des Wertes α ; beide müßten sich durch eine vom glatten Verlauf abweichende Gestalt der für n als Funktion der Wellenlänge ermittelten Kurve bemerkbar machen. Die Entscheidung darüber, welche der angenommenen Möglichkeiten vorliegt, könnte dann noch durch den Vergleich mit einem dritten Metall erzielt werden.

Es wurde schon oben erwähnt, daß das *Strahlungsvermögen eines Hertzschen Schwingungskreises* nicht nur durch den Wert seines Dekrementes δ , sondern auch durch seine stoffliche Beschaffenheit bestimmt sei. Diese Behauptung muß nun noch näher begründet werden.

Ein aus Kondensator und Schließungsdraht bestehender Schwingungskreis sei zu Beginn zur Potentialdifferenz B geladen. Der Einfachheit halber seien seine Kapazität und sein Selbstinduktionskoeffizient gleich Eins gesetzt; sein verfügbarer Energievorrat ist demnach B^2 . Ist seine Dämpfungskonstante $\beta = 0$, so ist der Verlauf der elektrischen Energieschwingung

$$\varphi^2 = B^2 \cdot \cos^2 b t.$$

Der ganze Schwingungsvorgang besteht in einer fortgesetzten verlustlosen Verwandlung der elektrischen Energie des Kreises in magnetische Form und umgekehrt. Demnach ist der Verlauf der magnetischen Energieschwingung gegeben durch

$$\psi^2 = B^2 \cdot \sin^2 b t,$$

und daher ist zu jeder Zeit die elektromagnetische Gesamtenergie des Erregers konstant, nämlich

$$\varphi^2 + \psi^2 = B^2.$$

Ist hingegen die Schwingung gedämpft, so lauten die entsprechenden Gleichungen für die elektrische Energie:

$$(12) \quad \varphi^2 = B^2 \cdot e^{-2\beta t} \cos^2 b t,$$

für die magnetische Energie:

$$(12a) \quad \psi^2 = B^2 \cdot e^{-2\beta t} \sin^2 b t.$$

Hieraus ergibt sich der zeitliche Verlauf der elektromagnetischen Gesamtenergie U des Oszillators

$$(13) \quad U = \varphi^2 + \psi^2 = B^2 \cdot e^{-2\beta t}.$$

Nach genügend langer Zeit ($t = \infty$) ist der ganze Energievorrat $U_0 = B^2$ einesteils in den Schwingungskreis eingedrungen und dort in Wärme verwandelt (u_∞), anderenteils ins umgebende Medium ausgestrahlt worden (v_∞), so daß nach dem Energieprinzip die Beziehung bestehen muß:

$$(14) \quad u_\infty + v_\infty = U_0 = B^2.$$

Um nun u_∞ und v_∞ zu berechnen, soll die naheliegende und wohl sicher zutreffende Annahme gemacht werden, daß sowohl die im Zeitelement dt vom Kreise aufgenommene als auch die ins umgebende Medium ausgestrahlte Energie dem in dem betreffenden Augenblicke noch vorhandenen Vorrat an elektromagnetischer Energie U proportional sei, d. h.

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt = \kappa \cdot U \cdot dt; \quad \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt = \varrho \cdot U \cdot dt.$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt

$$(16a) \quad u = \kappa \cdot B^2 \cdot \int e^{-2\beta t} \cdot dt = -\frac{\kappa}{2\beta} \cdot B^2 \cdot e^{-2\beta t} + C,$$

$$(17a) \quad v = \varrho \cdot B^2 \cdot \int e^{-2\beta t} \cdot dt = -\frac{\varrho}{2\beta} \cdot B^2 \cdot e^{-2\beta t} + D.$$

Aus der Anfangsbedingung, daß für $t = 0$ auch $u = v = 0$ sein müssen, ergeben sich die Werte der Integrationskonstanten

$$C = \frac{\kappa}{2\beta} \cdot B^2; \quad D = \frac{\varrho}{2\beta} \cdot B^2$$

und demnach

$$(16b) \quad u = \frac{\kappa}{2\beta} \cdot B^2 \cdot (1 - e^{-2\beta t}),$$

$$(17b) \quad v = \frac{\varrho}{2\beta} \cdot B^2 \cdot (1 - e^{-2\beta t}).$$

Für $t = \infty$ folgt daraus

$$(16) \quad u_\infty = \frac{\kappa}{2\beta} \cdot B^2 = C,$$

$$(17) \quad v_\infty = \frac{\varrho}{2\beta} \cdot B^2 = D.$$

Die Werte aus Gleichung (16) und (17) in Gleichung (14) eingesetzt, ergeben

$$(14a) \quad u_\infty + v_\infty = \frac{\kappa + \varrho}{2\beta} \cdot B^2 = B^2.$$

Es muß demnach sein:

$$(18) \quad \frac{\kappa + \varrho}{2\beta} = \frac{\kappa + \varrho}{2(\alpha + \delta)} = 1.$$

Die einfachste Annahme, durch die diese Bedingung erfüllt wird, ist

$$\kappa = 2\alpha; \quad \varrho = 2\delta;$$

also

$$u_{\infty} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot B^2; \quad v_{\infty} = \frac{\delta}{\beta} \cdot B^2.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{u_{\infty}}{v_{\infty}} = \frac{\alpha}{\delta}.$$

Nennt man nun *Strahlungsvermögen* S des *Erregers* das Verhältnis der gesamten Ausstrahlung zum anfänglichen Energievorrat, sein *Absorptionsvermögen* A das Verhältnis der ganzen eingedrungenen Energie zum Anfangsvorrat, so folgt:

$$(19) \quad S = \frac{v_{\infty}}{U_0} = \frac{\delta}{\beta} = \frac{\delta}{\alpha + \delta},$$

$$(20) \quad A = \frac{u_{\infty}}{U_0} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \delta}.$$

Aus Gleichung (19) ergibt sich somit die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung, daß das *Strahlungsvermögen des Hertz'schen Erregers* (Resonators) nicht nur vom Dekremente δ , sondern auch vom *Material abhängt*, dessen Einfluß durch das im Nenner auftretende Joulesche Dekrement α zum Ausdruck kommt. Analoges gilt vom *Absorptionsvermögen* nach Gleichung (20).

Es muß sich demnach in der *Stärke der Strahlung* die *materielle Natur des Hertz'schen Schwingungskreises* und ein *eventuell anomales Verhalten der Materialkonstanten* α verraten.

Das *Verhältnis der Strahlungsvermögen* zweier gleichgebauter Erreger aus verschiedenem Material ist nach Gleichung (19) und Gleichung (7)

$$(21) \quad \frac{S}{S'} = \frac{\alpha' + \delta}{\alpha + \delta} = n.$$

Das *Verhältnis der Elektrometerrausschläge* bei der von *Bjerknes* (l. c.) und mir verwendeten Versuchsanordnung ergibt somit auch das *Verhältnis der hier als Strahlungsvermögen bezeichneten Größen* für die betreffenden Leiterformen.

Kann man δ gegen α und α' vernachlässigen, so wird Gleichung (21) mit Rücksicht auf Gleichung (6)

$$(22) \quad \frac{S}{S'} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}} = \nu,$$

also unabhängig von der Schwingungsdauer. Sind hingegen die Hertzschen Dekremente der beiden Erreger nicht dieselben, so wird

$$\frac{S}{S'} = \frac{\delta}{\delta'} \cdot \frac{\alpha' + \delta'}{\alpha + \delta};$$

sind wieder δ und δ' klein gegen α und α' , so folgt

$$(22a) \quad \frac{S}{S'} = \frac{\delta}{\delta'} \sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}}.$$

Je mehr also das Verhältnis δ/δ' sich der Einheit nähert, desto mehr nähert sich das Gesetz für das Verhältnis der Strahlungsvermögen auch in diesem Falle dem oben angegebenen.

Das durch Gleichung (22) ausgedrückte Resultat, wonach die Strahlungsvermögen zweier Erreger (unter den dort gemachten Annahmen über δ) im *reziproken* Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den spezifischen Widerständen stehen, scheint auf den ersten Blick dem aus Maxwells Theorie folgenden¹⁾ und von E. Hagen und H. Rubens²⁾ experimentell bestätigten Resultate zu widersprechen, daß die Emissionsvermögen zweier Metalle für dieselbe Temperatur und Wellenlänge im *direkten* Verhältnisse dieser Quadratwurzeln stehen. Der Widerspruch ist aber nur ein scheinbarer und möge zur Vermeidung von Mißverständnissen kurz aufgeklärt werden. Das hier betrachtete Strahlungsvermögen eines Erregers und das Emissionsvermögen bei Hagen und Rubens sind Größen, die ganz verschiedenen physikalischen Vorgängen entsprechen. Hagen und Rubens bestimmen das Emissionsvermögen bekanntlich nach zwei verschiedenen Methoden: *erstens* indem die Intensität der Strahlung von bestimmter Wellenlänge, die von verschiedenen gleichtemperierten Metallflächen ausgeht, direkt gemessen wird, *zweitens* indem der Intensitätsverlust

1) P. Drude, Physik d. Äthers p. 574. 1894; E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 444. 1900; M. Planck, Berl. Akad. p. 278. 1903.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 11, p. 873. 1903.

bestimmt wird, den die von einer Lichtquelle von bekannter Intensität ausgehende Strahlung von bestimmter Periode bei der nahezu senkrechten Reflexion an verschiedenen Metallspiegeln erleidet. Ist U die auf den Spiegel einfallende, r die reflektierte Energie, so ist $U - r$ der bei der Reflexion ins Metall eingedrungene Teil oder, wenn $U = 100$ gesetzt und der reflektierte Teil $\Re$ in Prozenten der einfallenden Strahlung gemessen wird, so ist der eingedrungene Teil in Prozenten der einfallenden Intensität $100 - \Re$; ebenso groß muß nach dem Kirchhoffschen Gesetze das Emissionsvermögen des Spiegels für die betreffende Temperatur und Wellenlänge sein. Voraussetzung der *ersten* Methode ist eine hinreichende Dicke der strahlenden Schicht; sie könnte mit elektromagnetischen Erregern in der Weise nachgeahmt werden, daß man eine sehr große Zahl gleicher Schwingungskreise aus demselben Material (I) raumgitterartig verteilt, genau ebenso mit Erregern aus anderem Metall (II) verfährt, alle gleich stark erregt und die Intensitäten der von diesen beiden Aggregaten ausgesandten Strahlungen miteinander vergleicht.

Die *zweite* Methode läßt sich schon mit einem einzigen Erreger verwirklichen und entspricht folgendem Vorgange: Die Fortleitung elektromagnetischer Wellen an Drähten und ihr Eindringen in dieselben kann man als die fortgesetzte Brechung eines streifend auf die Drahtoberfläche einfallenden Wellenzuges betrachten.¹⁾ Der Vorgang im Erreger selbst ist von ganz derselben Natur, nur daß die Wellen, statt an einer unendlich langen Leitung fortzueilen, zwischen den Enden des Erregers beständig hin- und hergeworfen werden. Von der in einem bestimmten Augenblicke noch vorhandenen elektromagnetischen Energie U dringt im nächsten Zeiteilchen dt ein bestimmter Betrag du in den Draht ein (wo er in Wärme verwandelt wird). Der um diesen Betrag verminderte Wert von U , also

$$U - \frac{\partial u}{\partial t} dt = r$$

kann als die Intensität der bei streifender Inzidenz reflektierten Strahlung betrachtet werden, die nun im weiteren Gange der

1) Vgl. wegen der einschlägigen Literatur etwa: v. Geitler, Elektromagnetische Schwingungen und Wellen, p. 142. Braunschweig 1905.

Ereignisse teils in den Draht eindringt, teils durch Abschnüren von Kraftlinien in den Raum gestrahlt wird. Es ist demnach $U - r$ oder, in Prozenten der einfallenden Menge U ausgedrückt,

$$100 \left(1 - \frac{r}{U} \right) = 100 - \Re$$

der eingedrungene Teil der Strahlung; ebenso groß ist nach dem Kirchhoffschen Satze, der ja allgemeine Gültigkeit hat, das *Emissionsvermögen des Metalles* für die betreffende Wellenlänge.

Nach den Gleichungen (13) und den folgenden oben abgeleiteten Beziehungen ist nun

$$U - r = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt = 2 \alpha \cdot B^2 \cdot e^{-2\beta t} dt$$

und demnach

$$(23) \quad 100 - \Re = 200 \cdot \alpha \cdot dt.$$

Für einen Erreger aus anderem Metalle folgt

$$(23a) \quad 100 - \Re' = 200 \cdot \alpha' \cdot dt$$

und daher für das *Verhältnis der Emissionsvermögen E und E' der Metalle* für die betreffende Wellenlänge und Temperatur mit Rücksicht auf Gleichung (6)

$$(24) \quad \frac{E}{E'} = \frac{100 - \Re}{100 - \Re'} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma'}},$$

also in Übereinstimmung mit den Forderungen der Maxwell'schen Theorie die von Hagen und Rubens experimentell gefundene Beziehung.

Während sich also der Ablauf der Schwingungen innerhalb des Erregers selbst in jedem Augenblicke nach dem Hagen-Rubensschen Gesetze regelt, gilt für das Strahlungsvermögen des ganzen Erregers in den umgebenden Raum die von mir aufgestellte Beziehung.

II. Experimenteller Teil.

Bei allen Versuchen bestand der Primärkreis aus einem Drahtrechtecke; in die eine kurze Rechteckseite war ein Plattenluftkondensator von veränderlicher Kapazität, in die andere eine Funkenstrecke eingeschaltet, von der Drähte zu einem Ruhmkorffschen Induktionsapparat führten. Die Funken-

strecke bestand entweder aus zwei Messing- oder Zinkkugeln von 4 cm Durchmesser und wurde mit und ohne Durchblasen eines Luftstromes benützt, oder aus Messingkugeln von 7 mm Durchmesser unter Petroleum. Eine befriedigende Konstanz der Funkenwirksamkeit war auf keine Weise zu erzielen. Die Verwendung des Petroleumbades macht zwar die Funken sehr wirksam¹⁾ und der Zufall fügt es auch manchmal, daß sie während einiger Zeit ziemlich konstant bleiben; die sehr starke Korrosion des Elektrodenmaterials verändert aber meist in kurzer Zeit die Länge der Funkenstrecke und somit auch die Intensität der primären Schwingung.

Als Material für die Resonatordrähte verwendete ich *Kupfer*, *Zink* und *Neusilber*. Der Durchmesser der Drähte wird an entsprechender Stelle vermerkt werden. Die Resonatoren waren von dem schon in früheren Arbeiten zuerst von mir verwendeten Typus, der sich ja auch bei späteren Untersuchungen²⁾ als sehr geeignet zu Wellenlängenmessungen erwiesen hat. Die Abstimmung der Resonatoren auf den Primärkreis erfolgte durch Verschieben einer Brücke; als solche empfiehlt es sich, statt eines Drahtes einen Blechstreifen des betreffenden Metalles zu verwenden.³⁾

Die Messung der Resonatorschwingungen erfolgte fast durchweg nach dem Vorgange von Bjerknes mit Hilfe eines Hertzschen Elektrometers, dessen Platten mit den offenen Drahtenden des Resonators durch kleine Quecksilbernäpfe derart verbunden waren, daß die erforderlichen Handhabungen am Resonator ohne mechanische Erschütterungen des auf einem isolierten Pfeiler des Institutes aufgestellten Instrumentes erfolgen konnten. Die weiterhin mitgeteilten Experimente sind alle mit dem Elektrometer ausgeführt.

Die Aufstellung war meist wie in Fig. 1 derart getroffen, daß sich das Elektrometer *E* oberhalb der primären Funken-

1) E. Sarasin u. de la Rive, Arch. des scienc. phys. et nat. 28. p. 306. 1892; vgl. auch H. Bauernberger, Wiener Sitzungsber. 102. p. 782. 1893.

2) Vgl. z. B. F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 5. p. 872. 1901; P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 611. 1902.

3) Hierüber und über die Bedenken gegen die Anwendung von Thermoelementen vgl. die Originalabhandlung.

strecke f befand. Die Entfernung der horizontalen Ebenen des primären und sekundären Kreises voneinander betrug ca. 30 cm und mehr. Die Koppelung war daher gering, wie sich auch aus der Schärfe der Resonanzmaxima erkennen ließ. Allerdings dürfte die verschiedene Stärke der Koppelung, die

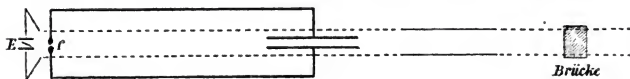


Fig. 1.

sich bei gegebenem Abstände der beiden Schwingungskreise, aber verschiedener Wellenlänge und verschiedenem Resonatormaterial ergibt, eine Fehlerquelle bedeuten. Aber die Dimensionen des Experimentierraumes verursachen wohl in jedem Falle durch Reflexionen an den Wänden Fehler derselben Größe, die sich nicht vermeiden lassen.

Der Vergleich der einzelnen Resonatoren wurde in der Weise vorgenommen, daß sie möglichst rasch gegeneinander ausgewechselt und die Elektrometerausschläge abgelesen wurden. Der Inkonstanz der Funken wurde durch wiederholte abwechselnde Beobachtungen und Mittelnehmen aus den Ablesungen Rechnung getragen, da sich die gleichzeitige Beobachtung symmetrisch angeordneter Resonatoren aus verschiedenem Metall als unzuweckmäßig erwiesen hatte.

Durch die Nähe der Holzleisten, die zum Spannen der Drähte dienten, wurde jedenfalls die Lage des Resonanzmaximums gegenüber freigespannten Drähten nach Drudes Untersuchungen ein wenig verändert. Da es aber nicht auf absolute Messungen der Wellenlängen, sondern nur auf den Vergleich verschiedener Metalle bei derselben Wellenlänge ankam, so ist dieser Umstand ohne Einfluß auf das Resultat da für möglichste geometrische Gleichheit der einzelnen Resonatoren gesorgt war.

Die nachstehende Fig. 2 gibt das Resultat von Messungen wieder, die an Kupfer- (0,99 mm) und Neusilberdrähten (1,015 mm) angestellt sind. Die Distanz der Resonatordrähte war 12 cm. Als Abszissen sind die Entfernungen der Brücke vom Elektrometer (etwa gleich $\lambda/4$) in Zentimetern aufgetragen. Die

Ordinaten stellen das Verhältnis n der Elektrometerausschläge für $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Kupfer}}$ für die betreffende Wellenlänge dar. Die beobachteten Punkte sind bezeichnet, die beigefügten Zahlen bedeuten die Anzahl von Einzelbeobachtungen, aus denen der betreffende Punkt berechnet wurde. Bei Resonatorlängen unter 120 cm waren die primären Funken (in Luft) so unregelmäßig und die Elektrometerausschläge so klein, daß verlässliche Resultate nicht zu erzielen waren.

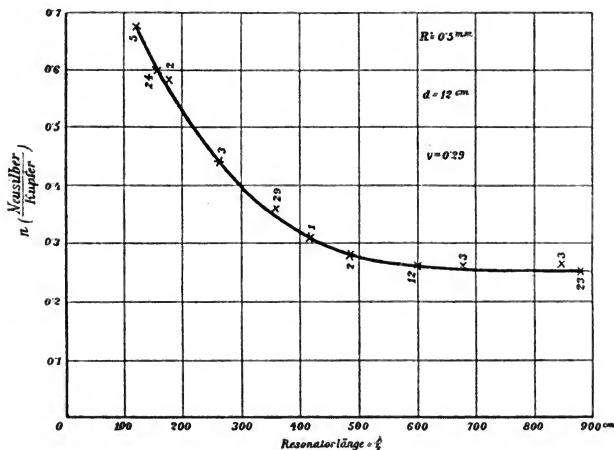


Fig. 2.

Die Figur läßt deutlich erkennen, daß das Verhältnis n der Ausschläge $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Kupfer}}$ für Resonator(Viertelwellen-)längen zwischen 900 und 600 cm schon nahezu konstant ist. Der Wert dieses Verhältnisses 0,26 steht in befriedigender Übereinstimmung mit dem Werte von

$$\nu = \sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}} = 0,29 \text{ (vgl. Gl. (6)).}$$

Bei Resonatorlängen, die größer als 600 cm sind, befinden wir uns unter den geschilderten Versuchsbedingungen schon in

jenem Gebiete, wo die Hertzschen Dekremente δ gegenüber den Jouleschen Dekrementen α vernachlässigt werden können. Hier nimmt also n den theoretischen konstanten Grenzwert ν an und nach Gleichung (22) ist demnach für Paralleldrahtresonatoren verschiedenen Materials von der verwendeten Gestalt das Verhältnis der Strahlungsvermögen für gleiche Wellenlängen konstant, sobald die Resonatorlänge 600 cm übersteigt.

Unterhalb 600 cm wächst der Wert von n mit abnehmender Periode in Übereinstimmung mit den theoretischen Über-

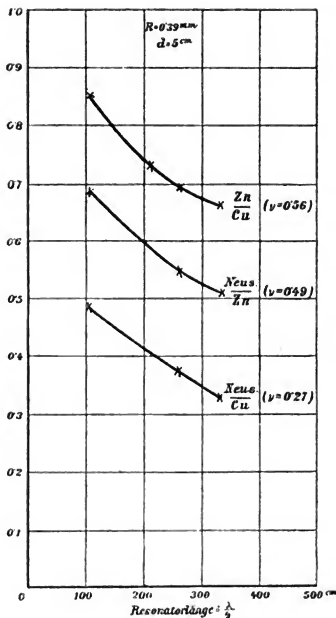


Fig. 3.

legungen, die an Gleichung (8) geknüpft wurden. Unterhalb 120 cm Resonatorlänge konnte der Verlauf der n -Kurve aus den obigen Gründen nicht verfolgt werden; doch muß man annehmen, daß sich n dem Grenzwerte 1 nähert, je mehr die Jouleschen Dekremente gegenüber den Hertzschen vernachlässigt werden können. Die Kurve dürfte daher unterhalb $\lambda/4 = 120$ cm einen Wendepunkt aufweisen. Ihr glatter Verlauf macht es wahrscheinlich, daß innerhalb der beobachteten Grenzen weder Kupfer noch Neusilber Anomalien der Absorption aufweisen.

In der nebenstehenden Fig. 3 sei noch der Verlauf der n -Kurven für Zink und Neusilber Kupfer Kupfer

(beide beobachtet), sowie für $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Zink}}$ (aus den beiden ersten Kurven berechnet) für Viertelwellenlängen von etwa 100 bis

330 cm zur Anschauung gebracht. Die betreffenden Versuche wurden mit genau gleichen Drähten von 0,78 mm Durchmesser und 5 cm Abstand angestellt. Die erregenden Funken sprangen unter Petroleum über. Die Resonatorebene lag 30 cm über der Ebene des Erregers. Der mir bei diesen Versuchen zur Verfügung stehende Raum gestattete leider nicht, mit größeren als den angegebenen Wellenlängen zu experimentieren.

Eine nähere Erläuterung dieser Figur erscheint überflüssig. Nur auf die sehr befriedigende Übereinstimmung des Verlaufes der beiden Neusilber-Kupferlinien in Figg. 2 und 3 sei hingewiesen. Entsprechend dem kleineren Werte für ν sowie der kleineren Drahtdistanz und Drahtstärke für das in Fig. 3 verwendete Material liegt hier die n -Linie durchaus tiefer als in Fig. 2, zeigt im übrigen jedoch den gleichen Verlauf, trotzdem die beiden Kurven zu ganz verschiedenen Zeiten, mit verschiedenem Material und bei veränderter Versuchsanordnung aufgenommen wurden.

Zusammenfassung der Resultate.

Es wurde eine Methode angegeben, die es gestattet hätte, eine etwa vorhandene anomale Absorption der Metalle für elektrische Wellen experimentell nachzuweisen; es wurde mit ihrer Hilfe gezeigt, daß für Kupfer und Neusilber im Bereiche der ganzen Wellenlängen von etwa 400—3600 cm, für Zink von etwa 400—1320 cm anomale Absorption nicht vorhanden ist.

Es wurde auf theoretischem Wege geschlossen, daß für kongruente Paralleldrahtresonatoren aus verschiedenem Metall das Verhältnis n der Elektrometerrausschläge (gleich dem reziproken Verhältnisse der Dämpfungskonstanten) mit abnehmender Schwingungsdauer wachsen muß (wenn als Zähler des Verhältnisses stets der Ausschlag für das Metall mit dem größeren spezifischen Leitungswiderstand gewählt wird); dieser Schluß wurde auf experimentellem Wege bestätigt.

Es wurde nachgewiesen, daß dieses Verhältnis n gleich dem Verhältnisse der Strahlungsvermögen der beiden Resonatoren (Erreger) ist.

Es wurde theoretisch abgeleitet, daß sich der Ablauf der Schwingungen innerhalb eines schwingenden Systems in jedem

Augenblicke nach dem Hagen-Rubensschen Gesetze regelt, wonach das Verhältnis der Emissionsvermögen zweier Metalle für eine bestimmte Wellenlänge und Temperatur gleich dem *direkten* Verhältnisse der Quadratwurzeln ihrer spezifischen elektrischen Widerstände ist; daß hingegen die Strahlungsvermögen zweier kongruenten Erreger aus verschiedenem Metall, wenn die Hertzschen Dekremente klein gegen die Jouleschen Dekremente sind, im *reziproken* Verhältnisse dieser Quadratwurzeln stehen.

Diese Arbeit wurde im physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführt; ich ergreife bei meinem Scheiden von Prag mit Vergnügen die Gelegenheit, um dem Vorstande des genannten Institutes Hrn. Prof. E. Lecher für die mir stets in liebenswürdigster Weise gewährte Benützung der experimentellen Hilfsmittel meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Czernowitz, Physik. Inst. der k. k. Univ., im Nov. 1906.

(Eingegangen 22. November 1906.)

4. *Experimentelle Untersuchung gekoppelter
Kondensatorkreise;
von C. Fischer.¹⁾*

Indizes.

I	bezieht sich auf den	Primärkreis	} vor der Koppelung.
II	„ „ „ „	Sekundärkreis	
III	„ „ „ „	dritten mit dem Sekundärkreise extrem lose gekoppelten Kreis (Empfänger).	
m	„ „ „ „	Meßkreis.	
1	„ „ „ „	die Schwingung mit der größeren Wechselzahl.	
2	„ „ „ „	„ „ „ kleineren Wechselzahl.	

Einleitung.

Bei der theoretischen Behandlung der oszillatorischen Vorgänge in Kondensatorkreisen ist bisher meist auch dann, wenn dieselben eine Funkenstrecke enthielten, die Thomsonsche Gleichung angesetzt worden.²⁾ Indem diese von einem konstanten Widerstande des Kreises spricht, setzt sie voraus, daß auch der Funken während des Ablaufes einer Schwingung konstanten Widerstand hat. Wo diese Annahme experimentell untersucht wurde, hat sie sich als unrichtig herausgestellt.³⁾ Dementsprechend liefert der Thomsonsche Ansatz für den Abfall der Amplitude, d. h. für die Dämpfung, unrichtige Werte; er ergibt aber trotz dieser unzulässigen Voraussetzung richtige Resultate für die Wechselzahl, d. h. für diese ist die Art und Größe der Dämpfung ohne merklichen Einfluß.

Wie sich die Verhältnisse gestalten für den Fall, wo zwei Kondensatorkreise, von denen der eine die Funkenstrecke enthält, miteinander gekoppelt sind, soll in dieser Arbeit experi-

1) Auszug aus einer Straßburger Dissertation.

2) Versuche, auf die Veränderlichkeit des Funkenwiderstandes Rücksicht zu nehmen, sind gemacht worden von A. Battelli u. L. Magri, Phil. Mag. 5. p. 634. 1903; A. Heydweiller, Ann. d. Phys. 19. p. 649 ff. 1906.

3) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 13. p. 822. 1904.

mentell untersucht werden. In diesem Fall muß eine experimentelle Untersuchung besonders notwendig erscheinen, denn die hierfür vorliegende Theorie¹⁾ setzt nicht nur, wie der Thomsonsche Ansatz, voraus, daß der Funkenwiderstand während des Ablaufes einer Schwingung konstant ist, sondern sie nimmt auch an, daß der Funkenwiderstand im Primärkreise durch die Koppelung desselben mit einem Sekundärkreise und durch die dadurch bedingte Änderung der Schwingung nicht beeinflußt wird. Daß diese letztere Annahme zutrifft, ist aber nach allem, was man über Funkenwiderstand weiß²⁾, äußerst unwahrscheinlich.

Die experimentelle Anordnung.

a) Zur Untersuchung kamen zwei verschiedene Systeme von gekoppelten Kondensatorkreisen, die während der sämtlichen damit angestellten Versuche möglichst unverändert gelassen wurden. Das *erste* (System *A* genannt) bestand aus zwei beinahe gleichgebauten Kondensatorkreisen von ca. $850 \cdot 10^{-21}$ C.G.S. Kapazität und ca. 22000 cm Selbstinduktion. Das *zweite System* (*B*) sollte etwas mehr den praktischen Verhältnissen in der drahtlosen Telegraphie angepaßt werden. Der Primärkreis hatte dementsprechend große Kapazität ($5290 \cdot 10^{-21}$ C.G.S.) und kleine Selbstinduktion (6230 cm); der Sekundärkreis dagegen hatte kleine Kapazität ($450 \cdot 10^{-21}$ C.G.S.) und große Selbstinduktion (73000 cm). Jedoch, da es unmöglich war, im Laboratorium mit offenen Systemen zu arbeiten, so wurden auch hier geschlossene Kreise verwendet. Obwohl es also nicht gestattet ist, aus den damit gewonnenen Resultaten direkte Schlüsse auf die in der drahtlosen Telegraphie vorliegenden Verhältnisse zu ziehen, so können die Versuche doch als Leitfaden für weitere Versuche mit offenen Systemen dienen.

Im Primärkreise des Systems *B* wurden Kondensatoren mit Platten aus gewöhnlichem Fensterglas, in den übrigen Fällen Flaschen aus englischem Flintglas verwendet. Die

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 512 ff. 1904.

2) Vgl. hauptsächlich G. Rempp, Ann. d. Phys. 17. p. 649 ff. 1905. Eine zusammenfassende Darstellung aller bisher darüber bekannten Resultate findet sich in J. Zenneck, Elektromagnet. Schwingungen und drahtlose Telegraphie p. 375 ff. Stuttgart 1905.

Kugeln der Funkenstrecke im Primärkreise hatten in beiden Systemen einen Durchmesser von 5 cm. (Funkenlänge $FL = 0,6$ bis $0,7$ cm.)

b) Die beiden Kreise jedes Systems waren so gut wie irgend möglich aufeinander abgestimmt, indem nach Einschalten einer Funkenstrecke in jeden der Kreise die Eigenschwingung desselben mit Hilfe eines Meßkondensatorkreises¹⁾ untersucht wurde. Da das logarithmische Dekrement des Meßkreises durch Einschalten eines bekannten Widerstandes²⁾ bestimmt werden konnte, so ergab sich mit Hilfe des letzteren das logarithmische Dekrement δ_1 des Primärkreises aus der Resonanzkurve. Das logarithmische Dekrement δ_{II} des Sekundärkreises wurde sodann durch Einschalten eines bekannten Widerstandes w ermittelt und zwar an der Hand der Formel³⁾:

$$\delta_{II} = \frac{\gamma}{\frac{\alpha}{\alpha_1} - 1} - \frac{\delta_1}{2} + \sqrt{\frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\gamma^2 \frac{\alpha}{\alpha_1}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_1} - 1\right)^2}},$$

worin $\gamma = w/n p$, n die Wechselzahl von Primär- und Sekundärkreis, p die Selbstinduktion des letzteren und α bez. α_1 den Ausschlag in dem mit dem Sekundärkreise extrem lose gekoppelten Thermoelementkreise vor bez. nach Einschaltung des Widerstandes w bedeuten.

c) Als Energiequelle diente ein großer Funkeninduktor von 50 cm Schlagweite mit einem Quecksilberturbinenunterbrecher der A. E.-G., der ca. 10 Unterbrechungen pro Sekunde lieferte. Partialfunken wurden peinlich vermieden. In die Hochspannungsleitung des Induktors wurde direkt an der Funkenstrecke ein sehr hoher elektrolytischer Widerstand zur Herstellung größerer Funkenregelmäßigkeit³⁾ eingeschaltet.

1) Über Anordnung von Meßkondensatorkreis und Eichung desselben vgl. J. Zenneck, l. c. p. 606 ff. Hat die Strombahn eine Form, welche der Rechnung nicht zugänglich ist, so kann der Selbstinduktionskoeffizient durch Vergleich mit einer Strombahn, welche der Rechnung zugänglich ist, bestimmt werden.

2) Vgl. J. Zenneck, l. c. p. 624. Die Formel zur Berechnung des Dekrementes δ_{II} mußte auf die obige Form gebracht werden, da hier nicht wie dort vorausgesetzt ist, daß $\delta_1 + \delta_{II}$ bekannt ist, sondern nur δ_1 .

3) Über das Einschalten von Widerstand in die Zuleitungen zum Induktor vgl. G. Rempp, l. c. p. 640; J. Zenneck, l. c. p. 532 u. 609. Von wesentlicher Bedeutung für die Funkenregelmäßigkeit war es auch,

d) Der Meßkreis¹⁾ hat im Verlauf der Untersuchungen vier verschiedene Formen angenommen. Zur Messung des Stromeffektes in demselben diente für die ersten Messungen (Dämpfungskurven des Systems *A*) ein Bolometer mit der Anordnung von Rubens und Paalzow. Der Eisendraht hatte eine Dicke von 0,0025 cm. Die geringen Abweichungen der mit Gleichstrom aufgenommenen Eichkurve von der Proportionalität mit i^2 fanden Berücksichtigung. Zu allen übrigen Messungen wurde ein Thermoelement verwendet in der von H. Brandes²⁾ angegebenen Form, teils wegen seiner Unveränderlichkeit, teils, weil es bei einigen Versuchen wegen seines geringen Widerstandes in den Meßkreis eingeschaltet werden konnte, und dadurch die Empfindlichkeit der Messung bedeutend gesteigert wurde. Geeicht wurde das Thermoelement mit Wechselstrom unter Vergleichung mit dem in denselben Stromkreis eingeschalteten Bolometer. Die Eichkurve ergab sich in dem Bereich der damit gemachten Messungen als proportional i^2 .

Als Galvanometer diente ein sehr gut gedämpftes, durch einen Eisenring geschütztes Wiedemannsches Instrument mit Ringmagnet. Seine Empfindlichkeit wurde im Laufe der Untersuchungen mehrmals geändert zwischen den Grenzen 1,2 und $5,8 \cdot 10^{-7}$ Amp. bei einem Skalenabstand von ca. 2 m. Zwischen Thermoelement und Galvanometer waren zwei Drosselspulen eingeschaltet. Induktor und dessen Zuleitungen wurden so eingerichtet, daß sie das Spiegelgalvanometer nicht beeinflussten. Widrigenfalls kamen die Störungen in Rechnung.

e) Bei mehreren Versuchen war es notwendig, dem Sekundärkreise sowohl, als auch dem Meßkreise *künstlich* größere *Dämpfung* durch Einschalten von Widerständen zu geben. Es wurden dazu Graphitwiderstände³⁾ verwendet. Dieselben waren mittels Quecksilbernäpfchen in die Kreise eingeschaltet und deshalb leicht untereinander auszuwechseln. Der durch den Widerstand w hervorgerufene Zuwachs γ des

daß der Widerstand, der in den Primärkreis des Induktors eingeschaltet war, sich nicht erwärmte. Dies wurde durch eine Wasserkühlung erreicht.

1) Vgl. Anm. 1 p. 267.

2) H. Brandes, Physik. Zeitschr. p. 503 ff. 1905.

3) Graphitwiderstände (Zimmermannsbleistifte) wurden bereits verwendet von A. Geissen, Dissert. Straßburg 1905. p. 19.

logarithmischen Dekrementes wurde nach der Formel $\gamma = w/n p$ berechnet, wobei n die Wechselzahl und p die Selbstinduktion des Kreises für die betreffende Wechselzahl bedeutet.

Untersuchung von Wechselzahl und Dämpfung.

I. Methode.

Die Methode, Schwingungen gekoppelter Oszillatoren *getrennt* nach der Bjerknesschen Methode zu untersuchen, habe ich bereits früher veröffentlicht.¹⁾ Eine schematische Darstellung des Apparataufbaues gibt Fig. 1.

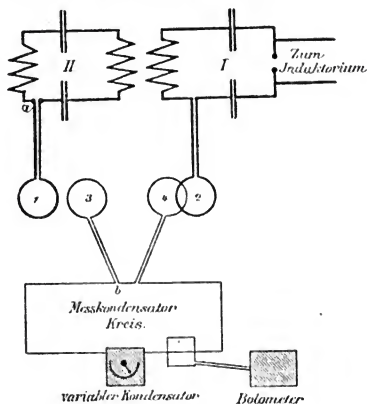


Fig. 1.

II. Resultate.

1. Wechselzahlen.

a) Der Theorie nach sollen die beiden durch Koppelung entstandenen Wechselzahlen n_1 und n_2 zur ursprünglichen Wechselzahl N in der Beziehung²⁾ stehen:

1) Vgl. Ann. d. Phys. 19. p. 182. 1906. Wegen einer Verfeinerung der Methode, die für Messungen bei sehr loser Koppelung von wesentlicher Bedeutung ist, sei auf die Dissertation des Verfassers verwiesen (p. 16).

2) Diese Beziehung ist schon von R. Overbeck, Wied. Ann. 55. p. 627 Gleichung (13) 1895 aufgestellt worden. Über die Gleichungen (1) bis (4) vgl. P. Drude, l. c. p. 545 Gleichung (116).

$$(1) \quad \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} = \frac{2}{N^2},$$

d. h. es soll sich N aus n_1 und n_2 wieder berechnen lassen in der Form:

$$(1a) \quad N = \sqrt{2 \frac{n_1^2 n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}}.$$

b) Die Tab. I¹⁾ enthalten eine experimentelle Prüfung dieser theoretischen Beziehung. Sie zeigen, daß das Gesetz innerhalb der Fehlergrenzen bei kleiner, sowie bei großer Dämpfung der beiden gekoppelten Kreise vollständig richtig ist.²⁾

Tabelle I (erster Teil).

System A. $N_I = 2,322 \cdot 10^6/\text{sec}$. $N_{II} = 2,313 \cdot 10^6/\text{sec}$.

$$\frac{N_I + N_{II}}{2} = 2,317 \cdot 10^6/\text{sec}. \quad b_m = 0,024.$$

$b_I + b_{II}$	Gemessen		Berechnet ³⁾			
	n_1	n_2	N aus n_1 u. n_2	k' aus n_1	k' aus n_2	k' (Mittel)
0,144	$3,274 \cdot 10^6/\text{sec}$	$1,894 \cdot 10^6/\text{sec}$	$2,319 \cdot 10^6/\text{sec}$	0,499	0,497	0,498
	3,012 „	1,953 „	2,317 „	0,408	0,408	0,408
	2,824 „	2,011 „	2,317 „	0,327	0,328	0,327
	2,641 „	2,086 „	2,315 „	0,280	0,284	0,282
	2,509 „	2,160 „	2,317 „	0,147	0,150	0,148
	2,438 „	2,208 „	2,322 „	0,096	0,101	0,098
	2,400 „	2,251 „	2,322 „	0,068	0,060	0,064
	2,376 „	2,261 „	2,316 „	0,048	0,051	0,049
	2,368 „	2,265 „	2,321 „	0,042	0,047	0,044
0,278 ⁴⁾ *	$3,255 \cdot 10^6/\text{sec}$	$1,901 \cdot 10^6/\text{sec}$	$2,321 \cdot 10^6/\text{sec}$	0,512	0,512	0,512
	3,244 „	1,900 „	2,321 „	0,509	0,509	0,509
	2,915 „	1,982 „	2,318 „	0,383	0,380	0,381
	2,665 „	2,078 „	2,318 „	0,254	0,250	0,252
	* 2,646 „	2,086 „	2,318 „	0,244	0,244	0,244
	2,456 „	2,200 „	2,317 „	0,117	0,116	0,116
	2,384 „	2,256 „	2,317 „	0,060	0,058	0,059

1) Ausführlichere Tabellen finden sich in der Dissertation.

2) Die verschiedene Genauigkeit der Resultate in beiden Systemen beruht auf den verschiedenen Formen des Meßkreises, wo für beide Systeme derselbe Meßkondensator verwendet werden mußte.

3) Nach den Gleichungen (1a) und (2).

4) Es war dabei $b_I = 0,113$, $b_{II} = 0,165$. Bei den mit * versehenen Werten war $b_I = \text{cca. } 0,25$, $b_{II} = 0,031$.

Tabelle I (zweiter Teil).

System B. $N_I = 1,752 \cdot 10^6/\text{sec}$. $N_{II} = 1,753 \cdot 10^6/\text{sec}$.

$$\frac{N_I + N_{II}}{2} = 1,753 \cdot 10^6/\text{sec}. \quad d_m = 0,031.$$

$d_I + d_{II}$	Gemessen		Berechnet			
	n_1	n_2	N aus n_1 u. n_2	k' aus n_1	k' aus n_2	k' (Mittel)
0,180	$2,176 \cdot 10^6/\text{sec}$	$1,512 \cdot 10^6/\text{sec}$	$1,752 \cdot 10^6/\text{sec}$	0,350	0,348	0,349
	2,042 „	1,566 „	1,754 „	0,260	0,260	0,260
	1,920 „	1,623 „	1,753 „	0,171	0,170	0,170
	1,843 „	1,673 „	1,752 „	0,095	0,100	0,097
	1,833 „	1,683 „	1,754 „	0,085	0,083	0,084
	1,803 „	1,707 „	1,754 „	0,055	0,055	0,055
	1,780 „	1,717 „	1,750 „	0,039	0,042	0,040
0,380	$2,177 \cdot 10^6/\text{sec}$	$1,511 \cdot 10^6/\text{sec}$	$1,751 \cdot 10^6/\text{sec}$	0,350	0,348	0,349
	1,903 „	1,621 „	1,752 „	0,165	0,167	0,154
	1,843 „	1,676 „	1,752 „	0,096	0,100	0,098
	1,793 „	1,703 „	1,753 „	0,048	0,061	0,054

c) Die Theorie liefert aber noch mehr. Gleichung (1) kann unter allen Umständen auf die Form gebracht werden

$$(2) \quad \frac{n_1}{N} = \frac{1}{\sqrt{1-k'}} \quad \text{und} \quad \frac{n_2}{N} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}} ,$$

worin k' einen beliebigen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Für diesen Faktor k' ergibt die Theorie einen ganz bestimmten Wert, nämlich

$$(3a) \quad k' = \sqrt{k^2 - \left(\frac{d_I - d_{II}}{2\pi} \right)^2} ,$$

worin

$$(3b) \quad k = \sqrt{\frac{p_{I,II}^2}{p_I \cdot p_{II}}}$$

den Koppelungskoeffizienten bedeutet. k' ist von k in allen praktischen Fällen und bei nicht sehr loser Koppelung nur unerheblich verschieden.

Die oben festgestellte Tatsache, daß die Beziehung (2) der Form nach richtig ist, legt es nun nahe, den Wert von k' als „Koppelungsgrad“ eben aus den Beziehungen Gleichung (2):

$$(2a) \quad \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}$$

zu definieren.

Der so definierte Koeffizient ist dann jederzeit experimentell bestimmbar.¹⁾ Ob er mit dem von der Theorie geforderten Werte (Gleichung (3a und b)) übereinstimmt, kann dahingestellt bleiben.

d) Die Berechnung von k' gestaltet sich besonders einfach bei einem Meßkreise von konstanter Selbstinduktion. Bedeutet c_1 bez. c_2 die Kapazität des Meßkreises bei Resonanz mit der einen bez. der andern Schwingung, C bei Resonanz mit der Schwingung vor der Koppelung, so gehen die Gleichungen (2) und (1a) über in²⁾

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} k' = 1 - \frac{c_1}{C} \\ \quad = \frac{c_2}{C} - 1 \end{array} \right\} \quad C = \frac{1}{2}(c_1 + c_2).$$

e) Die festeste Koppelung, die mit dem Aufbau *A* erreicht wurde unter Weglassung der Spulen (1) und (2) (Fig. 1), war $k' = \text{ca. } 0,6$. Mit den Spulen konnte bei Aufbau *A* die Koppelung nur bis $k' = 0,5$, bei Aufbau *B* nur bis $0,35$ getrieben werden.

2. Dekremente.

a) Die Theorie verlangt, daß die Dekremente b_1 und b_2 der beiden durch Koppelung entstandenen Schwingungen mit den Dekrementen b_I und b_{II} der beiden Kreise vor der Koppelung in der Beziehung stehen³⁾:

$$(5) \quad b_1 = \frac{b_I + b_{II}}{2} \frac{n_I}{N} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{b_I + b_{II}}{2} \frac{n_2}{N}.$$

b) Die Figg. 2 und 3 enthalten die Resultate⁴⁾ einer Prüfung dieser theoretischen Beziehung für beide Systeme und zwar 1. bei möglichst geringer Dämpfung in beiden Kreisen jedes Systems und 2. bei künstlich erhöhter Dämpfung derselben. Jedem Punkte der Kurven entspricht eine Resonanz-

1) Eine Tabelle, welche k' als Funktion von n_1/n_2 angibt, findet sich bei J. Zenneck, l. c. p. 1012.

2) Daß die aus den Gleichungen (4) bestimmten Werte für k' immer mehr differieren, je kleiner die Koppelung ist, beruht zum großen Teil auf rechnerischen Gründen.

3) Vgl. P. Drude, l. c. p. 545 Gleichung (119) u. J. Zenneck, l. c. p. 662 Gleichung (4).

4) Wegen der genaueren Daten vgl. Dissertation.

kurve. Jede Resonanzkurve wurde 2—3 mal aufgenommen. Zur Berechnung der Dekremente aus denselben dienten durchweg 9 Sekanten zwischen den Ordinaten 0,9 und 0,5 der reduzierten Kurve.¹⁾

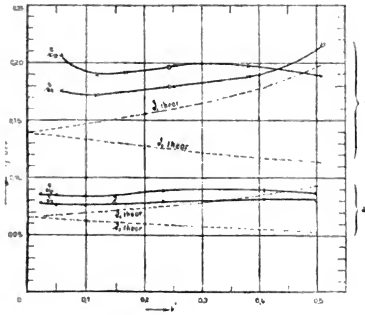


Fig. 2.

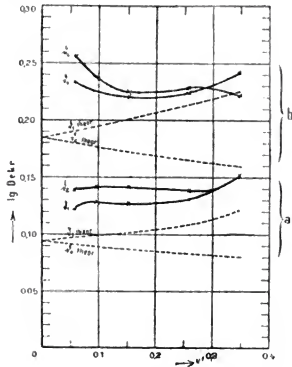


Fig. 3.

System A. $N = 2,317 \cdot 10^6/\text{sec.}$

Fig. 2a. $d_1 = 0,100$, $d_{11} = 0,031$, $d_m = 0,022$, $FL = 0,6$ cm.

Fig. 2b. $d_1 = 0,113$, $d_{11} = 0,163$, $d_m = 0,024$, $FL = 0,7$ cm.

⊙ d_1 : $0,113 + 0,134$, $d_{11} = 0,031$

System B. $N = 1,753 \cdot 10^6/\text{sec.}$

Fig. 3a. $d_1 = 0,154$, $d_{11} = 0,034$, $d_m = 0,031$, $FL = 0,68$ cm.

Fig. 3b. $d_1 = 0,154$, $d_{11} = 0,216$, $d_m = 0,031$, $FL = 0,68$ cm.

c) Es ergab sich, daß verschiedene Punkte derselben Resonanzkurve verschiedene Werte für das Dekrement lieferten. Bei den allermeisten Kurven lieferte der obere Teil größere

1) Vgl. V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 121. 1895; G. Rempp, l. c. p. 645.

2) Hierbei war im Gegensatz zu den vorhergehenden Messungen der Primärkreis künstlich gedämpft, der Sekundärkreis dagegen nicht. Es diente dazu derselbe Widerstand, wie vorher, dem das berechnete Dekrement $d = 0,134$ entsprach. Zu beachten ist dabei, daß dann d_1 nicht gleich dem früheren Dekrement vermehrt um 0,134 ist (vgl. G. Rempp, l. c. p. 656 (5)).

Werte für das Dekrement als der untere. Einen theoretisch richtigen Verlauf zeigte keine der Kurven. Dieselbe Erscheinung hatte schon G. Rempp¹⁾ bei Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke beobachtet.

d) Die Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Beziehung der Theorie Gleichung (5) bestätigt sich nicht einmal qualitativ: es ist nicht einmal das allgemein richtig, daß das Dekrement b_1 der schnelleren Schwingung größer ist als das Dekrement der langsameren b_2 .²⁾

2. Sowohl b_1 wie b_2 sind größer als die theoretischen Werte.

3. Mit der Theorie übereinzustimmen scheint die Tatsache, daß es nur auf die Summe der Dekremente von Primär- und Sekundärkreis ankommt.³⁾

Diese Messungen zeigen also, daß die bisherige Theorie für die Wechselzahlen der beiden Schwingungen richtige, für die Dekremente dagegen falsche Beziehungen ergibt. Es ist deshalb zu vermuten, daß alle diejenigen Erscheinungen, bei denen das Dekrement eine Rolle spielt, von der bisher vorliegenden Theorie nicht richtig wiedergegeben werden. In allen solchen Fällen muß zum mindesten eine experimentelle Prüfung der Theorie als notwendig erscheinen. Das ist im Folgenden geschehen bezüglich einiger besonders für die Praxis wichtiger Fragen:

Wie ändert sich mit zunehmender Koppelung des Primär- und Sekundärkreises

1. die Maximalamplitude im Sekundärkreis?
2. der Stromeffect in ebendemselben?

1) G. Rempp, l. c. p. 644. Die Abweichungen vom eingezeichneten Mittelwert können bis zu 20 Proz. betragen.

2) Wenn dieses Resultat auch für offene Systeme gilt, so ist daraus zu schließen, daß die Dämpfungsverhältnisse in der drahtlosen Telegraphie, wo die schnellere Schwingung verwendet wird (abgesehen von der unter 2. besprochenen Tatsache), relativ günstiger liegen, als es nach der Theorie scheint. Vgl. J. Zenneck, l. c. p. 894.

3) Vgl. Anm. 2 p. 273.

3. der Stromeffect in einem mit dem Sekundärkreise extrem lose gekoppelten dritten Kreise?

Gemeinschaftlich haben diese drei Untersuchungen, daß jeder Messung eine Bestimmung der Koppelung vorangeht. Es lag deshalb nahe, bevor die Untersuchungen vorgenommen wurden, einen Apparat zu konstruieren, mit welchem die beiden Kreise in meßbarer Weise gegeneinander verschoben werden konnten, und dann diesen auf Koppelung zu eichen. Da aber die Koppelung bei sehr kleinen Verschiebungen der beiden untersuchten Kreise schon stark variierte, so war es vorzuziehen, die Koppelung immer wieder neu zu bestimmen, wenn auch jede Koppelungsbestimmung zu so viel Messungen wie möglich ausgenutzt wurde.

I. Maximalamplitude im Sekundärkreise.

a) Zur Untersuchung der Maximalamplitude wurde an die Belegungen eines Kondensators im Sekundärkreise eine Funkenstrecke mit möglichst kurzen Zuleitungen angelegt und dieselbe auf maximale Funkenlänge eingestellt. Die mikrometrisch gemessenen Funkenlängen wurden nach den Kurven von J. Algermissen¹⁾ auf die entsprechenden Spannungen reduziert. Der Radius der Messingkugeln war 1 cm. Durch oftmaliges Abschmirlgeln wurden die Kugeln von jeder Vertiefung freigehalten.

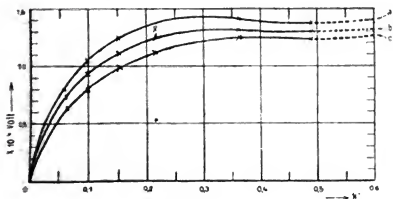


Fig. 4.

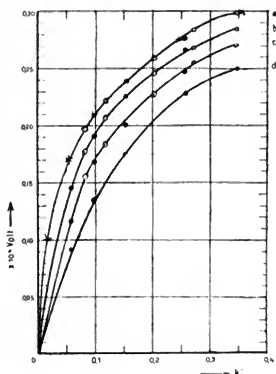


Fig. 5.

1) J. Algermissen, Ann. d. Phys. 19. p. 1016. 1906.

Tabelle II.

System A. $N = 2,317 \cdot 10^6 / \text{sec.}$ $b_1 = 0,11_5$. Fig. 4.

k'	Kurve a $b_{11} = 0,11_5$	Kurve b 0,20 ₅	Kurve c 0,29 ₅
0,49 ₀	$1,38 \cdot 10^4$	$1,30 \cdot 10^4$	$1,28 \cdot 10^4$ Volt
0,36 ₂	1,41 „	1,32 „	1,25 „ „
0,21 ₅	1,32 „	1,27 „	1,11 „ „
0,15 ₂	1,25 „	1,11 „	1,00 „ „
0,09 ₈	1,05 „	0,94 „	0,80 „ „
0,06 ₃	0,85 „	0,75 „	0,64 „ „

System B.¹⁾ $N = 1,75_3 \cdot 10^6 / \text{sec.}$ $b_1 = 0,15_4$. Fig. 5.

k'		Kurve a $b_{11} = 0,03_4 \left\{ \begin{array}{l} \odot \\ \times \end{array} \right.$	Kurve b 0,10 $\left\{ \begin{array}{l} \odot \\ \bullet \end{array} \right.$	Kurve c $\left\{ \begin{array}{l} 0,21_5 \bullet \\ 0,20 \odot \end{array} \right.$	Kurve d 0,37 ₀ •
0,35 ₆	×	$3,00 \cdot 10^4$	—	—	—
0,34 ₉	•	2,98 „	$2,85 \cdot 10^4$	$2,71 \cdot 10^4$	$2,50 \cdot 10^4$ Volt
0,34 ₇	⊙	2,97 „	2,84 „	2,70 „	—
0,27 ₁	⊙	2,84 „	2,68 „	2,55 „	—
0,25 ₆	•	2,76 „	2,66 „	2,47 „	2,27 „ „
0,24 ₈	×	2,75 „	—	—	—
0,20 ₃	⊙	2,59 „	2,46 „	2,27 „	—
0,16 ₃	×	2,54 „ ²⁾	—	—	—
0,15 ₃	•	2,39 „	2,25 „	2,01 „	1,74 „ „
0,11 ₉	⊙	2,22 „	2,07 „	1,84 „	—
0,09 ₈	×	2,10 „	1,92 „	1,68 „	1,35 „ „
0,08 ₃	⊙	1,97 „	1,78 „	1,56 „	— „ „
0,05 ₉	•	—	1,46 „	1,16 „	0,92 „ „
0,05 ₄	×	1,71 „	—	—	—
0,01 ₉	×	1,01 „	—	—	—

b) Die Figg. 4 u. 5 und Tab. II geben die Resultate von mehreren Messungsreihen bei verschiedener Dämpfung des Sekundärkreises. Es ist aus ihnen Folgendes zu ersehen:

I. Für System A:

1. Die Maximalamplitude steigt mit wachsender Koppe- lung zunächst steil an, erreicht einen maximalen Wert, und

1) Die Zeichen $\odot \bullet \times$ bezeichnen verschiedene Messungsreihen.

2) Erscheint fehlerhaft; deshalb in der Figur weggelassen.

nimmt dann wieder ein wenig ab (um wieder bei noch festerer Koppelung ($k' = \text{ca. } 0,6$) ungefähr auf die schon einmal erreichte Höhe anzusteigen).¹⁾

2. Je größer die Dämpfung ist, um so flacher wird das Maximum der Kurve, und bei um so größerer (wenn auch nur wenig größerer) Koppelung wird dasselbe erreicht.

II. Für System B.

Der Anstieg der Maximalamplitude mit wachsender Koppelung ist *cet. par.* um so geringer, je größer die Dämpfung des Systems ist. Ein Maximalwert tritt bis zur Koppelung 0,35 nicht auf.

III. Ein Vergleich der Kurven beider Systeme zeigt ferner, daß der Verlauf der Kurve für die Maximalamplitude nicht nur von $b_1 + b_{II}$, sondern auch von der Beschaffenheit des Systems abhängig ist.

c) Auch der Verlauf dieser Kurven ist bereits theoretisch untersucht worden.²⁾ Die Theorie stellt die Forderung auf, daß

$$\frac{V_{II \max.}}{V_1} = \varrho \cdot A$$

ist, wobei $V_{II \max.}$ die Maximalamplitude im Sekundärkreise, V_1 die Spannung im Primärkreise bedeutet. A ist im wesentlichen eine Konstante des Aufbaues und ist für geschlossene Kreise nur von dem Verhältnis der Kapazitäten im Primär- und Sekundärkreise abhängig; ϱ bedeutet einen Faktor, der < 1 ist, und der mit Koppelung und Dämpfung variiert. Die von Prof. Drude theoretisch ausgewerteten Kurven für ϱ müßten sich demnach auf die bei entsprechender Dämpfung

1) Die Kurven des Systems A sind an Hand anderer Messungsreihen über $k' = 0,5$ hinaus bis $k' = 0,6$ (gestrichelt) ergänzt worden. Bei diesen Messungsreihen fehlten die Spulen (1) und (2) (Fig. 1). Dadurch war 1. eine Änderung des Systems bedingt, und 2. konnte die Koppelung nur aus der Kurve mit den zwei Maximis bestimmt werden. Auf quantitative Richtigkeit können die Verlängerungen der Kurven also keinen Anspruch machen.

2) Vgl. P. Drude, l. c. p. 550 und Physik. Zeitschr. 1904. p. 747, sowie 1905. p. 503. J. Zenneck, Physik. Zeitschr. 1904. p. 588. Nr. 5 und 6; 1905. p. 198. Nr. 4 u. 5. Die von J. Zenneck experimentell gefundenen Zahlenwerte stimmen mit den Kurven meines Systems A überein.

experimentell aufgenommenen Kurven reduzieren lassen. Dies ist aber nach dem unter b) III. Gesagten nicht möglich. Insbesondere zeigt das System *A* zwischen $k' = 0,2$ und $k' = 0,4$ ein Maximum, das in der theoretischen Kurve nicht vorhanden

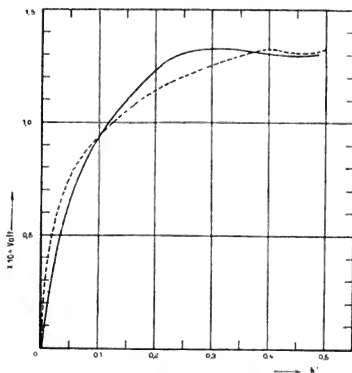


Fig. 6 a. $b_I + b_{II} = 0,3$.

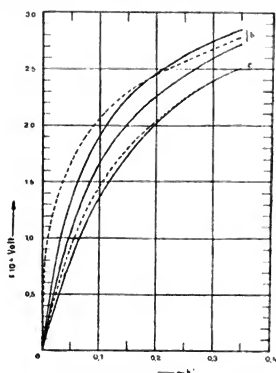


Fig. 6 b. $b_I + b_{II} = 0,3$.
c. $b_I + b_{II} = 0,5$.

ist (vgl. Fig. 6 a). Bei System *B* dagegen ist der Unterschied zwischen der theoretischen (gestrichelt) und der beobachteten (ausgezogen) Kurve ziemlich gering (vgl. Fig. 6 b u. c).

II. Stromeffekt im Sekundärkreise.

a) Zur Messung des Stromeffektes im Sekundärkreise wurde ein Thermoelementkreis verwendet, dessen Induktanz groß gegen seinen Widerstand war. Derselbe wurde mit der Spule (1) (Fig. 1) gekoppelt, weil diese bei der Koppelungsänderung des Systems unbeweglich blieb. Eine Induktion von seiten des Primärkreises auf die Spule (1) fand nicht statt. Zur Bestimmung der Koppelung und des Stromeffektes diente dasselbe Thermoelement.¹⁾

1) Über einen, bei den Messungen II und III verwendeten Hilfsapparat (Standardkreis) vgl. Dissertation.

b) Die Figg. 7 u. 8 sowie Tab. III geben die Resultate der Messungen. Jeder Punkt der Kurven ist das Mittel aus 3—6 Werten, die abwechselnd mit den Angaben α des Standardkreises gemessen und in der oben angegebenen Weise reduziert wurden. Zur Kontrolle wurde der qualitative Verlauf einiger der Kurven ohne den

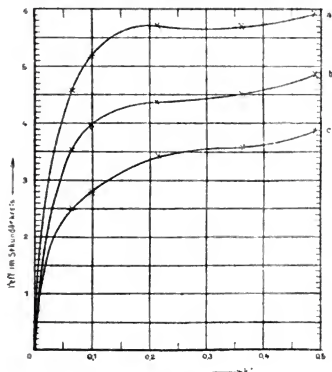


Fig. 7.

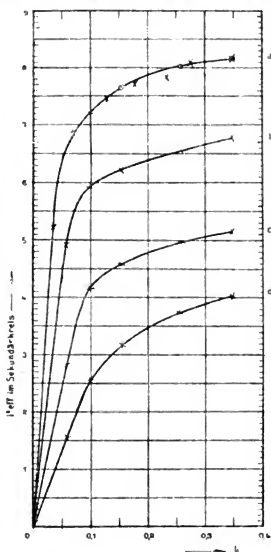


Fig. 8.

Standardkreis unter schätzungsweise bestimmter Koppelung aufgenommen.

Tabelle III.

System A. $N = 2,317 \cdot 10^6 / \text{sec.}$ $b_{II} = 0,11s.$ Fig. 7.

k'	Kurve a ¹⁾ $b_{II} = 0,11s$	Kurve b 0,20s	Kurve c 0,29s
0,490	$i^2 \text{ eff.} = 5,92$	4,8s	3,8s
0,362	5,70	4,51	3,5s
0,21s	5,70	4,3s	3,42
0,09s	5,1s	3,9s	2,8s
0,06s	4,60	3,54	2,51

1) Für den Verlauf dieser Kurve liefern die Kurven von J. Zenneck (l. c. p. 663, Fig. 540), der die Frage wenigstens an einem Beispiel untersucht hat, bereits richtige Anhaltspunkte.

System B. $N = 1,753 \cdot 10/\text{sec.}$ $\delta_1 = 0,154$. Fig. 8.

k'	Kurve a $\odot$ $\delta_{11} = 0,034$	Kurve b 0,100	Kurve c 0,216	Kurve d 0,370
0,349	$i^2 \text{ eff.} = 8,17$	6,78	5,15	4,03
0,256	8,02	6,55	4,99	3,74
0,153	7,68	6,24	4,56	3,19
0,098	—	5,91	4,15	2,56
0,059	—	4,93	2,82	1,55

Fig. 8a. $\times$ $\delta_{11} = 0,034$. $\delta_1 = 0,154$.

$k' = 0,348$	0,273	0,232	0,176	0,129	0,100	0,066	0,035
$i^2 \text{ eff.} = 8,29$	8,10	7,81	7,70	7,44	7,20	6,90	5,23

c) Die Kurven zeigen das Folgende:

1. Der Stromeffekt im Sekundärkreise steigt mit wachsender Koppelung sehr schnell an und erreicht schon bei einer ziemlich kleinen Koppelung einen Wert, über den hinaus er nur noch wenig anwächst, wenn die Koppelung immer fester wird.

2. Dieser „Knick“ in der Kurve wird immer weniger scharf, je größer die Dämpfung des Systems ist. Er wird bei wachsender Dämpfung bei immer festerer Koppelung erreicht.

III. Effekt in einem mit dem Sekundärkreise extrem lose gekoppelten dritten Kreise.

a) In der Praxis der drahtlosen Telegraphie besteht die Frage: wie muß das Sendersystem gekoppelt werden, damit in dem in bestimmter Entfernung aufgestellten Empfänger eine maximale Wirkung erzielt wird für den Fall, daß der Empfänger auf *eine* der beiden Schwingungen des Senders abgestimmt ist?

Die folgenden Messungen sollen dieselbe Frage beantworten für den Fall geschlossener Systeme. Sie sind demnach nur als Analoga zu den in der drahtlosen Telegraphie vorliegenden Verhältnissen aufzufassen. Trotzdem seien die Ausdrücke Sendersystem und Empfänger der Kürze halber gebraucht.

b) Als Sender dienten nacheinander die beiden Systeme A und B, als Empfänger der Meßkreis. Der Sekundärkreis

des Sendersystems induzierte mit Hilfe der Spule (1) (Fig. 1) in extrem loser Koppelung¹⁾ auf den Meßkreis, und die Aufgabe bestand nun darin, bei verschiedener Koppelung des Sendersystems das Maximum zu bestimmen.

c) Die Messung war sehr kompliziert. Vgl. darüber die Dissertation.

d) Die Figg. 9 und 10 sowie Tab. IV geben die Resultate dieser Messungen. Sie zeigen das Folgende:

1. Der Stromeffekt steigt bei wachsender Koppelung des Systems auffallend rasch an, erreicht bei sehr kleiner Koppelung einen maximalen Wert und fällt dann wieder ab. Das Maximum wird immer in einem Bereich erreicht, in welchem die Maxima der Resonanzkurve noch nicht voneinander zu unterscheiden sind.

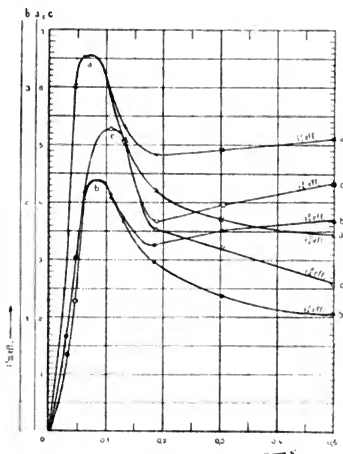


Fig. 9.

1) Ob die Koppelung zwischen Empfänger und Sekundärkreis des Senders dieselbe bleibt bei variierender Koppelung des Sendersystems, ist unwahrscheinlich, da die Selbstinduktion des Sekundärkreises sich höchstwahrscheinlich dabei ändert (vgl. p. 271, Gl. (3b)).

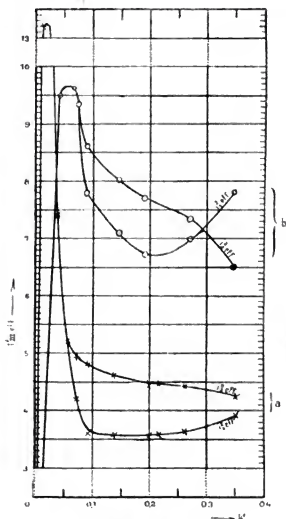


Fig. 10a u. b.

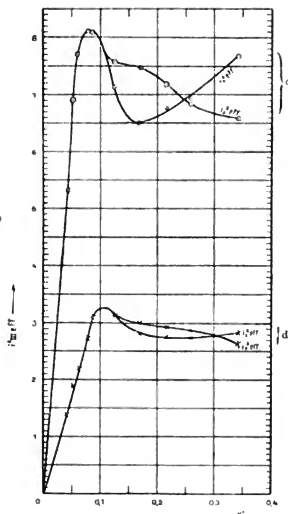


Fig. 10c u. d.

Tabelle IV.

System A. $N = 2,317 \cdot 10^6 / \text{sec}$. $b_I = 0,11s$. Fig. 9.

k'	Kurve a		Kurve b		Kurve c ¹⁾	
	$b_{II} = 0,139$ $b_{III} = 0,10$		$b_{II} = 0,202$ $b_{III} = 0,200$		$b_{II} = 0,299$ $b_{III} = 0,300$	
	$i_1^2 \text{ eff.}$	$i_2^2 \text{ eff.}$	$i_1^2 \text{ eff.}$	$i_2^2 \text{ eff.}$	$i_1^2 \text{ eff.}$	$i_2^2 \text{ eff.}$
0,500	5,13	3,45	1,83	1,04	4,34	2,53
0,302	4,91	3,70	1,76	1,19	3,99	3,21
0,189	4,84	4,16	1,61	1,49	3,69	3,51
0,131	5,32	5,08	1,85	1,84		5,08
0,109	5,21 ²⁾	5,50 ²⁾	2,07	2,04		5,28
0,063		6,55		20,9		4,01
0,046		6,01		1,52		2,30
0,033		3,47		0,83		1,37

1) Bei der Aufnahme dieser Kurven war das Thermoelement in den Meßkreis eingeschaltet (Widerstand = $2,57 \Omega$).

2) Erscheint fehlerhaft; deshalb in der Figur weggelassen.

System B. $N = 1,75 \cdot 10^6 / \text{sec.}$ $b_1 = 0,154$. Fig. 10.

k'	Kurve a		k'	Kurve b ¹⁾	
	$b_{II} = 0,034$ $b_{III} = 0,031$			$b_{II} = 0,100$ $b_{III} = 0,104$	
	i_1^2 eff.	i_2^2 eff.		i_1^2 eff.	i_2^2 eff.
0,35s	3,9s	4,2s	0,34s	7,8s	6,5s
0,26s	3,6s	4,4s	0,27s	6,9s	7,3s
0,21s	3,5s	4,4s	0,19s	6,7s	7,7s
0,20s	3,5s	4,4s	0,14s	7,1s	8,0s
0,13s	3,5s	4,6s	0,09s	7,8s	8,6s
0,09s	3,6s	4,8s	0,07s	9,3s	
0,07s	4,2s	4,9s	0,06s	Max.: 9,6s	
0,05s	5,2s		0,04s	9,5s	
0,03s	7,4s				
0,01s	Max.: 13,2				

k'	Kurve c ¹⁾		Kurve d ¹⁾	
	$b_{II} = 0,21s$ $b_{III} = 0,20s$		$b_{II} = 0,37s$ $b_{III} = 0,30s$	
	i_1^2 eff.	i_2^2 eff.	i_1^2 eff.	i_2^2 eff.
0,34s	7,6s	6,5s	2,8s	2,6s
0,26s	6,9s	6,8s	2,7s	2,8s
0,21s	6,7s	7,1s	2,7s	2,9s
0,17s	6,5s	7,4s	2,8s	3,0s
0,12s	7,1s	7,6s	3,1s	
0,08s	8,1s		3,1s	
0,08s	Max.: 8,1s		2,7s	
0,06s	7,7s		2,1s	
0,05s	6,9s		1,8s	
0,04s	5,8s		1,4s	

2. Je größer die Dämpfung des Sekundärkreises und des Meßkreises ist, bei um so festerer Koppelung wird dieser Maximal-effekt im Meßkreis erreicht.

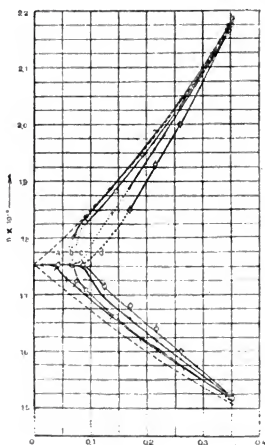
3. Bei System A ist der Stromeffect der schnelleren Schwingung stets größer als derjenige der langsameren, wenn

1) Vgl. Anm. 1 p. 282.

er überhaupt von demselben verschieden ist. Die Kurven bei System *B* lassen erwarten, daß bei noch stärkerer Koppelung ebenfalls eine bedeutende Überlegenheit der schnelleren über die langsamere Schwingung hervortreten würde.

Da bei einigen Kurven das Thermoelement mit in den Meßkreis eingeschaltet war, bei andern nicht, und da ferner die Entfernung der Kreise (1) und (4) (Fig. 1) für die einzelnen Kurven verschieden war, so sind die Kurven bezüglich des Maßstabes für den Effekt nicht untereinander vergleichbar.

e) Es ist ferner interessant, bei einer bestimmten Koppelung des Systems zu untersuchen, welche Wechselzahlen des sogenannten Empfängers den Maximis der Resonanzkurve ent-



System *B*.

$$N = 1,753 \cdot 10^6 / \text{sec.} \quad d_1 = 0,154.$$

Kurve *a* (x). $d_{II} = 0,034 \quad d_{III} = 0,031.$

Kurve *b* (o). $d_{II} = 0,100 \quad d_{III} = 0,104.$

Kurve *c* (•). $d_{II} = 0,216 \quad d_{III} = 0,204.$

Kurve *d* (◊). $d_{II} = 0,370 \quad d_{III} = 0,308.$

Fig. 11.

sprechen. Fig. 11 ist das Resultat¹⁾ dieser Untersuchung speziell für System *B*. Ganz analoge Kurven ergeben sich aber auch für System *A*. Aus den Kurven läßt sich Folgendes ersehen:

1. Für eine bestimmte Koppelung nähern sich bei wachsender Dämpfung die beiden Wechselzahlen n_1' und n_2' , bei denen

1) Vgl. Anm. 4 p. 272.

der Stromeffect ein Maximum ist¹⁾, immer mehr der Wechselzahl N , auf welche die beiden Kreise des Systems abgestimmt sind.

2. Je loser die Koppelung ist, um so mehr trifft dies zu. Bei kleiner werdender Koppelung und großer Dämpfung verliert sich das kleinere der beiden Maxima immer mehr. Es ist dann nur noch ein Maximum vorhanden, das sich immer mehr dem Werte von N nähert.²⁾ Wegen der Flachheit der Resonanzkurven ist in diesem Fall die Bestimmung der entsprechenden Wechselzahl bei größerer Dämpfung nicht genau.

Vergleicht man die Resultate der Messungen I—III miteinander, so ergibt sich das Folgende:

1. Alle Kurven weisen bei einer bestimmten Koppelung ein Maximum bez. einen Knick auf. (Bei Fig. 5 ist für größere Koppelung wohl auch ein Maximum zu erwarten.) Es gibt also in allen drei Fällen einen Koppelungsgrad, über den hinaus zu koppeln von keinem praktischen Interesse sein dürfte.

2. Dieses „praktische Maximum“ wird um so verschwommener, je größer die Dämpfung ist, und es muß bei wachsender Dämpfung die Koppelung immer fester werden, damit dieses praktische Maximum erreicht wird.

3. Haben Primär- und Sekundärkreis konstante Dämpfung, und der lose gekoppelte dritte Kreis (Empfänger) gleiche Dämpfung wie der Sekundärkreis, und variiert man die Koppelung zwischen Primär- und Sekundärkreis von $k' = 0$ an aufwärts, so wird zuerst bei loser Koppelung der Stromeffect im dritten Kreise, wenn dieser auf eine der Schwingungen des Senders abgestimmt ist, sein Maximum erreichen. Bei fester werdender Koppelung sinkt dieser, und der Stromeffect im Sekundärkreise erreicht sein praktisches Maximum. Bei noch

1) Die ziemlich regelmäßige prozentisch größere Abweichung der n_2' von den aus den getrennten Resonanzkurven berechneten Werten n_2 läßt sich wohl aus der Unsymmetrie der experimentell aufgenommenen Resonanzkurven erklären. Dieselben fallen nämlich fast immer nach der Seite der abnehmenden n bedeutend langsamer ab, als nach der andern Seite.

2) Aus diesem Grunde konnten die Kurven für n_1' nicht vollständig aufgenommen werden.

festerer Koppelung erreicht dann die Maximalamplitude des Sekundärkreises ihr praktisches Maximum.

Diese Arbeit ist im physikalischen Institut der Kaiser-Wilhelms-Universität Straßburg unter Leitung des Hrn. Prof. Dr. Braun und zeitweilig des Hrn. Prof. Dr. Cohn auf Anregung des Hrn. Prof. Dr. Zenneck begonnen und mit freundlicher Unterstützung durch den letzteren, wie durch Hrn. Dr. Mandelstam ausgeführt worden. Den genannten Herren sage ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank.

Straßburg i. E., Physik. Institut, Juli 1906.

(Eingegangen 21. November 1906.)

5. *Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck; von Rudolf Ladenburg.*

(Auszug aus der Münchner Inaugural-Dissertation.)

Einleitung.

Der Widerstand, den ein fester Körper bei seiner Bewegung in einer Flüssigkeit erfährt, setzt sich aus zwei Teilen zusammen: aus der „äußeren“ Reibung zwischen Körper und Flüssigkeit und der „inneren“ Reibung zwischen den Flüssigkeitsteilen selbst. G. G. Stokes¹⁾ hat die Größe dieses Widerstandes für den Fall einer Kugel berechnet, die sich in einer unendlich ausgedehnten viskosen Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Ist die äußere Reibung so groß, daß die Kugel die anlagernden Flüssigkeitsteile mit sich zieht, so ist die Bewegung der Kugel durch die innere Reibung allein bestimmt, und Stokes fand in der Tat in diesem Falle aus den hydrodynamischen Grundgleichungen der stationären Bewegung mit Vernachlässigung der Quadrate und Produkte von Geschwindigkeiten für den Widerstand den einfachen Ausdruck²⁾

$$(1) \quad K = 6 \pi k R a,$$

wobei k den Koeffizienten der inneren Reibung der Flüssigkeit, R den Radius und a die Geschwindigkeit der Kugel bedeutet. Unter dem Einfluß der Schwerkraft wird eine Kugel in einer viskosen Flüssigkeit zunächst beschleunigt und erst dann mit konstanter Geschwindigkeit herabfallen, wenn der mit der Geschwindigkeit wachsende Widerstand der wirkenden Kraft gleich geworden ist, d. h. wenn

$$6 \pi k R a = \frac{4}{3} \pi g R^3 (s - s')$$

oder

$$(2) \quad k = \frac{2}{9} g R^2 \frac{s - s'}{a}$$

1) G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. 8. p. 237. 1850; 9. p. 8. 1850; Math. and Phys. Pap. 1. p. 41.

2) Vgl. G. Kirchhoff, Vorl. über Mechanik (4. Aufl.) p. 378 etc. 1897.

ist (g ist die Erdbeschleunigung, s die Dichte der Kugel, σ die der Flüssigkeit). Diese Gleichung kann man nun offenbar zur Bestimmung der inneren Reibung zäher Flüssigkeiten benutzen¹⁾, und auf diese Weise den Einfluß des Druckes auf die innere Reibung zu bestimmen, war die Aufgabe der vorliegenden Arbeit. Da jedoch die Stokessche Berechnung nur für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit gilt, die Versuche aber selbstverständlich in begrenzten Gefäßen auszuführen waren, so mußte zunächst die praktische Verwendbarkeit der Stokesschen Methode untersucht werden.

I. Teil. Die Prüfung der Stokesschen Methode.

Infolge ihrer Ableitung gilt die Stokessche Beziehung (Gleichung (2)) nur unter den Bedingungen, daß

1. die Flüssigkeit unendlich ausgedehnt ist,
2. außer der Schwerkraft keine äußeren Kräfte auf Flüssigkeit oder Kugel wirken,
3. die äußere Reibung unendlich groß ist und daß
4. die Fallgeschwindigkeit der Kugel so gering ist, daß ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden können, d. h. nach Lord Rayleigh²⁾, daß $\alpha.R.\sigma$ klein ist gegen k , oder mit Benutzung der Gleichung (2), daß³⁾

$$(3) \quad R^3 = \frac{9}{2} \frac{k^2}{g(s - \sigma)\sigma \cdot 1000}$$

ist, falls R den kritischen Radius bedeutet, der bis auf 1 Promille dieser Bedingung genügt.

Auf die mehr oder weniger strenge Einhaltung aller dieser Bedingungen ist aber bei den bisherigen Bestimmungen des

1) Andere Methoden für zähe Flüssigkeiten vergleiche: O. E. Meyer, Pogg. Ann. 113. p. 55 u. 385. 1861; M. Margules, Ber. d. Wien. Akad. 83. (2) p. 588. 1881; A. Heydweiller, Wied. Ann. 63. p. 56. 1887; Th. Schwedoff, Journ. de phys. (2) 8. p. 1843. 1889; M. Couette, Ann. chim. et phys. (6) 21. p. 43. 1890; C. Barus, Phil. Mag. (5) 29. p. 332. 1890; W. Voigt, Wied. Ann. 47. p. 671. 1892; K. Brodmann, Wied. Ann. 45. p. 159. 1892; A. Mallock, Proc. Roy. Soc. 50. p. 38. 1896; M. S. Segel, Physik. Zeitschr. 4. p. 493. 1903; R. Reiger, Ann. d. Phys. 19. p. 985. 1906 und Diss. Braunsch. 1901, woselbst weitere Literaturangaben.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 36. p. 354. 1893.

3) E. T. Allen, Phil. Mag. 50. p. 323. 1900.

Reibungskoeffizienten nach Stokes' Methode¹⁾ meist nicht gemacht worden, besonders nicht auf die Bedingung (1) der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, obgleich schon im Jahre 1879 Schöttner²⁾ eine Verzögerung der Kugelgeschwindigkeit beobachtete, als er in sein Gefäß ein engeres Rohr einschob. Eine eingehendere Prüfung des „Stokesschen Gesetzes“ unternahm O. G. Jones, ohne sie aber zu Ende zu führen; in der allein erschienenen vorläufigen Mitteilung³⁾ führt er zwei Zähigkeitsmessungen für Glycerin an, die freilich um 4 bez. 35 Proz. höhere Werte lieferten, als man nach Poiseuilles Methode für Glycerin derselben Temperatur gefunden hat⁴⁾; da er Quecksilberkugeln benutzte, erhob Lord Rayleigh⁵⁾ den Einwand, daß wahrscheinlich Zirkulation innerhalb der Kugeln die Fallgeschwindigkeit beeinflusste.

Auf dem Stokesschen Gesetz basiert ferner J. J. Thomsons⁶⁾ bekannte Bestimmung der Ladung von Gasionen; infolge der geringen Größe der fallenden Nebeltröpfchen können sowohl Bedingung (1) als (4) — die anderen kommen nicht in Frage — als praktisch erfüllt angesehen werden.⁷⁾ Die von Allen⁸⁾ andererseits ausgeführte Untersuchung über das Fallen verschiedener Kugeln in reibenden Flüssigkeiten kommt für das Stokessche Gesetz wenig in Betracht, da bei der Mehrzahl seiner Versuche die Fallgeschwindigkeit so groß ist, daß er den Widerstand nicht mehr der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional fand.⁹⁾

1) Ältere Versuche über das Fallen von Kugeln in Flüssigkeiten vgl. Gehlers phys. Wörterbuch 10. (2) p. 1774. 1842; ferner K. Pisati, Reale Acc. dei Lincei 272. Beibl. 1. p. 445; P. de Heen, Bull. de l'ac. Roy. Belg. (2) 45. 1878; O. Schieck, Pogg. Ann. 127. p. 424. 1866; vgl. auch die Dissertation des Verf., Leipzig 1906 (J. A. Barth).

2) K. Schöttner, Ber. d. Wien. Akad. 79. (2) p. 477. 1879.

3) O. G. Jones, Phil. Mag. 37. p. 451. 1894.

4) Vgl. K. Schöttner, Ber. d. Wien. Akad. 77 (2). p. 682. 1878.

5) Wie E. T. Allen (l. c.) zitiert.

6) J. J. Thomson, Phil. Mag. 46. p. 528. 1898; 6. p. 346. 1903.

7) Bei diesen Versuchen ist $aR\sigma = 6 \cdot 10^{-8}$, also in der Tat klein gegen $k = 2,10^{-4}$, und das Verhältnis des Abstandes zweier Kugeln zu ihrem Radius ist etwa gleich 100, vgl. Dissertation p. 17.

8) E. T. Allen, l. c. p. 287.

9) Verwendet wurde das Stokessche Gesetz noch von anderen, wie Tamman, Duff und Trouton und Andrews, vgl. Diss. p. 16, 18.

Um also die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes exakt zu untersuchen, mußte ich in erster Linie eine so zähe Flüssigkeit verwenden, daß Kugeln von leicht meßbaren Dimensionen mit genügend langsamer Geschwindigkeit fielen. Messungen mit 3 mm großen Stahlkugeln in „venetianischem Terpentin“ zeigten die Brauchbarkeit dieser Substanz, verschieden weite Röhren lehrten zugleich den großen Einfluß der Gefäßwandungen: die Fallgeschwindigkeit wurde um etwa 15 Proz. vergrößert, als ich statt eines Rohres von 4,4 cm Durchmesser ein 2,7 cm weites Rohr benutzte. Auch theoretisch ist ein solcher Einfluß leicht verständlich: in einem unendlich begrenzten Gefäße darf durch keinen Querschnitt mehr Flüssigkeit ein- als austreten; aus den von Stokes gegebenen Lösungen des Problems folgt jedoch unmittelbar¹⁾, daß sich an keiner Stelle Flüssigkeit in der der Kugelgeschwindigkeit entgegengesetzten Richtung bewegt.

Die Vorversuche ergaben ferner, daß die äußere Reibung als unendlich groß angesehen werden durfte (Bedingung (3)): Kugeln, deren Oberfläche durch Salpetersäuredämpfe stark angegriffen waren, zeigten dieselbe Fallgeschwindigkeit²⁾ wie glatt polierte Kugeln gleichen Gewichtes und gleichen Durchmessers, und eine auf die Oberfläche der Flüssigkeit aufgegossene grüne Chlorophyll-terpentinlösung wurde von den Kugeln bis auf den Boden mitgenommen —, der so gebildete grüne Faden bewies zugleich die geradlinige Bewegung der Kugel.³⁾ Auch ließ sich leicht zeigen, daß die Kugel beim Fallen nicht rotierte.²⁾

Die Bedingung (2) schließlich, daß außer der Schwerkraft keine äußeren Kräfte auf Kugel oder Flüssigkeit wirkten, war unschwer zu erfüllen.

Als sehr störend erwies sich bei den Vorversuchen der außerordentlich große Einfluß der Temperatur auf die Viskosität (pro Grad Erwärmung Vermehrung der Viskosität um etwa 25 Proz.) und die schlechte Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit.

1) Vgl. auch G. Kirchhoff, l. c. In der Dissertation ist die Ableitung auf p. 19 ausgeführt.

2) Vgl. Diss. p. 27.

3) Vgl. Diss. p. 25, 26.

Eingehende thermoelektrische Beobachtungen zeigten, daß es für exakte Messungen in weiten Gefäßen notwendig war, die Temperatur zunächst 6—7 Stunden bis auf $\pm 0,003^\circ$ konstant zu halten, ehe mit der Beobachtung begonnen werden konnte.

Besonderes Gewicht wurde auf die genaue Ausmessung der Kugeln gelegt. Zur Verwendung kamen unvernickelte Stahlkugeln, die zu technischen Zwecken in großer Vollkommenheit und Gleichförmigkeit hergestellt werden: Kugeln des bis auf 3 Promille gleichen Gewichtes unterschieden sich im Durchmesser nicht um 1 Promille, d. h. bei den kleinsten verwendeten Kugeln nicht um 0,0015 mm. Ich verwendete vier Kategorien von Kugeln, von 4, 3,2 und 1,5 mm Durchmesser, vom mittleren Gewichte 0,2526, 0,1080, 0,03120 und 0,01348 g und vom mittleren spezifischen Gewichte 7,705, und bestimmte zunächst das mittlere spezifische Gewicht einer größeren Zahl von Kugeln (30—225) einer Kategorie und darauf bis auf 1 Promille das absolute Gewicht und mit Hilfe eines geeichten Wildschen Dickenmessers den Durchmesser jeder einzelnen Kugel (Details dieser Messung vgl. Diss. p. 35—39). Statt des gewöhnlichen Stokesschen Gesetzes (Gleichung (2)) benutzte ich für die endgültigen Berechnungen die identische Gleichung

$$(2a) \quad k = \frac{g \cdot G \cdot (s - \sigma)}{6 \pi R a s},$$

in der G das Kugelgewicht bedeutet, da ein Fehler in s im Verhältnis $s - \sigma/s$ nur den s^{ten} Teil ausmacht.

Zur Messung der Fallgeschwindigkeit wurden die verwendeten Glasröhren von 5 zu 5 cm mit eingezätzten Ringen, möglichst senkrecht zur Rohrachse, versehen, und mit Hilfe eines Sekundenklopfers oder einer Stoppuhr wurden die Momente beobachtet, in denen der untere Kugelrand zwei bestimmte, einander gegenüberliegende Stellen eines Ringes passierte. Da der Brechungsexponent der zähen Flüssigkeit (1,522) von dem der verschiedenen Gläser (1,510 bis 1,519) nur sehr wenig differierte und ersterer jedenfalls nicht kontinuierlich in irgend einer Richtung variierte (wie es z. B. bei Diffusionsversuchen der Fall ist), liefert diese Methode die wahren Fallgeschwindigkeiten (vgl. Diss. p. 27—29).

Auf Grund dieser Gesichtspunkte wurde für die end-

gültigen Messungen zur Bestimmung des Einflusses der Gefäßwandung folgende Versuchsanordnung gewählt: In die Metallschutzwände eines Wasserbades von 85 Liter Inhalt wurden

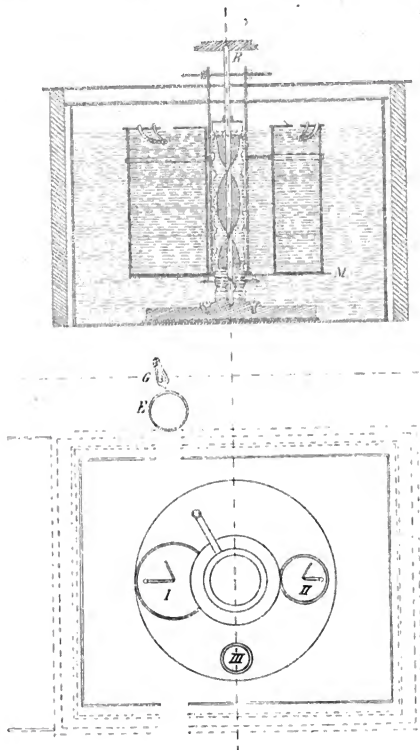


Fig. 1 ($\frac{1}{10}$ nat. Größe).

schließbare Schlitze angebracht, durch die das Licht einer in vertikaler Richtung verschiebbaren Glühlampe *G* (vgl. Fig. 1) nach Passieren eines Gefäßes *E* gelangte, das zur Absorption

der Wärmestrahlung mit Eisenchloridlösung gefüllt war. Ein Stativ trug, drehbar um den Rührer *R*, eine Metallscheibe *M*, auf der verschiedene Röhren von 26 cm Höhe befestigt werden konnten. In die Röhren wurde künstlich hergestelltes venetianisches Terpentin (eine filtrierte Lösung¹⁾ von drei Teilen Kolophonium und einem Teil Terpentinöl²⁾ heiß eingefüllt, und diese wurden mit gut abgeschliffenen Glasscheiben bedeckt, die eingekittete, geeignet gebogene Messingröhrchen zum Aufnehmen der Kugeln trugen (vgl. Fig. 1). Federnde Stahlnasen am unteren Ende der Röhrchen bewirkten, daß beim Aufstoßen auf die oberste Kugel stets nur eine³⁾ Kugel herausfallen konnte.⁴⁾

Die erhaltenen Fallzeiten (vgl. die 55 explizite angeführten Versuche Diss. p. 42—54) zeigten in den einzelnen Teilen der Röhren untereinander Abweichungen von 0,1 bis 1,5 Proz., so daß die Fallgeschwindigkeit im wesentlichen als konstant anzusehen war (die oberen 3 cm und unteren 2 cm der Röhren wurden von der Beobachtung ausgeschlossen), im Mittel wurde jedoch das erste und letzte Viertel ein wenig langsamer als die anderen zurückgelegt, was dem Einfluß des Bodens und Deckels zuzuschreiben ist. Folgende Tabellen auf p. 294 enthalten die Resultate zweier Versuchsreihen, mit Flüssigkeit verschiedener Zähigkeit ausgeführt.

Diese Tabellen enthalten 1. die Gesamtfallzeiten *T* bei etwa 16° C. für einen Fallraum von 20,00 cm⁵⁾, die Mittel einer großen Zahl von Beobachtungen, deren Abweichungen bei den Versuchen der Tab. II im Durchschnitt 3 Promille betragen, und 2. die Verhältnisse der Fallzeiten verschiedener

1) Ähnliche Lösungen hat bereits R. Reiger, Diss. Erlangen 1901 und Ann. d. Phys. 19. p. 985. 1906 zur Messung von Relaxationszeit und Viskosität benutzt.

2) Die Lösung war hellgelb, gut durchsichtig und hielt sich mehrere Wochen lang unverändert; ihr spezifisches Gewicht war $\sigma = 1,01$.

3) Zwei Kugeln hintereinander in geringem Abstände können beinahe doppelt so schnell fallen wie einzeln, vgl. Vers. 2, Diss. p. 42.

4) Abweichungen aus der Rohrachse bewirkten nur sehr geringe Fehler, Diss. p. 27.

5) Die Fallräume in den einzelnen Röhren differierten nur um etwa 1—2 Promille; die Tabellen enthalten die auf gleiche Fallräume berechneten Werte (vgl. Diss. p. 34).

Tabelle I.

Kugelradien	Röhre I $\varrho_1 = 3,85 \text{ cm}$	Röhre II $\varrho_{II} = 5,3 \text{ cm}$	berechnet
$R_1 = 0,1985 \text{ cm}$	1395''	1349''	
$R_2 = 0,1493 \text{ „}$	2396	2361	
$R_3 = 0,0989 \text{ „}$	5320	5261	
$R_4 = 0,07495 \text{ „}$	9178	9023	
T_4/T_1	6,58	6,73	7,10
T_3/T_1	3,81	3,90	4,03
T_2/T_1	1,725	1,725	1,764

Tabelle II.

Kugelradius	Röhre I $\varrho_1 = 2,20 \text{ cm}$	Röhre II $\varrho_{II} = 3,97 \text{ cm}$	Röhre III $\varrho_{III} = 7,00 \text{ cm}$	Röhre II' $\varrho = 2,25 \text{ cm}$	Röhre III' $\varrho = 2,25 \text{ cm}$
$R_1 = 0,1984 \text{ cm}$	656,1''	596,1	570,4	(653)	652
$R_2 = 0,1493 \text{ „}$	1094	1025	992	1104	1090
$R_3 = 0,0989 \text{ „}$	2370	2266	2218	2395	2345
$R_4 = 0,07485 \text{ „}$	4055	3924	3858	4086	4033
				berechnet	
T_4/T_1	6,181	6,582	6,764	7,150	
T_3/T_2	3,706	3,828	3,887	4,039	
T_4/T_3	1,711	1,732	1,739	1,764	

Kugeln in derselben Röhre verglichen mit dem aus dem Stokes-
schen Gesetz berechneten Werte

$$(2b) \quad \frac{T_i}{T_k} = \frac{R_k^2(s_k - \sigma)}{R_i^2(s_i - \sigma)},$$

der also unabhängig von der Viskosität der Flüssigkeit ist. Die Röhren II' und III' (Tab. II) waren Röhren von derselben Weite wie I, die in Röhre II bez. III konzentrisch eingelassen wurden: die Übereinstimmung der Fallzeiten mit den in Röhre I erhaltenen zeigt ebenso wie die Werte von T_i/T_k , daß die Differenz der Fallzeiten in verschiedenen weiten Röhren lediglich von der verschiedenen Weite der Röhren herrührt. Man sieht also,

die Fallzeit einer Kugel nimmt mit Zunahme des Röhrenradius ab, und selbst bei einem Verhältnis von

$$\frac{\text{Kugelradius}}{\text{Röhrenradius}} = \frac{R}{\varrho} = \frac{1}{73}$$

ist der Einfluß der Gefäßwandung merklich.

Zur Untersuchung des Temperatureinflusses wurde die Temperatur des Wasserbades im Falle der Tab. II um 0,7° C. erhöht. Es ergab sich in Röhre III¹:

Kugelradius	Fallzeit
R_1	585,5
R_2	2099
R_3	3630

Die Verhältnisse dieser Fallzeiten und der entsprechenden Kugeln der Tabelle II sind 1,117, 1,114 und 1,111, so daß 0,1° C. die Fallzeit um 1,6 Proz. änderte. Ebenso unabhängig vom Kugelradius ist das Verhältnis von Fallzeiten gleicher Kugeln in gleichen Röhren verschiedener Viskosität bei entsprechenden Werten der Tabbb. I und II (vgl. Diss. p. 56). Andererseits ist aber die Fallzeit einer Kugel nicht sowohl von dem absoluten Wert der Röhrendimensionen abhängig als vielmehr von dem Verhältnis der Dimensionen der Röhre zu denen der Kugel, wie die Verhältnisse von Fallzeiten zeigen¹), für die R/ϱ übereinstimmt:

Kugelradius Röhrenradius	Verhältnis der Fallzeiten	
	beobachtet	berechnet
$\frac{R_1}{\varrho_1} = \frac{1}{22}$ bez. $\frac{R_1}{\varrho_{11}} = \frac{1}{20}$	3,98	4,04
$\frac{R_4}{\varrho_1} = \frac{1}{29}$ bez. $\frac{R_2}{\varrho_{11}} = \frac{1}{27}$	3,96	4,04
$\frac{R_3}{\varrho_{11}} = \frac{1}{40}$ bez. $\frac{R_1}{\varrho_{111}} = \frac{1}{35}$	3,98	4,04
$\frac{R_4}{\varrho_{11}} = \frac{1}{53}$ bez. $\frac{R_2}{\varrho_{111}} = \frac{1}{47}$	3,96	4,04

1) Die restierenden Differenzen rühren offenbar von den nicht ganz gleichen Verhältnissen R/ϱ und davon her, daß Boden und Deckel ebenso wie die Wände auf die Fallgeschwindigkeit verschieden großer Kugeln verschieden wirken müssen (vgl. auch folgende Seite).

Mithin ist das Verhältnis der Fallzeiten gleicher Kugeln in gleich weiten Gefäßen verschiedener Viskosität unabhängig vom Kugelradius und vom Röhrenradius, also lediglich eine Funktion der Viskosität, und in erster Annäherung

$$(4) \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1}{k_2},$$

d. h. die Methode der fallenden Kugeln ist entsprechend dem Stokesschen Gesetze zur Bestimmung relativer Viskositäten geeignet.

Der Einfluß der Rohrlänge ist hierbei nicht berücksichtigt; er wird um so kleiner sein, je kleiner die Verhältnisse

$$\frac{\text{Kugelradius}}{\text{Rohrlänge}} \quad \text{und} \quad \frac{\text{Röhrenradius}}{\text{Rohrlänge}}$$

sind. In einer 4,4 cm weiten Röhre betrugen die Differenzen der Fallzeiten gleicher Kugeln bei Benutzung verschiedener Kugelsorten nirgends 1 Proz., als ich die Länge der Röhre von 38 cm auf 19 cm verkürzte.

Andererseits ergeben sich für den absoluten Wert des Reibungskoeffizienten nach dem Stokesschen Gesetze der Form

$$k = \frac{g G (s - \sigma)}{6 \pi R a s}$$

aus den Fallzeiten der Tab. II für die höhere Temperatur (d. h. durch Division der dort angegebenen Werte durch 1,114) die folgenden Zahlen:

Tabelle III.

$\frac{R}{\varrho}$	Röhre	k nach Stokes	k'
$\frac{1}{11,1}$	I	1681	1387
$\frac{1}{14,7}$	I	1600	1380
$\frac{1}{20,0}$	II	1515	1358
$\frac{1}{22,2}$	I	1515	1368

Tabelle III (Fortsetzung).

$\frac{R}{\varrho}$	Röhre	k nach Stokes	k'
$\frac{1}{26,6}$	II	1491	1372
$\frac{1}{29,4}$	I	1490	1380
$\frac{1}{35,3}$	III	1456	1367
$\frac{1}{40,1}$	II	1447	1368
$\frac{1}{46,9}$	III	1438	1370
$\frac{1}{53,0}$	II	1424	1364
$\frac{1}{70,7}$	III	1415	1369
$\frac{1}{93,5}$	III	1396	1361

Die erste Vertikalreihe enthält das Verhältnis $\frac{\text{Kugelradius}}{\text{Röhrenradius}}$, die zweite die Röhrennummer, die dritte die nach obigem Gesetze berechneten Werte des Reibungskoeffizienten (die be-

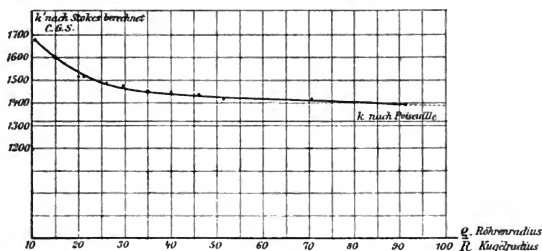


Fig. 2.

nutzten Werte von G , R und s vgl. p. 291 und ausführlicher Dissertation p. 38, 39) und die vierte die nach einem später abgeleiteten Gesetze berechneten Werte (vgl. p. 302). Ich erhalte also bei Benutzung des Stokesschen Gesetzes eine mit der Weite des Gefäßes abnehmende „Reibungskonstante“, ihre Werte als

Funktion des Verhältnisses R/ρ enthält die vorstehende Kurve, die jedoch den wahren Wert der Viskosität offenbar noch nicht erkennen läßt.

Zur Beantwortung der Frage nach diesem wahren absoluten Werte habe ich ihn nach Poiseuilles Methode bestimmt.

Zunächst mußte ich freilich deren Brauchbarkeit für so zähe Flüssigkeiten, wie ich sie verwendet habe, nachweisen¹⁾, und so zeigen, daß auch diese den hydrodynamischen Grundgleichungen, bis auf 1 Proz., genügen und nicht z. B. Berücksichtigung der Relaxation²⁾ Änderungen an ihnen vorzunehmen zwingt.

Die Hagenbachsche³⁾ und Couettesche⁴⁾ Korrektur des Poiseuilleschen Gesetzes sind jedenfalls bei so zähen Flüssigkeiten zu vernachlässigen, und der⁵⁾ „kritische Kapillarradius“ beträgt in diesem Falle 70 cm (bei Wasser 0,03 cm!).

Um die Flüssigkeit in denselben Gefäße zu untersuchen, in dem die Kugeln fallen gelassen wurden, tauchte ich (vgl. Fig. 3) das eine Ende einer ein wenig gebogenen Kapillare K (auf 250 mm 15 mm Niveaudifferenz) in dies Gefäß R und führte das andere Ende luftdicht in das „Absaugegefäß“ A ein, das mit einem Manometer und einer Wasserluftpumpe in Verbindung stand: unter dem Einfluß des Luftdruckes wurde die zähe Flüssigkeit durch die Kapillare gepreßt und fiel tropfenweise⁶⁾ in ein Schälchen, dessen Gewichtszunahme bestimmt wurde. Das untere Drittel von A und die Kapillare befanden sich innerhalb des Wasserbades.

1) In jüngster Zeit zeigten G. W. A. Kahlbaum u. S. Räber (*Acta Ac. Leop.* 84. p. 204. 1905) ihre Gültigkeit für Rizinusöl, dessen Zähigkeit 4000mal so groß ist wie die des Wassers, und R. Reiger in einer nach Drucklegung meiner Dissertation erschienenen Arbeit (*Ann. d. Phys.* 19. p. 985. 1906), bis auf ± 10 Proz. für eine Substanz, deren Zähigkeit 10^9 mal so groß ist als die des Wassers.

2) L. Nathanson, *Phil. Mag.* 2. p. 342. 1902; *Zeitschr. f. phys. Chem.* 38. p. 695 ff., daß außerdem die hier benutzte Flüssigkeit keine große Relaxationszeit besitzt, zeigen Versuche von R. Reiger (*Diss. Braunsch.* 1901).

3) A. Hagenbach, *Pogg. Ann.* 109. p. 385. 1860.

4) M. Couette, *Ann. d. chim. et. phys.* (6.) 21. p. 469. 1890.

5) O. Reynolds, *Phil Trans.* 174. p. 935, 1883 (vgl. *Diss.* 61, 62).

6) Über die Genauigkeit und Fehlerquellen vgl. *Diss.* p. 64—69.

Den Einfluß der Rohrlänge konnte ich der nötigen Temperaturkonstanz wegen nicht untersuchen, dagegen nachweisen, daß Variation von Strömungszeit, Druck und Kapillarradius

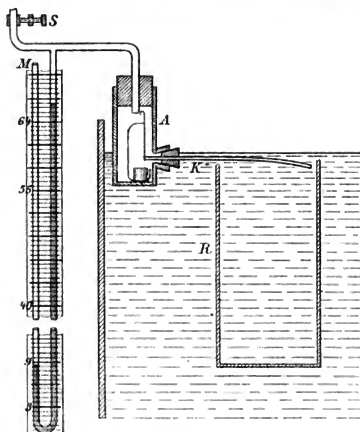


Fig. 3.

die „transpirierte“ Menge dem Poiseuilleschen Gesetze entsprechend ändert, wie die Tabelle p. 300 zeigt.

Unter II und III ist nur ein Teil der erhaltenen Resultate angeführt¹⁾, das Mittel aller Versuche ist 1309, die beobachteten Maximalabweichungen betragen ± 15 . Damit ist die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes bis auf 1 Proz. für eine Flüssigkeit bewiesen, deren Zähigkeit rund 10^5 mal so groß ist als die des Wassers.

Zum Vergleich mit den früheren Fallversuchen ist eine Temperaturkorrektur (+ 0,7 Proz.) wegen der etwas höheren Temperatur des Kapillarteiles im Absaugegefäß (Diss. p. 66) und eine Korrektur von

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{71} \cdot 1,12 = 0,5 \text{ Proz.}$$

1) Versuche, in denen die Kapillare bis fast auf den Boden von *R* eintauchte, gaben dieselben Werte für *k*.

Tabelle IV.

Kapillare I: $q = 0,0953$ qcm.

Zeit t in Sek.	Druck- differenz P in cm Hg	Transpirierte Menge in g	k nach Poiseuille	Mittelwert
1140	63,55	10,96	1299	1306 ± 12
1274	63,61	12,19	1307	
1140	63,57	10,90	1307	
1140	13,77	2,349	1314	
1139	63,64	10,90	1307	
1140	63,54	11,03	1291	
1139	63,56	10,92	1309	
1139	13,99	2,413	1304	
1140	13,86	2,368	1318	
1140	63,35	10,84	1309	

Kapillare II: $q = 0,03632$ qcm.

1798	63,38	2,488	1307	1306 ± 4
902	63,49	1,253	1304	
1798	63,39	2,489	1307	

Kapillare III: $q = 0,01937$ qcm.

2698	63,56	1,043	1319	1314 ± 10
------	-------	-------	------	------------------

anzubringen, da die Transpirationsversuche im Mittel unter einem einseitigen Druck von 63 cm Hg vorgenommen wurden und spätere Versuche (vgl. p. 306) zeigten, daß eine Kompression auf 100 Atm. die Zähigkeit um 112 Proz. vergrößert. Dadurch erhalte ich $k = 1325$, während der mit der ± 10

kleinsten Kugel im weitesten Gefäße ausgeführte Versuch 1396 ergeben hatte.

Somit versagt das Stokessche Gesetz bei der Bestimmung des absoluten Reibungskoeffizienten wegen des großen Einflusses der unvermeidlichen Gefäßwände. Ich habe deshalb versucht diesen Einfluß theoretisch zu bestimmen, mußte mich aber auf einen unendlich langen Zylinder beschränken, da mir bisher die Berechnung des Einflusses eines Bodens und Deckels im Zylinder nicht gelang. Doch bedeutet bereits ein unendlich

langer Zylinder einen prinzipiellen Unterschied gegen eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit, da schon in ihm Rückströmen¹⁾ von Flüssigkeit stattfinden muß.

Diese theoretische Untersuchung wurde mir durch die Liebenswürdigkeit des Hrn. Prof. Korn ermöglicht, der mir die Methode und im einzelnen den Weg zur Ausführung und Berechnung angab. Ich möchte ihm auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank sagen.

Bei Stokes-Kirchhoff²⁾ genügen die Lösungen u , v , w der Grundgleichungen (d. s. die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsteile) nur der Bedingung, daß sie an der Oberfläche der Kugel den Kugelgeschwindigkeiten gleich sind. Durch Einführung eines Zylinders vom Querschnittsradius ρ , an dessen Oberfläche natürlich auch unendlich große äußere Reibung angenommen werden muß, tritt die Bedingung hinzu, daß die Geschwindigkeitskomponenten an der Oberfläche des Zylinders verschwinden. Die Lösung dieses Problems geschah nach einem Prinzip ähnlich dem, nach dem H. A. Lorentz³⁾ den Einfluß einer unendlich ausgedehnten Wand auf eine fallende Kugel berechnet hat, so daß ich mich hier auf eine kurze Skizzierung der Methode und Angabe des Resultates beschränken kann (die ausführlichen Details vgl. Diss. p. 76—91 u. 122—126): Es wurden die Reflexionen der ursprünglichen Bewegung am Zylinder und an der Kugel berechnet und durch ihre Superposition für die Geschwindigkeitskomponenten unendliche Reihen erhalten, die, falls sie konvergierten, die vollständige Lösung liefern mußten. Hierbei zeigte sich, daß bereits die Kenntnis der ersten Reflexion vom Zylinder genügte, d. h. die Berechnung der Lösungen der Grundgleichungen unter der Bedingung, daß sie an der Zylinderoberfläche gleich und entgegengesetzt gerichtet waren den Werten, die die Geschwindigkeiten im Falle einer un-

1) Vgl. p. 290 u. Diss. p. 74—76 u. 120, woselbst auch Berechnung und Figur der Geschwindigkeitsverteilung in der Nachbarschaft einer fallenden Kugel.

2) Stokes-Kirchhoff, l. c. p. 287.

3) H. A. Lorentz, Zittingsverl. Acad. von Wetensch. 5. p. 163. 1896. Von dieser Abhandlung erhielt ich erst nach Drucklegung der Dissertation Kenntnis durch den zum größten Teil neu bearbeiteten Abdruck in den „Abhandlungen über theor. Phys.“ I¹ p. 23 ff. 1906 (Teubners Verlag).

endlich ausgedehnten Flüssigkeit im Abstände des Zylinderradius ϱ vom Mittelpunkte der Kugel besaßen. Die so gewonnenen Geschwindigkeiten u_2 , v_2 , w_2 stimmen zwar an der Kugeloberfläche offenbar noch nicht mit den Kugelgeschwindigkeiten überein, ihre Reflexion von der Kugel ergab sich aber bereits als von zweiter Ordnung klein. Am Mittelpunkte der Kugel würde jene erste Reflexion, wie in der Dissertation¹⁾ berechnet ist, eine Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteile von der Größe

$$2,4 \cdot a \cdot \frac{R}{\varrho}$$

in der der Kugelgeschwindigkeit entgegengesetzten Richtung hervorrufen, so daß der Widerstand, den die Kugel erfährt, durch den unendlich langen Zylinder im Verhältnisse von 1 zu $1 + 2,4 \frac{R}{\varrho}$ vergrößert wird und an Stelle des Stokesschen Gesetzes die Gleichung tritt

$$k' = \frac{2}{9} g \frac{R^2 (s - \sigma)}{a \left(1 + 2,4 \frac{R}{\varrho} \right)}.$$

Berechnet man nach dieser Gleichung den Reibungskoeffizienten aus den Experimenten (Tab. II), so erhält man die in Tab. III unter k' angeführten Werte. Sie sind, im Gegensatz zu den nach dem unkorrigierten Gesetze berechneten Werten k , bis auf ± 1 Proz. konstant, ihr Mittelwert 1371 differiert freilich von dem nach Poiseuille gefundenen noch um 3 Proz. Diese Differenz rührt wohl zweifellos von dem Einfluß des Bodens und Deckels her, von denen die experimentell verwendeten Zylinder begrenzt waren; er muß sich in einem die Zylinderhöhe enthaltenden Gliede bemerklich machen, das zu dem Korrektionsgliede $2,4(R/\varrho)$ hinzutritt. Die Berechnung dieses Einflusses hoffe ich später mitteilen zu können.

Jedenfalls liefert aber die theoretische Berechnung in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen das wesentliche Resultat²⁾, daß für zwei Flüssigkeiten verschiedener Viskosität bei Benutzung gleicher Kugeln und gleicher Röhren

1) Dasselbst ist auf der letzten Seite ein Rechenfehler unterlaufen, so daß der dort (p. 126 u. 93) angegebene Zahlenfaktor 1,2 durch 2,4 zu ersetzen ist; die ausführliche Berechnung denke ich in einer späteren Mitteilung nachzuholen.

2) Denn der Reibungskoeffizient ist im Korrektionsgliede nicht enthalten.

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

ist, d. h. daß die Fallgeschwindigkeiten den Reibungskoeffizienten umgekehrt proportional sind.

II. Teil. Anwendung der Stokesschen Methode.

Die so definierte Methode zur Bestimmung des relativen Reibungskoeffizienten konnte ich also nun zum Studium des Druckeinflusses verwenden.

Ein solcher Einfluß ist wohl zuerst von Röntgen¹⁾ bei Wasser entdeckt und von ihm und anderen²⁾ an Flüssigkeiten geringer Viskosität nach Poiseuilles Methode näher studiert worden. Zähere Substanzen wie Marineleim hat außer Barus³⁾ nur Röntgen⁴⁾ untersucht; er maß die Zähigkeit durch die Strecke, um die ein zugespitzter Metallstab infolge eines gewissen Gewichtes in bestimmter Zeit einsank, und fand, daß bei 16° C. der Marineleim durch 500 Atm. Druck etwa doppelt so zähe ist als unter Atmosphärendruck.

Für meine Versuche stand mir eine Cailletetsche Pumpe mit Metallfedermanometer (aus Genf) und ein stählerner Druckzylinder von 10 cm innerem Durchmesser und 35 cm Höhe zur Verfügung (vgl. Fig. 4). Orientierungsversuche in dem Terpentinöl-Kolophoniumgemisch ergaben für 100 Atm. Druck eine Änderung der Viskosität um etwa 100 Proz., so daß eine viel geringere Genauigkeit erforderlich war, als ich bei den Versuchen unter Atmosphärendruck erreicht hatte. Ich konnte also die Fallgeschwindigkeit der Kugel elektrisch messen, durch einen Elektromagneten und einen elektrischen Kontakt, den die Kugel nach Zurücklegung einer bestimmten Strecke schloß, eine Methode, bei der Fehler von einigen Prozenten nicht zu vermeiden waren. Um die Kompressionswärme unschädlich

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 22. p. 510. 1884.

2) E. Warburg u. Babo, Wied. Ann. 17. p. 390. 1882; E. Warburg u. Sachs, Wied. Ann. 22. p. 518. 1884; A. Cohen, Wied. Ann. 45. p. 666. 1892; L. Hauser, Ann. d. Phys. 5. p. 591. 1901; vgl. auch Dissertation p. 95, 96.

3) C. Barus, Proc. Am. Acad., Jan. 1882; Sill. Journ. III. 45. p. 89. 1893.

4) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 45. p. 604. 1892.

zu machen, wurde auf Grund thermoelektrischer Messungen die Temperatur des Wasserbades, in der der Druckzylinder stand, nach der Kompression 6—12 Stunden auf $\pm 0,01^\circ$ konstant gehalten, bevor die Messung ausgeführt wurde. Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 4:

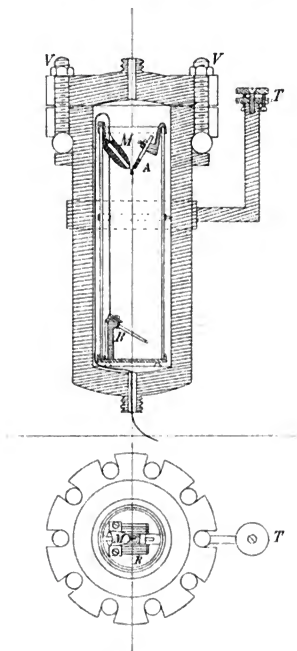


Fig. 4.

Röhre mit zäher Flüssigkeit trägt den Elektromagneten M , dessen Kern im wesentlichen aus zwei voneinander isolierten Drähten aus weichem Stahl bestand. Sie ragten 1 cm aus der Umwicklung heraus und waren derart in den Magnetstrom eingeschaltet, daß dieser nur geschlossen werden konnte, wenn zwischen den Drähten elektrischer Kontakt hergestellt war, wenn also z. B. eine Stahlkugel an ihnen hing. In diesen Stromkreis waren außerdem als Stromzeiger eine Glühlampe und ein Kommutator eingeschaltet, durch dessen Kommutieren die Stahldrähte ihren remanenten Magnetismus¹⁾ verloren und die Kugel losließen. A ist ein Röhrchen mit federnder Stahlhase (vergl. frühere Versuche p. 293) zum Aufnehmen der

Kugeln, R der „elektrische Kontakt“, d. h. ein Hartgummirahmen, auf dem dünne, vergoldete Silberdrähte gleichmäßig aufgespannt

1) Um die Erwärmung des Magneten und der umgebenden Flüssigkeit zu vermeiden, wird die Kugel während der 6—12 Stunden Wartezeit allein durch den remanenten Magnetismus der Stahldrähte getragen.

und abwechselnd mit dem positiven und negativen Pol einer Leitung von 110 Volt (parallel der Leitung des Magnetstromes geschaltet) verbunden waren; der Rahmen stand schräg, so daß die auffallende Kugel herunterglitt und ein neuer Versuch gemacht werden konnte. Damit die Kugel jedesmal an dieselbe Stelle der Drähte fiel, wurde die Röhre durch Stützen im Zylinder fixiert und dessen Stellung mittels einer Libelle justiert; T dient als Unterlage dieser Libelle. Die Gesamtfallzeit der Kugel vom Verlassen des Magneten bis zum Berühren der Drähte wurde durch Nichtmehrere Brennen und Wiederaufleuchten der Glühlampe (vgl. oben) gemessen und war natürlich durch den Magneten und die Drähte beeinflusst. Wie Versuche bei Atmosphärendruck und verschiedenen Temperaturen nach der früheren Methode zeigten, war jedoch diese Zeit den konstanten „wahren“ Fallzeiten innerhalb der mittleren 18 cm bis auf ± 2 Proz. proportional, auch wenn sich die Zähigkeit vervierfachte, und konnte somit direkt als Maß der Viskosität dienen (vgl. Diss. p. 105 bis 108). Die verwendete Flüssigkeit hatte etwa dieselbe Zusammensetzung wie bei den früheren Versuchen, die benutzten Kugeln hatten 4 mm Durchmesser und wogen $0,2529 \text{ g}$; die am Manometer abgelesenen Drucke konnten ohne weiteres verwandt werden, da das Manometer nach E. Wagner ¹⁾ keine Fehler von 1 Proz. aufwies.

Die erhaltenen Resultate zeigen folgende zwei Tabellen; der pro Grad berechnete Temperatureinfluß sowohl wie der pro Atmosphäre berechnete Druckeinfluß *steigen* merklich mit *wachsender* Temperaturdifferenz, bez. *wachsendem* Druck, während z. B. Cohen ²⁾ bei Terpentinöl Konstanz des Druckeinflusses zwischen 100 und 600 Atm. fand.

Tabelle V.

Nr.	Temperatur ϑ	Fallzeit T	$\frac{T_i - T_1}{T_1} \cdot \frac{100}{\vartheta_i - \vartheta_1}$
1	16,55 °C.	819''	
2	14,55	1275	28
3	12,55	1921	34
4	9,23	3774	49

1) E. Wagner, Diss. München 1904; Ann. d. Phys. 15. p. 906. 1904.

2) A. Cohen, l. c. p. 303.

Tabelle VI.

Temp.	Nr.	Druck p in Atm.	Fallzeit T	Mittel	$\frac{T_p - T_1}{T_1}$	$\frac{T_p - T_1}{T_1} \frac{100}{p}$
16,55°	7	1	842''			
	8	1	843			
	11	1	829	839''		
	19	1	837	± 9		
	25	1	846			
	14	51	1254			
	17	51	1230	1242	0,48	0,94
	10	100	1757	± 12		
	12	100	1786	1778	1,12	1,12
	13	100	1792	± 18		
	23	151	2671	2671	2,18	1,45
	15	200	3748			
	16	200	3779	3764	3,48	1,74
				± 16		
14,55°	20	1	1271			
	21	100,5	2645	2616	1,06	1,06
	22	100,5	2588	± 29		

Aus den Versuchen bei 14,55° folgt ebenso wie aus Vorversuchen, daß eine Vergrößerung der Zähigkeit um die Hälfte den Druckeinfluß von 100 Atm. nicht wesentlich ändert.

Theoretisch ist die Änderung der Zähigkeit mit der Dichte von größerem Interesse als die mit der Temperatur und dem Drucke. Deshalb wurde erstens der (absolute, kubische) Ausdehnungskoeffizient als Funktion der Temperatur mittels eines kalibrierten Kapillarrohres bestimmt und innerhalb 2 und 7° Temperaturdifferenz der *konstante* Wert 0,000688 erhalten.



Fig. 5.

Und zweitens wurde die Zusammendrückbarkeit bei verschiedenen Drucken folgendermaßen gemessen. Ein Glasgefäß, das bis auf eine $\frac{1}{2}$ mm weite Öffnung O (vgl. Fig. 5) ganz geschlossen war, wurde vollständig mit Versuchssubstanz und das konzentrisch zur Öffnung angeblasene Ansatzstück G mit Quecksilber gefüllt; beim Komprimieren drang eine der Kompression der Substanz entsprechende Menge Quecksilber in das

Gefäß, und aus der Gewichtszunahme konnte die Kompression bestimmt werden. (Über Fehlerquellen etc. vgl. Diss. p. 110 bis 112.) So ergab sich z. B. für Wasser bei $16,5^\circ$ der scheinbare Kompressibilitätskoeffizient $44,5 \times 10^{-6}$ in genügender Übereinstimmung mit W. C. Röntgen und Schneider¹⁾, die bei $17,5^\circ$ $44,13 \cdot 10^{-6}$ angeben. Für den absoluten (isothermischen) Koeffizienten der zähen Flüssigkeit fand ich zwischen 50 und 200 Atm. den konstanten Wert $45,1 \cdot 10^{-6}$.

Da $\frac{\text{Temperatureinfluß}}{\text{Ausdehnungskoeffizient}}$ bez. $\frac{\text{Druckeinfluß}}{\text{Kompressibilität}}$ den Einfluß von Dichteänderungen, durch Temperatur- bez. Druckänderung hervorgerufen, darstellen²⁾, folgt aus meinen Versuchen, daß

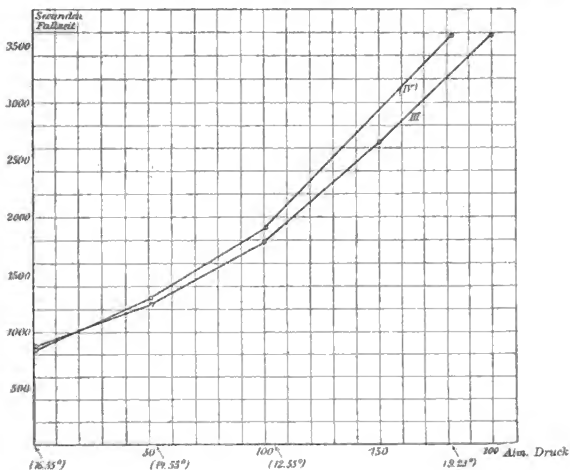


Fig. 6.

die innere Reibung nicht allein von der Dichte abhängt, so daß Temperatur und Druck neben der Dichte noch einen anderen die Zähigkeit beeinflussenden Faktor ändern. Dasselbe Resultat

1) W. C. Röntgen u. F. Schneider, Wied. Ann. 33. p. 640. 1888.

2) Vgl. z. B. E. Warburg, Wied. Ann. 22. p. 518. 1884.

liefert eine graphische Darstellung (Fig. 6). Temperatur (IV) sowohl wie Druckeinfluß (III), dargestellt als Funktionen der Temperatur bez. des Druckes, zeigen starke konkave Krümmung, während die Kurven für Ausdehnungs- und Kompressibilitätskoeffizienten gerade Linien sind. Außerdem zeigt die Figur, daß ein Druck, der dieselbe Kompression hervorruft wie eine gewisse Temperaturerniedrigung, nur etwa die Hälfte der Zähigkeitsänderung bewirkt; also hängt die Viskosität der benutzten Flüssigkeit in dem untersuchten Intervall außer von der Dichtigkeit noch von anderen Eigenschaften ab, die durch Temperatur stärker als durch Druck beeinflusst werden.

Die Resultate vorliegender Arbeit kann ich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die experimentelle Prüfung der Stokesschen Methode hat bei der angewandten Flüssigkeit einen beträchtlichen Einfluß der Gefäßwandung ergeben, der bei einem Verhältnis von $\frac{\text{Röhrenradius}}{\text{Kugelradius}}$ gleich 90 noch mehrere Prozente betrug.

2. Theoretisch ließ sich der Einfluß der vertikalen Gefäßwandung berechnen: ein unendlich langer Zylinder vom Querschnittsradius ϱ lieferte an Stelle des Stokesschen Gesetzes

$$k = \frac{2}{9} g R^2 \frac{s - \sigma}{a}$$

die Beziehung

$$k' = \frac{2}{9} g R^2 \frac{s - \sigma}{a \left(1 + 2,4 \frac{R}{\varrho} \right)}.$$

Ein Vergleich mit den experimentell erhaltenen Resultaten zeigte, daß noch ein weiterer, viel geringerer Einfluß vorhanden war, der wohl ohne Zweifel durch Deckel und Boden der Gefäße ausgeübt wurde, dessen Berechnung aber vorläufig nicht gelang.

3. Experimente und Theorie bewiesen die Brauchbarkeit der „Methode der fallenden Kugeln“ zur Bestimmung des relativen Reibungskoeffizienten: die Fallzeiten gleicher Kugeln in Gefäßen gleicher Dimensionen verhalten sich wie die Viskositäten der betreffenden Flüssigkeiten.

4. Der nach dieser Methode bestimmte Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die Viskosität war bei der benutzten Flüssigkeit (vom Reibungskoeffizienten 1300 C.G.S.)

innerhalb der angewandten Druck- und Temperaturgrenzen sehr groß (für 1° etwa 25 Proz. und für 100 Atm. etwa 100 Proz.) und stieg mit abnehmender Temperatur und wachsendem Druck stark an; er war für die betreffende Flüssigkeit nicht durch reine Dichtigkeitsänderung zu erklären.

5. Außerdem ließ sich zeigen, daß die Beziehungen des Poiseuilleschen Gesetzes ihre Gültigkeit bis auf 1 Proz. selbst für eine Flüssigkeit behalten, deren Viskosität etwa 100 000 mal so groß ist wie die des Wassers.

Vorliegende Arbeit wurde im Oktober 1904 begonnen und im Januar 1906 zu Ende geführt. Hrn. Geheimrat W.C. Röntgen möchte ich auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit sowohl, als für die vielseitige Unterstützung, die er mir bei der Ausführung zuteil werden ließ.

(Aus dem physikalischen Institut der Universität München.)

Cambridge, den 25. November 1906.

(Eingegangen 27. November 1906.)

**6. Elektrische Schwingungen
in Spulen mit metallischen Kernen;
von J. S. Sachs.**

Die unten beschriebenen Untersuchungen sind aus nicht näher hier zu erläuternden Gründen nicht zu Ende geführt worden. Da sie jedoch einige neue und zum Teil überraschende Resultate aufweisen, so erachte ich sie um so mehr einer Veröffentlichung wert, als Versuche nach dieser Richtung meines Wissens in der Literatur gar nicht bekannt sind; wenigstens konnte ich trotz eifrigen Suchens gar kein entsprechendes Material finden.

Legt man in das Innere einer Spule, die durch einen Schwingungskreis erregt wird, einen guten Leiter, so würde man zweierlei erwarten können: zunächst eine bedeutende Verminderung der Intensität ihrer Erregung und ferner eine Verkürzung der Eigenwellenlänge der Spule. Beides, glaubt Drude¹⁾, sei dadurch zu erklären, daß „durch den von der Spule im Messingzylinder (tertiär) induzierten Strom, welcher dem Spulenstrom entgegengerichtet fließt, eine kleinere Selbstinduktion für die Spule hervorgebracht wird wie durch den Sekundärstrom eines Transformators“. ²⁾ Und beide Erscheinungen hat Drude auch tatsächlich in zwei von ihm angegebenen Beispielen beobachten können.

Der Zufall wollte es, daß die erste von mir untersuchte Spule (Ebonit 4 mm Stärke und 28 mm Durchmesser mit 18 Windungen eines doppelt mit Baumwolle umsponnenen Drahtes von 1 mm blank und 2,2 mm isoliert) ein gerade entgegengesetztes Resultat aufwies. Ihre Eigenwellenlänge war $\frac{1}{2} \lambda = 240$ cm.

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 293 ff. 1902.

2) l. c. p. 307.

Legte man einen hohlen Messingzylinder hinein, der sich noch gerade frei in der Spule bewegen konnte, so *stieg* die Eigenwellenlänge auf $\frac{1}{2}\lambda = 300$ cm. Die Intensität der Erregung ist allerdings etwas heruntergegangen, aber nicht merklich.

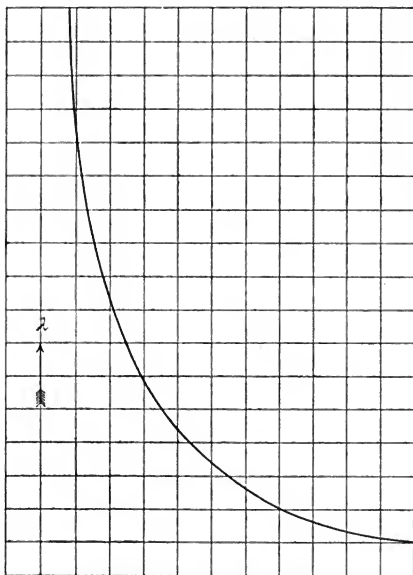
Nun war für mich an einer von Drude beobachteten Erscheinung nicht zu zweifeln, andererseits konnte ich aber auch meine eigenen Beobachtungen nicht in Zweifel setzen, da ich sie viele Male nacheinander unter jedesmaliger Änderung der Versuchsmittel genau gleich gefunden hatte. Ich teilte daher meine ersten Resultate Hrn. Prof. Drude mit, der mich darauf um Zusendung des gesamten Beobachtungsmateriales bat und sich bis dahin seine Meinungsäußerung vorbehielt. Durch seinen inzwischen erfolgten Tod konnte ich mein Vorhaben nicht ausführen.

Aus dem Vergleich der beiden vereinzelt stehenden und sich widersprechenden Versuchsergebnisse war für mich klar, daß die Vorgänge in Spulen mit Metallkernen doch nicht so einfach liegen, und um eine Gesetzmäßigkeit der Erscheinung zu suchen, beschloß ich, letztere systematisch zu untersuchen.

In der Versuchsanordnung habe ich mich der zitierten Arbeit von Drude vollkommen angeschlossen. Ich benutzte daher einen in Petroleum tauchenden Kreisplattenkondensator, dessen eine Platte durch einen Horizontalarm in weiten Grenzen zu verstellen war. Die Distanz zwischen den Platten wird an einem Nonius abgelesen. Mittels biegsamer Drähte werden an die Platten zwei halbkreisförmig gebogene Kupferdrähte von etwa 3 mm Stärke angeschlossen und zwischen diesen ließ ich die Funken überspringen. Als Stromquelle benutzte ich sowohl einen Induktor mit Deprezunterbrecher wie auch einen Hochspannungstransformator, beides mit und ohne Zwischenschaltung eines Teslatransformators. Als Elektroden dienten mir Messing- und Zinkkugeln, zeitweise arbeitete ich mit zugespitzten Enden der Kupferdrähte. Wegen der weit auseinander liegenden Wellenlängen mußte ich häufig sowohl die Dimensionen des Plattenkondensators wie auch des Erregerkreises wechseln. Dies bedingte jedesmal eine Neueichung, die in Verbindung mit den auch sonst unzulänglichen mir zur Verfügung stehenden Mitteln äußerst zeitraubend war.

Die Eichung selbst nahm ich stets nach der Drudeschen Methode¹⁾ vor.

Die Beobachtungen erfolgten so, daß die Spule in eine bestimmte (bis zu 25 cm) Höhe über den Erregerkreis gebracht und dann mit Hilfe einer der Spule genäherten Vakuumröhre die Resonanzeinstellung des Kondensators ab-



—> d Entfernung der Kondensatorplatten

Fig. 1.

gelesen wurde. Es wurden bis zu zehn Ablesungen jedesmal gemacht, und zwar einmal ohne Metallkern, das andere Mal mit Metallkern in der Spule. Um ferner sicher zu sein, daß die Rückwirkung der Spule (besonders bei eingelegtem Metall-

1) P. Drude, l. c. p. 298.

kern) auf den Erregerkreis die Resultate nicht beeinträchtigt, brachte ich auch jedesmal die Spule in verschiedene Höhen über den Erreger, mitunter bis zu einer Höhe, daß die Lampe gerade noch aufleuchtete. Die Resonanzeinstellung ist dann am schärfsten, aber auch zum Teil sehr schwierig und, wie ich mich überzeugt habe, ist es gar nicht nötig, so weit mit der Spule wegzugehen, denn bei nicht zu starken Erregerschwingungen (und diese lassen sich ja z. B. durch die Elektrodenentfernung leicht regulieren) war die höchste von mir überhaupt beobachtbare Differenz in einer Ablesungsreihe zwischen den maximalen und minimalen Werten der Wellenlängen 2 Proz. Und diese Differenz trat nur ein, als ich mit geringen Plattendistanzen arbeitete, wo die Eichungskurve steil abfällt. Arbeitet man in den Grenzen der flacher verlaufenden Kurve, so erreichen diese Maximaldifferenzen nie solche Werte. Es ist also klar, daß sie jedenfalls nicht auf eine Rückwirkung der Spule zurückzuführen, sondern in der Unsicherheit der Einstellung zu suchen sind, was auch aus vorstehender Eichungskurve (Fig. 1) ohne weiteres einleuchten wird. Nach meinen Erfahrungen ist zwecks Erzielung größerer Genauigkeiten als etwa $\frac{1}{2}$ Proz. nur der mittlere Teil der Kurve brauchbar, es empfiehlt sich daher nicht, bis an die äußerste Grenze der Plattendistanz zu gehen.

Die erste von mir untersuchte Spule wies folgende Resultate auf:

n (Zahl der Windungen)	$\lambda/2$ (ohne Kern)	$\lambda/2$ (mit Kern)
18	240 cm	300 cm
17	230	280
15	220	240

Wurde der Meßkondensator auf Resonanz eingestellt während der Untersuchung einer Spule mit Metallkern und letzterer allmählich herausgezogen, so ergab sich für jede Lage des Kernes eine andere Resonanzeinstellung.

Vorstehende Tabelle zeigt eine auffallende Erscheinung: bei allmählicher Abwicklung der Spule sinkt die Wellenlänge der Spule mit Kern rascher als die der Spule ohne Kern. Im Zusammenhang mit der Drudeschen Beobachtung ergab sich da der Schluß, daß bei weiterer Abwicklung wohl ein Moment

eintreten würde, wo das Verhältnis der Wellenlängen sich umkehren wird. Und dies hat sich auch bei einer sofort vorgenommenen Untersuchung tatsächlich ergeben.

Eine Ebonitspule von 2,8 cm äußeren und 2 cm inneren Durchmesser wurde mit 25 Windungen eines Drahtes von 0,9 mm blank und 2,0 mm isoliert versehen. Die Windungen wurden möglichst regelmäßig mit der Hand aufgetragen und ihre Enden mit Siegelack befestigt.

Bei allen diesen und auch späteren Untersuchungen habe ich die eminente praktische Bedeutung der zitierten Arbeit von Drude schätzen gelernt. Von verschiedenen Seiten wurde ja seiner Zeit diese bestritten. Und doch ist sie meines Wissens die einzige, die es möglich macht, die Eigenwellenlänge einer Spule *voraus zu berechnen*. Die Möglichkeit der Vorausberechnung wird aber, weil sie eine nachträgliche Messung nicht spart, häufig unterschätzt. Ich habe jede untersuchte Spule nach Drude berechnet und fand nachträglich durch Messung, daß die Zahlen glänzend übereinstimmten. Wenn sie hie und da Abweichungen aufwiesen, so lag das daran, daß meine Spulen nicht immer die nötige Regelmäßigkeit der Wickelung zeigten, oder aber, weil das Spulenmaterial z. B. Holz) unendlich verschieden ausfällt. Aber auch dann waren die Differenzen zwischen Rechnung und Messung praktisch ganz belanglos. Ich habe mit Wellenlängen zwischen 28 und 0,5 m gearbeitet, und ohne die Drudesche Arbeit müßte ich einfach völlig im Dunklen tappen, während ich durch die Vorausberechnung die Möglichkeit erhielt, meinen Meßtransformator so einzurichten, daß er sich für die Messung auch eignete. Weiß man auch nur annähernd, wo die gesuchte Wellenlänge liegt, so ist sie im Handumdrehen gemessen, weiß man es nicht, so *kann* es vorkommen, daß man sie stundenlang sucht.

Aus der nachstehenden Fig. 2 ist der Verlauf der Eigenwellenlängen obiger Spule mit und ohne Kern ersichtlich. Als Metallkern diente ein hohler Kupferkolben von etwa $\frac{1}{2}$ mm Wandstärke, der das ganze Innere der Spule einnahm.

Erst von etwa zehn Windungen an wurde die Intensität der Schwingung so klein, daß die Messung der Wellenlänge der Spule mit Kern gewisse Schwierigkeiten bereitete und ich

mußte da die Spule bis auf etwa 3 cm über den Erregerkreis nähern.

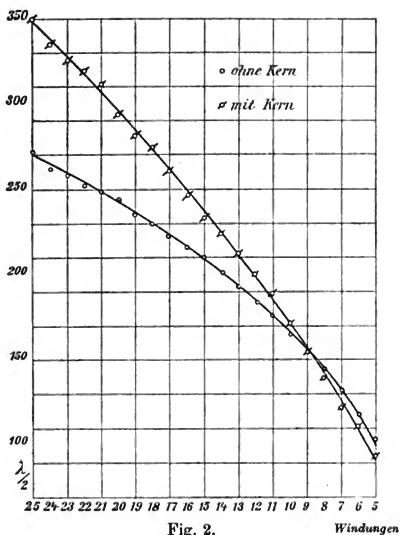


Fig. 2.

Ich habe nun eine ganze Reihe anderer Spulen in ähnlicher Weise hergestellt und gebe in Nachstehendem einige der gefundenen Resultate wieder.

Spule I.

Holz. Äußerer Durchmesser = 46 mm, innerer Durchmesser = 20 mm.
Zahl der Windungen n .

$\lambda/2$ ohne Kern in cm	$\lambda/2$ mit Kern in cm	n
353	353	10
333	322	9
316	300	8
276	260	7

Spule II.

Holz. Äußerer Durchmesser 40 mm, innerer Durchmesser 20 mm.

n	$\lambda/2$ ohne Kern in cm	$\lambda/2$ mit Kern in cm
18	448	488
17	437	472
16	424	448
15	407	427
14	387	410
13	367	385
12	348	354
11	332	334
10	309	309
9	293	283

Spule III

wie Spule II, aber auf Ebonit gewickelt.

n	$\lambda/2$ ohne Kern in cm	$\lambda/2$ mit Kern in cm
18	378	415
17	363	396
16	355	379
15	343	365
14	326	343
13	311	323
12	296	308
11	282	288
10	266	266
9	250	245

Spule IV.

Holz. Äußerer Durchmesser 34 mm, innerer Durchmesser 20 mm.

n	$\lambda/2$ ohne Kern in cm	$\lambda/2$ mit Kern in cm
22	380	445
20	361	413
18	335	376
16	318	348
14	300	321
12	278	273

Alle Spulen waren mit einem baumwollumspunnenen Draht von 0,9 mm blank und 2 mm isoliert bewickelt.

Die an den vier Spulen gewonnenen Resultate sind graphisch in Fig. 3 zusammengestellt.

Es ist natürlich nicht gut angängig, auf Grund von so wenigen Untersuchungen irgendwelche speziellere Schlüsse zu ziehen. Eins ist jedoch unzweifelhaft ersichtlich:

Wird in eine mit Draht bewickelte Spule ein metallischer Kern gelegt, so wird die Eigenwellenlänge der Spule steigen oder sinken, je nach der Konstruktion und Beschaffenheit der Spule.

Die Intensität der Erregung wird durch den metallischen Kern auf alle Fälle schwächer.

Die Versuche deuten ferner darauf hin, daß der Einfluß des metallischen Kernes um so

geringer wird, je dicker die Wandstärke bez. je größer die Dielektrizitätskonstante der Wand ist.

Ich habe nun bei einzelnen (drei) Spulen statt eines hohlen Kupferkolben einen massiven gleichgroßen Kern benutzt, ferner auch eine gußeiserne hohle Röhre und ein Drahtbündel in die Spule hineingelegt. Ich gebe hier die Resultate einer Untersuchung an einer Ebonitspule wieder, die mit 25 Windungen des oben bezeichneten Drahtes versehen war und 28 mm äußeren, sowie 20 mm inneren Durchmesser hatte. Die Resultate sind Mittel aus zwei bez. drei Beobachtungsreihen von je drei bis sechs Ablesungen.

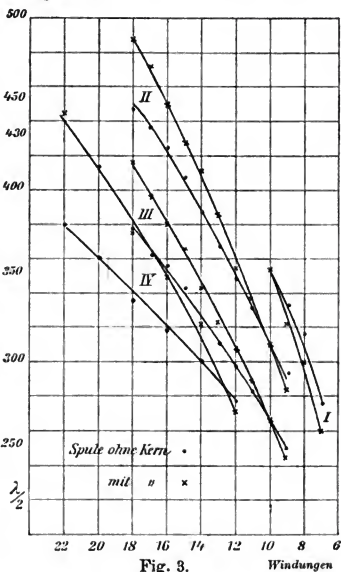


Fig. 3.

$\lambda/2$ in cm				
ohne Kern	mit hohlem Kupferkolben	mit massivem Kupferkolben	mit gußeiserner Röhre	mit Drahtbündel
286	352	352	330	365

An einer Spule (Ebonit) von 40 mm äußerem und 20 mm innerem Durchmesser, auf der 16 Windungen von 1,05 mm blanken und 2,4 mm baumwollisolierten Drahtes angebracht waren, beobachtete ich:

$\lambda/2$ in cm				
ohne Kern	mit hohlem Kupferkolben	mit massivem Kupferkolben	mit gußeiserner Röhre	mit Drahtbündel
337	372	370	360	368

Auch die dritte Spule wies ein ähnliches Bild. Es scheint, als ob auch hier die durch einen Kern verursachten Veränderungen Funktion der Spule selbst sind; natürlicherweise werden aber auch noch die Eigenschaften des Kernes selbst einen Einfluß ausüben müssen.



Fig. 4.

Um den Einfluß der Dielektrizitätskonstante des Mittels zu prüfen, wählte ich folgende Anordnung. Eine Glasröhre, wie sie Fig. 4 zeigt, wurde mit einem Gummipfropfen *P* versehen. Letzterer wurde so angebohrt, daß sich die metallischen Kerne darin bequem halten ließen. Durch eine entsprechende Vorrichtung wurde die Glasröhre über dem Erregerkreise gehalten.

Ich ging nun von der Ansicht aus, daß, wenn ich die Glasröhre mit Flüssigkeiten verschiedener Dielektrizitätskonstante fülle, sich am leichtesten eine Gesetzmäßigkeit ergeben wird, weil sich ja bei Flüssigkeiten die Dielektrizitätskonstante in viel weiteren Grenzen variieren läßt als dies bei festen Körpern der Fall ist. Ich wollte daher benutzen: Luft, Petroleum, Äthylalkohol und Wasser. Die Versuche gestalten sich dabei äußerst zeitraubend, denn bei einer und derselben Win-

dungszahl liegen die Eigenwellenlängen je nach der Füllung in ganz anderen Bereichen, und es empfiehlt sich daher, die Versuche nur unter gleichzeitiger Benutzung mehrerer Meßkondensatoren, die im voraus ganz gebrauchsfertig zur Verfügung stehen, auszuführen. Da ich nur einen solchen Kondensator hatte, so mußte ich

zuvor den Erregerkreis und die Kondensatorplatten jedesmal ändern und sie eichen, wodurch ich häufig für eine Ablesungsreihe 2—3 Tage

Arbeit brauchte. Es kamen natürlich auch andere ungünstige Nebenumstände hinzu, die zu so einer Verzögerung führten. In Bezug auf die Versuche selbst möchte ich bemerken, daß die Feststellung der Eigenwellenlängen bei Wasserfüllung die größten Schwierigkeiten bietet, wohl wegen der starken Absorption, die sich auch bei Alkohol sehr bemerkbar macht, während bei Petroleum das Aufleuchten der Vakuumlampe im allgemeinen stärker war wie bei Luft.

Einige der Resultate gebe ich im Nachstehenden wieder, ohne daraus irgendwelche Schlüsse ziehen zu wollen (Fig. 5). Bemerkenswert ist jedenfalls, daß die Schnittpunkte der Kurven bei jeder Füllung ganz wo anders liegen, und ich glaube daher, daß bei entsprechender Durchführung der Versuche sich die Abhängigkeit von der Dielektrizitätskonstante leicht ergeben wird.

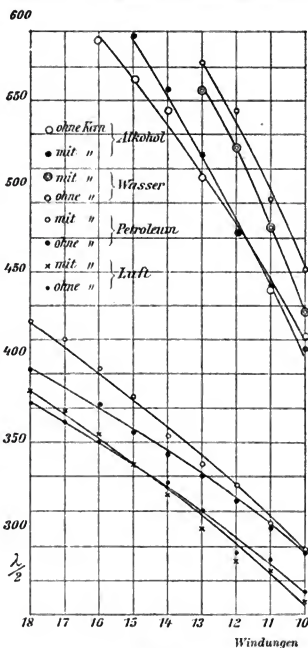


Fig. 5.

Abgesehen von eventuellem wissenschaftlichem Wert könnte die genaue Kenntnis des Einflusses von Metallkernen auf Eigenwellenlängen der Spulen möglicherweise auch praktische Verwertung finden z. B. in der Ausbildung der drahtlosen Telephonie.

Es sei noch hier erwähnt, daß wenn man eine Spule durch einen Kondensator kurzschließt, die Eigenwellenlänge der Spule je nach der Größe des Kondensators durch den hineingelegten Kern größer oder kleiner wird, wie sie es ohne Kern war.

So fand ich z. B. folgende Eigenwellenlängen:

Spule ohne Kondensator und ohne Kern	$\frac{1}{2} \lambda = 200 \text{ cm}$
„ „ „ „ mit „	$\frac{1}{2} \lambda = 238 \text{ „}$
„ mit kleinem Kondensator ohne Kern	$\frac{1}{2} \lambda = 432 \text{ „}$
„ „ „ „ mit „	$\frac{1}{2} \lambda = 392 \text{ „}$

Andere Spule mit verstellbarem Kondensator:

Ohne Kondensator, ohne Kern	$\frac{1}{2} \lambda = 238 \text{ cm}$	
„ „ mit „	$\frac{1}{2} \lambda = 280 \text{ „}$	
Mit Kondensator = 6,5 cm, ohne Kern	$\frac{1}{2} \lambda = 610 \text{ „}$	} Differenz 50
mit „	$\frac{1}{2} \lambda = 560 \text{ „}$	
Mit Kondensator = ca. 6 cm, ohne „	$\frac{1}{2} \lambda = 585 \text{ „}$	} Differenz 45
mit „	$\frac{1}{2} \lambda = 540 \text{ „}$	
Mit Kondensator = 2,9 cm, ohne Kern	$\frac{1}{2} \lambda = 440 \text{ „}$	} Differenz 30
mit „	$\frac{1}{2} \lambda = 410 \text{ „}$	
Mit Kondensator = ca. 1,2 cm, ohne „	$\frac{1}{2} \lambda = 362 \text{ „}$	} Differenz 14
mit „	$\frac{1}{2} \lambda = 348 \text{ „}$	

Nur im ersten und dritten Falle ist die Bestimmung der Kapazität auf etwa $\frac{1}{3}$ Proz. genau, sonst wurde sie geschätzt.

Man beobachtet also auch hier einen ähnlichen Verlauf wie ihn die Kurven der Fig. 3 andeuten. Bei entsprechender Verkleinerung der Kapazität, wie ihn die Spule ohne angehängten Kondensator aufweist, tritt eine Umkehr in dem Verhalten der Spule ein.

Die beschriebenen Versuche sind Ende 1905 im Physikalischen Verein zu Frankfurt a. M. gemacht. Es sei mir hier gestattet, Hrn. Dr. Déguisne, dem Leiter der elektrotechnischen Abteilung obigen Vereins, meinen Dank auszusprechen für seine freundliche Unterstützung und insbesondere für die Bereitwilligkeit, mit der er mir einen Arbeitsraum und die Mittel seiner Abteilung zur Verfügung gestellt hatte.

Frankfurt a. M., November 1906.

(Eingegangen 30. November 1906.)

7. Über die innere Reibung des Eises. II; von Boris Weinberg.

1. In meinem ersten Aufsatz¹⁾ über die innere Reibung des Eises entging mir (wegen der geringeren Zahl der Versuche) die Feststellung einer Beziehung zwischen dem Koeffizienten η der inneren Reibung und der Scherungswinkelgeschwindigkeit α' — einer Beziehung, welche einem interessanten Zusammenhang mit der Relaxationstheorie von Maxwell²⁾ und Schwedoff³⁾ entspricht. Diese Beziehung — eine Verminderung von η mit wachsender α' — war durch einen zweifachen Einfluß der Temperatur auf die Torsionsgeschwindigkeit φ' des Ende des Zylinders versteckt. In der Tat macht die Erhöhung der Temperatur θ den Koeffizienten η kleiner, und deswegen steigt die Geschwindigkeit φ' ; dieser Zuwachs von den Scherungsgeschwindigkeiten α' von koaxialen zylindrischen Schichten macht seinerseits die entsprechenden Werte von η noch kleiner und deswegen steigt die Torsionsgeschwindigkeit φ' noch. Diese beiden Wirkungen von Temperatur — die unmittelbare und die mittelbare — wurden nur dann getrennt, wenn ich die aus meinen Versuchen ermittelten Werte von η nicht nur nach der Temperatur θ , sondern auch nach den Werten von der endgültigen mittleren Scherungsgeschwindigkeit ψ' (gleich $\frac{2}{3}(r/l)\varphi'$, wo r der Halbmesser und l die Länge des tordierenden Zylinders) bei nahe liegenden Temperaturen geordnet habe.

Bei solch einer Zusammenstellung sollte man aus den Werten von η , welche sich auf fast gleiche Werte von θ und ψ'

1) B. Weinberg, Ann. d. Phys. 18. p. 81. 1905.

2) J. C. Maxwell, Phil. Trans. 157. p. 49. 1868 oder Phil. Mag. (4) 35. p. 129 u. 185. 1868.

3) Th. Schwedoff, Journ. de Phys. (2) 8. p. 341. 1889; (2) 9. p. 34. 1890 oder Séanc. Soc. Franç. p. 134 u. 186. 1889.

und auf die Wirkung desselben Torsionsmomentes an demselben Zylinder beziehen, nur *einen* Mittelwert nehmen. Die Zusammenstellung *aller* Werte von η wäre für die Beantwortung der Frage, ob η von ψ' abhängt oder nicht, von keiner Bedeutung, da bei konstantem Torsionsmoment der berechnete Wert von η dem beobachteten Werte von ψ' umgekehrt proportional ist.

In der Tab. I sind entsprechende Werte von θ ($^{\circ}$ C.), ψ' (in 10^{-8} .1/sec) und η (in 10^{13} g/cm. sec) für Newaeis gegeben. Die Bedeutung von $\eta_{\text{ber.}}$ wird später erklärt. In der Kolumne „Nr.“ bedeuten die Nummern I—V die Tabellen von meinem ersten Aufsatz, IIIa einen ziemlich schlechten Versuch, welchen ich da nicht angeführt hatte, und VI einen zehntägigen Versuch derselben Art, welchen ich diesen Winter unter etwas besserer Anordnung ausführte. Die Zahlen weichen etwas von den in meinem Aufsatze gegebenen ab — hauptsächlich wegen der Berücksichtigung der äußeren Reibung und der Berichtigung eines Fehlers in den Temperaturangaben: alle Temperaturen, welche da als $^{\circ}$ C. bezeichnet sind, waren in Wirklichkeit $^{\circ}$ R.

Tabelle I.

Nr.	θ	ψ'	η	$\eta_{\text{ber.}}$	Nr.	θ	ψ'	η	$\eta_{\text{ber.}}$
I	-14,0	2,61	10,14	10,32	I	-1,5	14,4	1,93	2,07
I	-11,4	3,36	7,99	7,60	III	-1,9	9,80	2,52	2,35
VI	-11,2	0,36	18,38	19,85	V	-2,0	3,28	5,84	3,37
I	-8,6	5,02	5,34	5,33	IV	-2,6	1,88	4,76	4,68
VI	-8,6	0,45	14,90	15,44	II	-2,1	1,19	8,48	6,08
I	-7,3	5,65	4,70	4,58	VI	-2,6	0,94	7,03	7,34
I	-5,9	6,14	4,42	3,90	I	-0,7	19,9	1,38	1,74
III a	-5,0	1,82	8,43	5,51	III	-0,8	12,1	2,07	1,93
II	-5,7	0,85	12,32	8,93	VI	-1,1	1,65	3,57	4,65
VI	-6,4	0,66	9,16	10,85	II	-1,0	1,54	6,51	4,78
VI	-5,7	0,56	11,32	11,93	VI	-0,8	1,50	4,71	4,86
I	-3,8	8,84	3,11	2,94	I	-0,1	27,7	1,00	1,33
III	-3,5	7,91	3,07	2,91	III	-0,3	14,7	1,72	1,65
IV	-4,4	1,37	6,66	6,21	II	0,0	4,18	1,59	2,15
III a	-4,4	1,06	13,45	7,23	II	0,0	2,95	3,65	2,66
II	-4,0	0,92	10,98	7,87	VI	0,0	2,83	2,52	2,72
VI	-3,7	0,83	7,11	8,86	II	-0,1	1,64	6,11	4,29
VI	-4,1	0,71	9,35	9,51					

2. Analoge Abnahme von η mit Steigerung von ψ' und von θ ergibt auch — obgleich nicht so deutlich — die Tab. II, die die Resultate von Messungen enthält, welche ich an dem grobkörnigen Eis der Gletscher der Oetztalalpen (Hintereisferner, Kesselwandferner und Hochjochferner) im Juli-August 1905 aufgestellt hatte.¹⁾ In dieser Tabelle haben θ , ψ' und η dieselbe

1) Dazu dienten zwei besondere Apparate, von welchen jeder wesentlich aus einem doppelwandigen Eisenblechgefäß besteht. In den Zwischenraum legte ich Schnee mit Salz (um die Beobachtungen bei Lufttemperaturen über 0°C . zu ermöglichen) und in den Innenraum stellte ich den zu tordierenden Eiszylinder. Fig. 1 stellt in $\frac{1}{6}$ -Naturgröße den vertikalen Schnitt des Gefäßes und Fig. 2 das Gefäß von oben dar. Bei der Konstruktion sollte die Kältemischung und besonders der Eiszylinder vor Wärmeeinfluß geschützt sein und gleichzeitig der Innenraum für die Manipulationen während der Einstellung des Eiszylinders und nachdem für die Beobachtungen der Torsionswinkel und für die Wirkung der Torsionsmomente zugänglich werden. Für diesen Zweck war das Gefäß aus zwei Hälften gemacht, deren eine abnehmbar war. Jede Hälfte war von oben offen und endete unten durch eine Ausflußröhre. Um den Zwischenraum vor dem Zufluß der

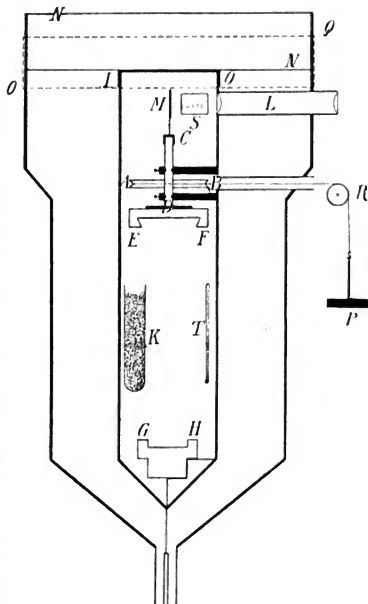


Fig. 1.

äußeren Luft zu schützen, stellte man auf die beiden Hälften des Gefäßes eine zylindrische Schale NN und legte in diese auch Schnee mit Salz. NN war mit den oberen Teilen der beiden Hälften des Gefäßes durch

Bedeutung als in der Tab. I; Nr. I—IX bedeutet einen von den 9 untersuchten Zylindern.

einen Kautschukgürtel $Q Q$ verbunden. Die unteren Ausflußröhren führten etwa bis zum Boden von einem besonderen Gefäß, in welches auch eine Ausflußröhre aus den oberen Teilen mündete. Um den Innenraum zu isolieren, diente eine Kautschukkappe JO . Das doppelwandige Blechgefäß war an den Seiten mit Baumwolle und Leinentuch bedeckt und in einem doppelwandigen Holzkasten befestigt. Die vorderen, hinteren und oberen Seiten der Holzkästen waren beweglich und man öffnete dieselben nur während der Beobachtungen, beim Einstellen oder Messung der Eiszyylinder und zum Auflegen von Schnee.

Die unbewegliche Hälfte des Innenraumes trug oben zwei Zapfenmuttern, an welchen eine vertikale Achse CD gedrückt werden konnte;

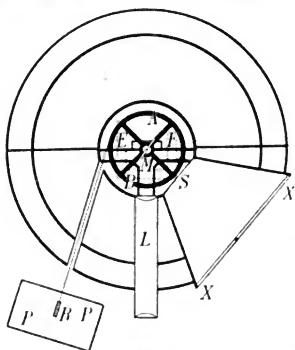


Fig. 2.

unten war ein Halbkästchen aus Eisenblech angelötet, in welches eine besondere Holzfassung GH für die Befestigung des unteren Endes des Eiszylanders eingesteckt wurde. Auf die Achse CD setzte man von oben eine Fassung mit dem Spiegel M , in der Mitte war eine Torsionsscheibe AB und von unten eine Holzfassung EF befestigt. Diese Holzfassung war an einer Seite offen und hatte einen Ausschnitt, welcher sich nach unten verengte und diente zum Aufnehmen einer Eisplatte. In diese Eisplatte wurde eine Vertiefung gemacht für das Ende des zu tordierenden Eiszylanders. Eine andere solche Eisplatte war der Fassung GH angepaßt und auch

mit einer Vertiefung versehen. Die Enden des Eiszylanders brachte ich in diese Vertiefungen und schob die obere Eisplatte und die untere Holzfassung GH in die obere Fassung EF und in das untere Holzkästchen ein und kittete alle Berührungsstellen mit nassem Schnee oder mit gegebenem Eise.

Um die Winkelschiebungen der Torsionsscheibe zu verfolgen, diente eine in zehntel Millimeter geteilte Skala S und ein Fernrohr L ; mittels des Okulars desselben beobachtete man das im Spiegel M reflektierte Bild der Skala, welches das Objektiv des Fernrohres gab. Zur Beleuchtung der Skala befand sich in den Wänden des Gefäßes eine keilförmige Öffnung, welche durch eine Glasplatte XX gedeckt war; die Beleuchtung geschah durch eine elektrische Taschenlampe.

Der Innenraum hatte nur eine Verbindung mit äußerer Luft — ein

Tabelle II.

Nr.	θ	ψ'	η	$\eta_{\text{ber.}}$	Nr.	θ	ψ'	η	$\eta_{\text{ber.}}$
IV	-4,3	51,5	0,33	2,02	VII	-1,4	69,5	0,21	0,86
II	-5,0	9,85	0,28	2,52	VIII	-1,4	40,3	0,39	0,88
II	-4,5	6,70	2,46	2,23	VIII	-1,2	22,3	0,53	0,84
I	-4,5	0,97	3,98	2,94	IX	-1,0	18,2	0,47	0,79
VI	-3,0	13,8	0,99	1,44	II	-1,5	16,3	0,75	0,93
III	-3,4	8,14	2,57	1,65	IV	-1,2	14,9	1,00	0,86
III	-3,2	7,24	1,80	1,57	VI	-1,6	14,7	0,93	0,96
IV	-3,1	7,08	1,13	1,53	III	-1,2	12,1	1,24	0,87
VII	-3,1	6,47	0,77	1,54	IV	-1,1	10,4	0,78	0,85
II	-3,7	5,70	2,26	1,83	III	-1,7	9,31	1,54	1,03
I	-3,7	0,71	5,20	2,91	VIII	-1,4	7,34	1,11	0,96
IV	-3,1	0,67	2,87	2,61	V	-1,0	5,55	1,99	0,89
VIII	-2,5	55,1	0,27	1,20	V	-1,3	4,44	1,34	1,01
V	-2,3	43,5	0,27	1,14	V	-1,5	2,22	2,67	1,24
III	-2,2	16,0	0,72	1,14	VII	-1,4	2,19	2,67	1,22
VI	-2,6	14,2	0,97	1,28	VI	-1,2	1,18	4,96	1,48
II	-2,5	11,9	0,99	1,26	IV	-1,9	0,72	2,66	2,11
III	-2,1	11,2	1,32	1,13	IX	-1,6	0,14	2,98	6,62
III	-2,7	8,11	1,00	1,36	IX	-0,7	36,9	0,21	0,69
VIII	-2,0	7,92	1,19	1,13	IX	-0,1	29,7	0,25	0,49
III	-2,6	6,87	1,46	1,34	II	-0,4	29,3	0,50	0,61
II	-2,8	6,28	2,06	1,43	VI	-0,8	14,8	0,93	0,75
VII	-2,4	5,82	0,98	1,30					
III	-2,0	3,94	1,23	1,23					
IV	-2,5	0,65	2,92	2,42					
IX	-2,2	0,15	2,75	6,43					

3. Die Versuchsfehler waren bei der Untersuchung des Gletschereises noch größer, als bei der Untersuchung des Newaeises. Das rührte teils von dem Expeditionscharakter dieser Versuche, teils von den strukturalen Eigentümlichkeiten des Gletschereises, teils von meiner Voraussetzung, bei der Schmelztemperatur des Eises zu arbeiten. Diese Voraussetzung hatte

enges Rohr, durch welches eine Schnur von der Scheibe AB zur Rolle R ging; an diese Schnur wurden die Gewichte P angehängt. An der Wandung des Innenraumes hing ein Thermometer T und ein Probierrglas K mit Chlorcalcium; das letzte diente dazu, um das Tauen der Skala, den Spiegel und die Gläser des Fernrohres, welches die Beobachtungen sehr erschwerte, etwas zu schwächen.

als Ziel eine Annäherung an die natürlichen Bedingungen der Bewegung des Eises in Gletschern, wo in jedem Punkt die dem Drucke des Eises entsprechende Schmelztemperatur herrscht.¹⁾ Sie konnte aber nicht erfüllt werden wegen des Einschmelzens der Holzfassungen in die Eisplatten, welche die Enden der Eiszylinder befestigten.

Wegen dieser Voraussetzung aber habe ich vernachlässigt besondere Vorrichtungen zu treffen, welche Temperaturmessungen ohne Zutritt äußerer warmer Luft in den Innenraum erlaubt hätten (sogar passende Ersatzthermometer hatte ich nicht). Deswegen sind die Temperaturangaben von einem Fehler von $0,2^{\circ}$ — $1,0^{\circ}$ (das letztere in Fällen, wo die Temperatur nur geschätzt und nicht gemessen war) begleitet, was 10—45 Proz. in dem Wert des Koeffizienten η der inneren Reibung des Gletschereises entspricht.

Eine Folge des Expeditionscharakters dieser Untersuchung war geringere Genauigkeit der Ablesungen (wegen des kleinen Abstandes von Spiegel und Skala), die Schwierigkeit derselben wegen des Taues, die mehr fehlerhafte Verfertigung und Einstellung der Eiszylinder, weil ich infolge der hohen Lufttemperatur (zuweilen bis $+15^{\circ}$ C.) bei diesen Operationen eilen mußte etc. Die Abweichungen der Form der Eisstäbe von einem Zylinder waren auch durch die grobkörnige Struktur des Gletschereises verursacht.

Diese Struktur war auch, meiner Meinung nach, die Ursache eines anderen Umstandes, welcher die Möglichkeit, genaue Resultate zu ermitteln, entzogen hat. Dieser Umstand ist eine Unstetigkeit der Torsionsgeschwindigkeit bei konstantem Torsionsmoment, bei beinahe konstanter Temperatur und nach dem Aufhören der unstationären Anfangsstadien der Bewegung. So z. B. tordierte sich unter der Wirkung von 972 g der Zylinder IX etwa 2 Stunden verzögernd (bis zu $\psi' = 1 \cdot 10^{-7}$), nachher fing die Geschwindigkeit an zu wachsen und stieg in 12 Stunden auf das Drei- oder Vierfache ($\psi' = 4 \cdot 10^{-7}$). Nach einem zweiten Anhängen desselben Gewichtes wurde die Geschwindigkeit zwischen etwa 2 Stunden ungemein groß ($2 \cdot 10^{-6}$),

1) Vgl. H. Hess, „Die Gletscher“, p. 152. Braunschweig, Vieweg. 1904.

und nach 14 Stunden war dieselbe immer größer als ursprünglich ($3 \cdot 10^{-7}$).

Dieser Umstand¹⁾, welcher fast immer, wenn auch nicht in solch hervorragendem Maße, merklich war, kann dadurch erklärt sein, daß die allmähliche Deformation einzelner Körner durch relative Verschiebung jedes einzelnen Kornes, als einem Ganzen, gegen die anderen begleitet ist.

Alle diese störenden Umstände können leicht in die einzelnen Werte von η Fehler von 20—50 Proz. einbringen, welche doppelt so groß als entsprechende mögliche Fehler bei der Untersuchung des kristallinen Eises sind.

Ich kann noch bemerken, daß der Größe von η nach die kritische Geschwindigkeit der Eisströmung in einem Gletscherbette von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit sein soll und deswegen kann solche Strömung als eine wirbelfreie betrachtet werden. Diese Betrachtung²⁾ läßt aus den Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Eises in neun Querschnitten von Hintereisferner annähernd einen Wert von η gleich $(1,67 \pm 0,95) 10^{13}$ berechnen. Die Beobachtung gibt aber für dieselben mittleren Scherungswinkelgeschwindigkeiten einen zufällig äußerst naheliegenden Wert $(1,74 \pm 1,10) 10^{13}$.

4. Die Resultate der Tab. II und besonders der Tab. I (mittlere Abweichungen 16 bez. 33 Proz.) können ziemlich gut — wenn man sich erinnert, daß es sich um mehr als zehnfache Änderungen von η handelt — durch eine Formel vom Typus

$$(1) \quad \eta_{\theta, \psi'} = \eta_{0, \infty} \left(a - \frac{b}{\theta} \right)^{\theta} + \frac{c}{\psi'}$$

dargestellt sein.

Die Koeffizienten $\eta_{0, \infty}$, a , b und c konnten für die Daten der Tab. I nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, für die Daten der Tab. II nur auf graphischem Wege bestimmt werden. Die erhaltenen Werte dieser Koeffizienten gibt die Tab. III.

1) Mc Connell u. Kidd (Proc. Roy. Soc. 44. p. 331. 1888), welche Versuche über allmähliche Verlängerung der Gletschereisstäbe unter Wirkung einer konstanten Kraft angestellt hatten, klagen über die „extraordinary variability“ auch dieser Erscheinung.

2) Vgl. meinen Aufsatz in der Zeitschr. f. Gletscherkunde 2. 1907.

Tabelle III.

	η_0, ∞	a	b	c
Gletschereis	$0,38 \cdot 10^{13} \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{sec}}$	1,32	0,65	$0,8 \cdot 10^5 \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2}$
Flußeis	$0,95 \cdot 10^{13} \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{sec}}$	1,12	0,54	$5,0 \cdot 10^5 \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2}$

5. Die Formel (1) von dem Zusammenhang zwischen η und ψ' läßt sich auf eine interessante Weise durch Relaxationstheorien ableiten.

Nach der von Schwedoff (l. c.) verallgemeinerten Theorie von Maxwell (l. c.) nimmt die Kraft bei einer konstanten Deformation — um die Ideen zu präzisieren, werden wir von einfacher Scherung sprechen — nach dem Gesetze

$$(2) \quad f = N\lambda + (f_0 - N\lambda)e^{-t/T}$$

ab, wo N der Scherungsmodul ist, λ die Grenzdeformation, unter welcher das Material als vollkommen elastisch betrachtet sein kann, f_0 der Wert der Kraft für $t=0$, t die Zeit und T die sogenannte Relaxationszeit oder Relaxationsmodul. Maxwells Theorie unterscheidet sich von der Schwedoffschen durch die Annahme

$$(3) \quad \lambda = 0;$$

folglich nach Maxwell

$$(4) \quad f = f_0 e^{-t/T}.$$

Aus Formel (2) folgt, daß bei konstanter Scherungsgeschwindigkeit α' das Gesetz der Änderung der Kraft mit der Zeit ist

$$(5) \quad f = f_0 e^{-t/T} + (NT\alpha' + N\lambda)(1 - e^{-t/T})$$

und folglich bei dem endlich eintretenden stationären Zustand

$$(6) \quad \eta = NT + \frac{N\lambda}{\alpha'}.$$

In Maxwells Theorie ist die Formel (6) ersetzt durch

$$(7) \quad \eta = NT.$$

Die Beobachtungen von Schwedoff ¹⁾ über die $\frac{1}{2}$ - u. 1-proz. wässerigen Lösungen von Gelatine beweisen für diese Substanzen die Gültigkeit der Formeln (2) und (6). Zahlreiche

¹⁾ Th. Schwedoff, l. c. p. 358 und p. 46.

Beobachtungen von Reiger¹⁾ über das Verschwinden von zeitlicher Doppelbrechung in Kolophonium und Gelatine (auch mit Beimischungen) stellen sich gut durch Gleichung (4) dar, ebenso ein Teil der Versuche von De Metz²⁾ über Kopallack. Aber einige Versuchsreihen von Reiger und De Metz, welche der Maxwell'schen Annahme nicht gehorchen, lassen sich besser durch Schwedoffs Formel (2) darstellen. Die annähernde Unabhängigkeit von η von der Deformationsgeschwindigkeit, welche durch die Versuche von Obermayer³⁾ und Trouton und Andrews⁴⁾ mit Pech und von Reiger⁵⁾ mit Mischungen Kolophonium-Terpentinöl gegeben wird, ist als ein Fingerzeig für die Richtigkeit der Maxwell'schen Formel (2) anzusehen.

Meine Versuche über die innere Reibung von Flußeis (Verschiebungen senkrecht zu der optischen Achse) und von Gletschereis erlauben den Schluß zu ziehen, daß wahrscheinlich auch für diese Materialien das Schwedoffsche Gesetz gilt.⁶⁾

1) R. Reiger, Innere Reibung plastischer und fester Körper, Inaug.-Dissert. Braunschweig, Vieweg. p. 55. 1901 (auch Physik. Zeitschr. 2. p. 213. 1901).

2) G. De Metz, La double Refraction accidentelle dans les liquides. Edition „Scientia“ Nr. 26. p. 55 u. 92. Paris, Gauthier-Villars. 1905 (auch Compt. rend. 136. p. 604. 1903).

3) A. v. Obermayer, Sitzungsber. d. Wiener Akad. (2) 75. p. 673 u. 677. 1877.

4) E. Trouton u. E. Andrews, Proc. Phys. Soc. London 19. p. 53. 1904 (oder Phil. Mag. (6) 7. p. 351. 1904).

5) R. Reiger, Ann. d. Phys. 19. p. 1006. 1906.

6) Wirklich bekommen wir unter der Annahme (6) für das Torsionsmoment Fd und für den in gewöhnlicher Weise berechneten Koeffizienten der inneren Reibung η die Ausdrücke:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} Fd &= \int_0^r \left(NT + \frac{N\lambda l}{\varphi' \varrho} \right) \varphi' \cdot \frac{\varrho}{l} \cdot 2\pi \varrho \cdot \varrho d\varrho = \\ &= \frac{\pi r^4}{2l} NT\varphi' + \frac{2}{3}\pi r^3 N\lambda, \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad \eta = \frac{2Fd l}{\pi r^4 \varphi'} = NT + \frac{4l}{3r\varphi'} \cdot N\lambda = NT + \frac{8N\lambda}{9\psi'}.$$

Vergleichen wir (9) mit (1), so finden wir eine vollständige Analogie, wenn

$$(10) \quad \eta_{0, \infty} \left(a - \frac{b}{\theta} \right)^\theta = NT; \quad c = \frac{8}{9} N\lambda \text{ ist.}$$

In dieser Weise findet dieses Gesetz eine Anwendung für Körper, welche in üblicher Sprache als Flüssigkeiten bezeichnet sein müssen, und für Körper, welche als starre Körper betrachtet sein können. Für die weitere Begründung dieser Behauptung sollte man für Eis Beobachtungen machen nicht nur bei konstanter Kraft, sondern auch bei konstanter Deformation und bei konstanter Deformationsgeschwindigkeit, und auch den Scherungsmodul N und die „Elastizitätsgrenze“ λ unabhängig bestimmen. Meine Versuche geben nur die Möglichkeit, annähernd N zu verwerten und daraus T und λ zu berechnen.

5. Für die Bestimmung von N sollte man spezielle Versuche einstellen, wobei die Kraft nur während sehr kleiner

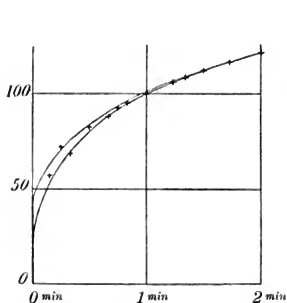


Fig. 3.

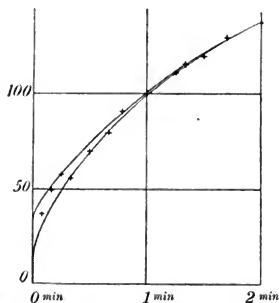


Fig. 4.

Zeitintervalle wirken könnte; annähernd kann man aber N in folgender Weise verwerten. Ich bestimmte erst diesen Modul bedingungsweise nach der Torsion, welche die Eiszyylinder nach einer Minute der Wirkung der Kraft erlitten, oder welche nach einer Minute nach Fortlassen der Kraft vorüberging. Dann verglich ich den zeitlichen Verlauf der Torsion für die erste und zweite Minute nach dem Anhängen des Gewichtes oder nach seinem Aufheben mit der Deformation nach einer Minute und nahm Mittelwerte aus allen diesen Daten. Diese Mittelwerte sind durch die Kurven der Fig. 3 (für Newaeis) und der Fig. 4 (für Gletschereis) gegeben, und nach dem Verlauf dieser Kurven kann man vermuten, daß die Anfangs-

deformation gleich $0,35 \pm 0,10$ bez. $0,27 \pm 0,10$ der Deformation nach einer Minute für das Newa- bez. Gletschereis vorausgesetzt sein kann. Folglich sind die berechneten Werte von N $1/0,35$ bez. $1/0,27$ mal so groß für Newa- und für Gletschereis. Die 14 in dieser Weise erhaltenen Werte von N für Newaeis und 43 für Gletschereis lassen sich mit mittleren Abweichungen von 14 Proz. bez. 44 Proz. durch die Formel

$$(11) \quad N = 1,0 (1 - 0,130) \cdot 10^{10} \frac{g}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2},$$

$$(12) \quad N = 0,8 (1 - 0,650) \cdot 10^{10} \frac{g}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2}$$

darstellen. Aus Gleichungen (11), (12) und Tab. III, wenn man die Gleichungen (10) berücksichtigt, bekommt man die Daten der Tab. IV, welche nur der Ordnung nach als richtig betrachtet sein können, besonders für Gletschereis.

Tabelle IV.

	Newaeis		Gletschereis	
	0°	-5°	0°	-5°
$N \cdot 10^{10} \frac{g}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2}$	1,0	1,7	0,8	3,4
$T \text{ sec}$	950	1670	480	720
$\lambda \cdot 10^{-5}$	5,6	3,4	1,0	0,3

Kleinere Werte des Scherungsmoduls, der Elastizitätsgrenze, der Relaxationszeit und des Koeffizienten der inneren Reibung, größerer Einfluß der Temperatur sind zu betrachten als ein Hinweis auf die kleinere Festigkeit der Grenzschichten zwischen den einzelnen Körnern und auf die mögliche Vereinigung der Erscheinung einer „trockenen“ inneren Reibung mit der Erscheinung der Erniedrigung der Schmelztemperatur infolge der Steigerung des Druckes und der nachfolgenden Regelation, d. h. einer „nassen“ inneren Reibung. Daß eine „trockene“ innere Reibung wohl möglich ist im kristallinen Eise, zeigt mir die allmähliche Scherung desselben in Richtungen, welche senkrecht zu der optischen Achse stehen und für welche örtliche Druckzuwächse fast ganz ausgeschlossen sind (wenn wir nicht von den Molekülen sprechen wollen), so-

wie analoge Erscheinungen, die ich letzte Zeit an Steinsalz untersuchte, welche aber wegen ihrer Langsamkeit und Kleinheit noch nicht ganz genau feststehen. Die Regulation des Eises ist für Verschiebungen, welche nicht senkrecht zu der Achse sind, unvermeidlich und, wo die Möglichkeit solcher Verschiebungen und örtlicher Druckvermehrungen größer ist, da muß der Einfluß der Temperatur auf die innere Reibung größer sein; deswegen ist, meiner Meinung nach, dieser Einfluß größer auf die innere Reibung des Gletschereises und des Flußeises, aber bei Verschiebungen parallel zur Achse¹⁾ und auch auf die Ausflußgeschwindigkeit durch Öffnungen, als auf die innere Reibung kristallinen Eises bei Verschiebungen senkrecht zur Achse.

1) B. Weinberg, „Notiz über den Einfluß der Temperatur auf die innere Reibung fester Körper“ (russ.). Ann. d. Universität Odessa 105. p. 159. 1906.

(Eingegangen 27. November 1906.)

**8. Untersuchungen
ebener Reflexionsbeugungsgitter mit Rücksicht auf
ihre Brauchbarkeit zur absoluten Messung von
Lichtwellenlängen¹⁾;
von Ernst Giesing.**

I. Einleitung und Beschreibung der Gitter.

Im Jahre 1894 gelang es Michelson mit seinem Interferometer die rote Kadmiumlinie $\lambda = 6438 \text{ \AA.-E.}$ so genau zu bestimmen, daß die Resultate der einzelnen Versuche höchstens um $0,0066 \text{ \AA.-E.}$ oder $1:1000000$ des Wertes differierten.²⁾ Relativ zu diesen absoluten Bestimmungen haben dann Ch. Fabry und A. Perot³⁾ mit derselben Methode und mit wahrscheinlich derselben Genauigkeit u. a. die Linien des Quecksilbers bestimmt; es ergaben sich die für die folgenden Versuche wichtigen Werte reduziert auf 15° C. und 760 mm Druck :

Hg {	gelb	5790,659 $\text{\AA.-E.}$
		5769,598 „
	grün	5460,7424 „
	indigo	4358,343 „

Ferner wurde von ihnen ermittelt $D_1 = 5895,932 \text{ \AA.-E.}$ für 15° oder $5895,960 \text{ \AA.-E.}$ für 20° .

Nach diesen Erfolgen hat man es, abgesehen von einer Arbeit Thaléns⁴⁾, die nach der Kritik von H. Kayser als verfehlt betrachtet werden muß⁵⁾, aufgegeben, Beugungsgitter zur absoluten Messung von Lichtwellenlängen weiter zu benutzen.

1) Auszug aus der gleich betitelten Tübinger Dissertation, erschienen bei G. Schnürren, Tübingen 1906.

2) Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures: 11. 1895; A. A. Michelson: Détermination expérimentale de la valeur du mètre en longueurs d'ondes lumineuses.

3) Ch. Fabry et A. Perot, Détermination de nouveaux points de repère dans le spectre. Compt. rend. 130. p. 492–495. 1900.

4) R. Thalén, Sur la détermination absolue des longueurs d'onde de quelques raies du spectre solaire. Nova acta Upsal. 1899.

5) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 1. p. 707.

Die Gitterresultate der Autoren seit 1886 gebe ich für die Natriumlinie D_1 zum Vergleich in der folgenden Zusammenstellung:

Beobachter	Verfertiger des Gitters	Material	Ungefähre Gitterbreite in mm	Furchenzahl	D_1 für 20° C. und 760 mm Druck in Å.-E.
Kurlbaum ¹⁾ . .	Rutherford	Metall	43	29521	5895,86
1886—1887	Rowland	„	42	23701	5895,98
Bell ²⁾	„	Glas	30	12100	5896,18
	„	„	30	8600	5896,23
1885—1887	„	Metall	100	29000	5896,15
	„	„	100	40000	5896,17
Thalén 1898 . .	„	„	51	29101	5895,976

Das Studium der Arbeiten der vorgenannten Beobachter zeigt, daß die Differenzen zwischen diesen Resultaten bedeutend größer sind, als sie nach den Beobachtungs- und Instrumentalfehlern bei Spektrometer- und Gitterbreitenmessung werden dürften. Der Grund hierfür liegt nach Kayser's Ansicht allein in der ungenügenden Bestimmung der Gitterkonstanten als: Gitterbreite dividiert durch Anzahl der Furchenintervalle ohne Berücksichtigung der zweifellosen Inkonzanz der letzteren infolge technischer Mängel. Am Ende seiner Erörterungen fühlt sich Kayser zu dem Schlusse berechtigt: „Es ist unmöglich mit Gittern die Wellenlänge bis auf 0,1 Å.-E. genau zu bestimmen.“

Die Gründe für die Inkonzanz des Abstandes zweier aufeinanderfolgender Gitterfurchen rühren zweifellos her von Fehlern der Teilmaschine, von Temperaturschwankungen während der Teilung, von einer Veränderung bez. Abnutzung des die Furchen ziehenden Diamanten, die bei einer Zahl von 29000 oder gar 40000 Furchen, wie bei Bells Gittern, sicherlich stattfinden kann, ferner bei so kleinem Furchenintervall von der Störung der gezogenen Furchen durch die neu hinzutretenden; denn bei 300 bis 700 Furchen pro Millimeter scheint

1) F. Kurlbaum, Bestimmung der Wellenlänge Fraunhoferscher Linien. Wied. Ann. 33. 1888.

2) L. Bell, On the absolute wave-length of light. American Journal of science and arts (3) 33. 1887 und (3) 35. 1888.

es unvermeidlich, daß beim Ziehen der Diamant nach der Seite der vorhergehenden Furche weniger Widerstand findet als nach der anderen Seite. Die Furche muß daher gewissermaßen den Grabenrand der vorangegangenen schädigen und wird selber auch dabei geschädigt. Endlich käme vielleicht noch eine mechanische Deformation des Gittermaterials im Laufe der Zeit in Betracht (vgl. Bell und Thalén).

Bekannt man sich zu der Ansicht Kayzers' daß alle p. 334 angegebenen Bestimmungen „ungefähr mit derselben Sorgfalt ausgeführt sind, Fehler keinem der Beobachter nachgewiesen werden können, alle sich auf die gleichen Längennormale beziehen, so drängt sich die Frage auf: Wenn man Gitter unter den günstigsten Verhältnissen teilt, d. h. vor allem, wenn man den eben genannten Fehlereinflüssen nach Möglichkeit vorbeugt, wird es dann gelingen, unter solchen Gittern eine bessere Übereinstimmung zu erzielen als bisher, und wie werden sich die ermittelten Werte zu denen von Michelson, Perot und Fabry verhalten? Und andererseits muß es von Wichtigkeit und Interesse sein, die vermutlichen Fehler eines Gitters nach Möglichkeit aufzudecken. Es wird zu zeigen sein, daß die Inkonstanz des Furchenintervalles nach der Theorie eine bestimmte Grenze nicht überschreiten darf, wenn sie nicht die Genauigkeit der Spektrometer- und Komparatormessungen illusorisch machen soll.

Von diesen Betrachtungen ausgehend habe ich auf Anregung des Hrn. Prof. Dr. F. Paschen die nachfolgenden Untersuchungen angestellt.

Es standen mir zu meinen Versuchen zwei nach Hrn. Prof. Paschens Wünschen von H. A. Rowland verfertigte Reflexionsgitter zur Verfügung. Das Material der beiden Gitter ist das auch zu den früheren Rowlandschen Reflexionsgittern benutzte Spiegelmetall; auf einer Fläche von $10,5 \text{ cm}^2$ wurde von J. A. Brashear, Allegheny, eine Kreisebene von etwa $9,5 \text{ cm}$ Durchmesser planpoliert, und auf dieser Ebene — sie war bei beiden Gittern gleich groß — teilte Rowland die Gitter mit seiner besten Teilmaschine. Beide Gitter sind im Jahre 1899 zusammen gefertigt worden, gehören also zu den letzten, die Rowland geteilt hat. Die geteilte Fläche des besseren — die Versuche berechtigen zu diesem Prädikat —,

das ich künftig mit G_1 bezeichnen werde, ist 79 mm breit und enthält 3120 Furchen, deren Höhe etwa 47 mm beträgt. Das andere Gitter, das G_{II} genannt werden soll, ist 78 mm breit und enthält 3085 Furchen von derselben Höhe wie bei G_1 . Beide Gitter haben also annähernd die gleiche Gitterkonstante. Aus diesen Angaben kann man sich sofort klar machen, daß den erwähnten wahrscheinlich bedeutendsten Fehlereinflüssen in höherem Maße vorgebeugt ist, als früher. Trotz der geringen Furchenzahl wird die Breite meiner Gitter nur von den beiden besten Bells übertroffen. Dies gewährt den Vorteil, daß wir die Gitterkonstante als: Breite dividiert durch Furchenzahl mit einer den Spektrometernmessungen entsprechenden Genauigkeit bestimmen können, und außerdem steigern wir die auflösende Kraft des Gitters, wie die Beziehung

$$r = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{b}{\lambda} \sin \delta$$

zeigt, wo r die auflösende Kraft, λ und $\lambda + d\lambda$ die beiden Lichtwellenlängen, die noch getrennt erscheinen sollen, b die Gitterbreite und δ den Beugungswinkel bedeuten. Weitere Einzelheiten und Eigenschaften der Gitter I und Gitter II werden an der Hand der jeweiligen Versuche erörtert werden.

Nach dem Vorstehenden war also meine experimentelle Aufgabe folgende: 1. Feinere Untersuchung der beiden Gitter auf ihre Fehler, und zwar einerseits auf Krümmung der Gitterfläche, andererseits auf Inkonzanz des Furchenintervalles. 2. Nochmalige absolute Bestimmung der Wellenlänge einer geeigneten Spektrallinie durch Komparator- und Spektrometermessung. (Der Zeit nach sind die letzteren Messungen vor den Fehleruntersuchungen gemacht.) Meine Versuche wurden im physikalischen Institut der Universität Tübingen in der Zeit von Dezember 1904 bis Ostern 1906 angestellt.

II. Untersuchung der Flächen der beiden Gitter auf Krümmung.

Das zuverlässigste Mittel hierzu, das eine Übersicht über die ganze Gitterfläche auf einmal gestattet, ist zweifellos die Benutzung von Interferenzfransen in der aus dem folgenden Versuche sich ergebenden Weise. Es wurde mir von der Firma C. Zeiss-Jena eine Quarzplatte von der Form eines senkrechten Kreiszylinders (Durchmesser = etwa 10 cm, Höhe = etwa

2 $\frac{1}{2}$ cm) zur Verfügung gestellt; die eine Grundfläche war garantiert eben. Diese Quarzplatte wurde mit ihrer planen Fläche auf die Fläche des Gitters so gelegt, daß sie von dieser durch drei Stahlnadeln, die gleichen Peripherieabstand voneinander hatten, getrennt war; die Stahlnadeln gestatteten, den Abstand der beiden Flächen zu ändern; eine die Flächen verzerrende Adhäsion war ausgeschlossen. Auf die Quarzplatte endlich wurde konzentrisch und direkt das sich gut eignende Fernrohrobjektiv des von mir benutzten und später zu beschreibenden Spektrometers aufgelegt; die ganze Anordnung war solide auf einem Horizont aufgebaut. Darüber wurde nun im Abstand der Objektivbrennweite ein Kreisspiegelchen von wenigen Millimetern Durchmesser ganz wenig seitlich der Objektivachse angebracht, das das Licht der benutzten Natriumflamme auf Objektiv, Quarzplatte und Gitter reflektierte; unmittelbar an dem Spiegelchen vorbei sah man die Interferenzerscheinung, die durch das Zusammenwirken der an den ebenen Flächen der Quarzplatte einerseits und des Gitters andererseits reflektierten Strahlen des Na-Lichtes zustande kam. War die Gitterfläche genau eben, so mußte es möglich sein, alle Interferenzfransen zum Verschwinden zu bringen. Dies gelang bei Gitter G_{II} bis auf eine, die dann eine Breite von etwa 1 cm hatte und annähernd parallel den Gitterfurchen lief; oben und unten war sie ein wenig gekrümmt. Das übrige Gesichtsfeld war vollkommen hell. Nach dieser Einstellung wurde die ganze Anordnung verschiedene Stunden lang zum Zwecke des Ausgleiches eventueller Temperaturdifferenzen sich selbst überlassen; die Erscheinung war aber nachher noch dieselbe wie vorher. Daraus können wir also schließen, daß *die geteilte Fläche des Gitters G_{II} keine Differenzen von mehr als $\frac{1}{2} \lambda$ des Natriumlichtes aufweist* ($\lambda = 5893 \text{ \AA.-E.}$ als Mittel der beiden Linien D_1 und D_2 angenommen).

Genau derselbe Versuch für Gitter G_I ergab folgendes: Es konnte eine Stellung erreicht werden, bei der nur ganz außen an dem linken und rechten Rand der geteilten Fläche ein dunkler Schimmer erschien, während die übrige Fläche gleichmäßig hell war; dies berechtigt zu dem Schluß, daß *die geteilte Fläche von G_I keine Differenzen von mehr als $\frac{1}{4} \lambda$ aufweist*.

Freilich wissen wir damit über die Art der Krümmung

noch wenig. Wir können sie für Gitter G_{II} als annähernd zylindrisch annehmen und zwar so, daß die Gitterfurchen parallel der Zylinderachse laufen, wie die eine Interferenzfranse erkennen läßt; für Gitter G_I können wir dasselbe nur vermuten. Nicht aber wissen wir, ob die Krümmung konkav oder konvex ist. Es ist deshalb praktisch unmöglich, eine Theorie der Krümmung von Beugungsgittern, wie sie A. Cornu¹⁾ gibt, anzuwenden. Dagegen will ich eine geometrische Betrachtung

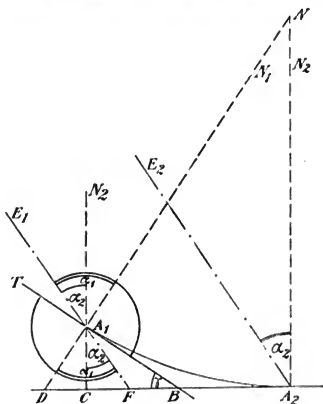


Fig. 1.

anstellen, die speziell für meine beiden Gitter den durch die Krümmung eventuell hervorgerufenen Fehler seiner Größe nach beurteilen läßt; vgl. Fig. 1. Es sei die Krümmung des Gitters kreiszylindrisch gedacht und das Stück $A_1 A_2$ (Bogen) entspreche der geteilten Fläche. Nun nehmen wir das Gitter als fehlerfrei, d. h. eben an und denken es einmal im Punkte A_1 , das andere Mal im Punkte A_2 senkrecht zum Krümmungs-

1) A. Cornu, Sur la diffraction; propriétés focales des réseaux, *Compt. rend.* 80. p. 645—649. 1875; Etudes sur les réseaux diffringents. *Anomalies focales* 116. p. 1215—1222. 1893; Sur diverses méthodes relatives à l'observation des propriétés appelées „anomalies focales“ des réseaux diffringents 116. p. 1421—1428. 1893; Vérifications numériques relatives aux propriétés focales des res. diff. plans. 117. p. 1032—1039. 1893.

radius des Konkavgitters gestellt; beide Richtungen bilden den Winkel γ . Jetzt lassen wir paralleles Licht einfallen, also $E_1 A_1 \parallel E_2 A_2$, die Lichtstrahlen bilden mit der einen Gitterstellung den Einfallswinkel $E_1 A_1 N_1 = \alpha_1$, mit der anderen den Einfallswinkel $E_2 A_2 N_2 = \alpha_2$. Wir haben dann folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \angle E_1 A_1 N_2 &= \angle F A_1 C = \alpha_2 \\ \angle E_1 A_1 B &= \angle T A_1 F = R + \alpha_1 = R + \alpha_2 + \gamma \\ \alpha_1 &= \alpha_2 + \gamma. \end{aligned}$$

Nun wenden wir die tatsächlichen Verhältnisse an; nach ihnen wird die größte Verschiedenheit auf der Gitterfläche

$$\text{für } G_I \leq \frac{\lambda}{4}, \quad \text{für } G_{II} \leq \frac{\lambda}{2}, \quad \text{also } A_1 C = \frac{\lambda}{4} \text{ bez. } = \frac{\lambda}{2}.$$

Setzen wir dann $A_1 B$ = der halben Gitterbreite, so erhalten wir

$$\text{für } G_I: \sin \gamma_I = \frac{2\lambda}{4b} = \frac{\lambda}{2b}$$

$$\text{für } G_{II}: \sin \gamma_{II} = \frac{2\lambda}{2b} = \frac{\lambda}{b}.$$

Der $\angle \gamma$ berechnet sich danach für G_I zu etwa $3/4''$, für G_{II} zu etwa $13/4''$.

Der Einfallswinkel könnte also im Höchstfall für die ganze Gitterfläche um jeweils diesen Betrag differieren. Es wird demnach wohl der Schluß berechtigt sein: beide Gitterflächen zeigen von der Ebene so geringe Abweichungen, daß sie praktisch, d. h. im Bereich der Genauigkeit der Messungen als vollkommen eben betrachtet werden können.

III. Untersuchung der beiden Gitter auf Inkonstanz des Gitterintervalles.

Praktisch aber handelt es sich darum, eine Inkonstanz des Furchenabstandes, sei sie nun durch Krümmung der Gitterfläche oder durch die p. 334 angedeuteten Mängel hervorgerufen, quantitativ nachzuweisen. Dazu ist es nötig, wenige Gitterfurchen herauszugreifen und zwar der Reihe nach über das ganze Gitter hinweg von einem Rande zum andern. Die von mir benutzte Methode hatte schon Bell im Auge,¹⁾ scheint

1) L. Bell, Americ. Journ. of science (3) 35. p. 357 ff. 1888.

aber, wie aus seinen Ausführungen hervorgeht, infolge technischer Schwierigkeiten nicht zum Ziel gelangt zu sein. Er kalibriert deshalb seine Gitter komparatorisch, ist sich aber bewußt, daß die Kalibration nur annähernd die Fehler ausgleicht. Dagegen ist es mir gelungen, bei einem Winkel von 26° unter Benutzung der Autokollimation noch von nur 40 Gitterfurchen ein Beugungsbild zu erhalten, das durch photographische Registrierung noch genügend meßbar erscheint. Die Abgrenzung von 40 Furchen geschah mit Hilfe eines Spaltes, der vor der Gitterfläche parallel zu ihr und zu den Furchen vorübergeführt wurde. Die Fehler der Gitterintervalle mußten dann, wenn der Spalt mit geeigneter Schnelligkeit bewegt wurde, dem Auge als Schwanken der Spektrallinie gegen das Fadenkreuz des Okulars erscheinen. So gibt mir meine Methode zur Aufklärung der Gitterfehler unmittelbar die Wirkung derselben auf das Beugungsbild — und das ist ja gerade das Wesentliche — und läßt mich rückwärts mit Sicherheit für jeden gewünschten engen Bereich des Gitters dessen Differenzen des Furchenabstandes ermitteln und linear berechnen; sie dürfte daher der Bells vorzuziehen sein.

Das von mir benutzte Spektrometer war dasselbe, mit dem die Messungen der Beugungswinkel ausgeführt wurden; es war nach speziellen Angaben des Hrn. Prof. Paschen von R. Fuess in Berlin-Steglitz gebaut worden; bezüglich der Einzelheiten verweise ich auf meine Dissertation. Wesentlich zu bemerken ist, daß die beiden Porroschen Mikroskope auf dem Teilkreis 1 Sek. direkt abzulesen und $\frac{1}{10}$ davon zu schätzen gestatteten. Da das ursprünglich zugehörige Fernrohr, sowie Kollimatorrohr wegen zu kleiner freier Öffnung unbrauchbar waren, so wurden sie durch ein von der Firma C. Zeiss in Jena gefertigtes Fernrohr und desgl. Kollimatorrohr aus Aluminium ersetzt. Die beiden zugehörigen Objektive war dreiteilige Apochromate, hatten eine Öffnung von etwa 70 mm und eine Brennweite von 43 cm. Das gewöhnliche Fernrohrökular konnte durch ein Spaltökular ersetzt werden, das ich zu der Mehrzahl meiner Versuche benutzt habe. Die untere Hälfte dieses Okulars ist durch den Spalt und das total reflektierende Prisma, das das Licht durch das Objektiv auf das Gitter wirft, ausgefüllt; in dem oberen Halbkreis sitzt ein Fadenkreuz.

Als Lichtquelle diente mir der im Vakuum erzeugte Quecksilberbogen; Hr. Prof. Paschen hatte mehrere vorzügliche Lampen nach dem Prinzip von Aron hergestellt, die mit 60 Volt und $4\frac{1}{2}$ Amp. außerordentlich hell brannten, und zwar ohne Kühlung ununterbrochen 20 Min. lang.

Die Anordnung für die Abgrenzung einer geringen Anzahl Furchen und für die photographische Registrierung der

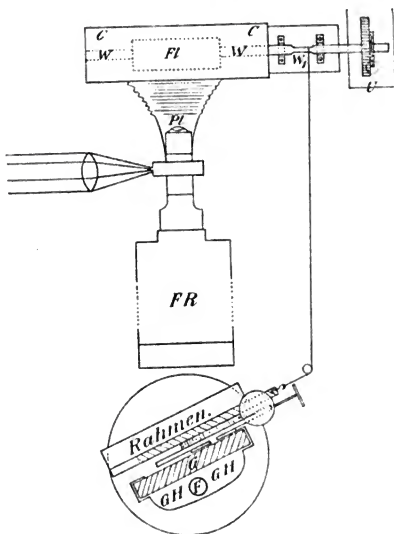


Fig. 2.

auf tretenden Schwankungen der benutzten Spektrallinie ist in Fig. 2 skizziert.

Die Justierung des photographischen Versuches geht in folgenden Etappen vor sich. Das Gitter G wird in den mit dem Spektrometertisch verschraubten Gitterhalter GH eingefügt; in diesem Gitterhalter ist mit Hilfe einer mit Quecksilber gefüllten Kapsel ein von J. Haak-Jena bezogenes

Thermometer T eingelassen, dieses reichte von 10° zu 30° C., war in Zehntelgrade geteilt und ließ wenige Hundertstelgrade mit Sicherheit schätzen. (Es wurde darauf geachtet, daß die Temperaturschwankungen während eines oft mehrere Stunden lang dauernden Versuches die Grenze von $0,1^{\circ}$ nicht überstiegen.) Nun wird das Gitter für Autokollimation justiert (vgl. Abschn. V). Der Spalt, der eine geringe Anzahl Furchen herauschneiden soll, wird diesen parallel gerichtet. Der Teilkreis wird gedreht, bis die gewünschte Ordnung der zu photographierenden Spektrallinie neben der vertikalen Marke im Okular, die das Fadenkreuz ersetzt, erscheint. Die benutzten Films reagierten auf die Linien $\lambda = 5460$ und $\lambda = 5790$ kaum, so daß ich gezwungen war, die blaue Linie $\lambda = 4358$ zu benutzen, die photographisch gut wirkte. Das Okular wird durch ein Zeissches „Planar 1:4,5“ mit Brennweite $F = 35$ mm ersetzt. Die Kamera C wird in Richtung der Achse des Fernrohres so verschoben, daß sich nachher der Film in Brennweite des Planars vorbeibewegt. Direkt vor dem Film ist durch einen schwarzen Karton alles abgeblendet bis auf einen 1,5 mm hohen horizontalen Schlitz, in dem Marke und Spektrallinie erscheinen. Der auf die Welle W gesteckte Film (engl. Fabrikat, 4 mm breit) wird in die Kamera eingesetzt, und der eigentliche Versuch kann beginnen. Er besteht prinzipiell darin, daß die durch ein improvisiertes Uhrwerk U gedrehte Welle W_1 den Spalt, dem die gewünschte Weite gegeben ist, direkt vor dem Gitter vorbeibewegt und gleichzeitig den Film, auf den die Erscheinung photographiert wird, abrollt. Am Anfang und am Schluß jedes Versuches wird das Bild des unbedeckten Gitters photographiert, am Schluß hinterher noch einmal nach Drehung des Winkels um $60''$, so daß also die Schwankungen nachher ihrem sekundlichen Betrag nach gemessen werden können. Wegen des geringen mir zur Verfügung stehenden Raumes muß ich mich hier auf diese kurze Darstellung beschränken. Eingehend findet sie sich in meiner Dissertation; vor allem habe ich dort ausführlich eventuelle äußere Fehler behandelt, die gleichfalls zu scheinbaren Schwankungen des Spektralbildes auf dem Film, die also nicht von der Inkonstanz des Furchenintervalles herrühren, Anlaß geben und böse Irrtümer hervorrufen könnten. Ich habe auch an-

gegeben, wie ich solchen Fehlern vorgebeugt habe (vor allem durch möglichste Variation der Versuche).

Die Grenze der meßbaren Sichtbarkeit war etwa 40 Furchen abgegrenzt bei einem Winkel $i = 26^\circ 1'$; dabei war aber die nötige Expositionszeit so groß, daß ich mich damit begnügen mußte, kurze Verschiebungsetappen von gleichem Abstand sukzessive aus dem Gitter herauszugreifen, während ich bei weiterem Spalt, wo eine bedeutend kürzere Expositionszeit nötig war, bequem in ein paar Stunden über das ganze Gitter wegkam.

Bei der *Ausmessung* der mit Pyrogallol entwickelten *Films* handelte es sich darum, die gleichen Verschiebungsstücken des Spaltes entsprechenden Änderungen des Abstandes zwischen Spektralbild und Marke messen zu können. Zu dem Zweck habe ich die Films senkrecht zum Bild der Marke auf einer Teilmaschine kalibriert. Zur Ausmessung stand mir ein gewöhnliches Mikroskop samt Schraubenmikrometertisch mit drehbarer Kreisplatte zur Verfügung; durch geeignete Linsenkombination war das Vergrößerungsverhältnis auf etwa 1:2,5 heruntergesetzt. Die Mikrometerschraube hatte eine Ganghöhe von 0,2 mm, sie war mit einer in 100 Teile geteilten Trommel versehen, so daß also 1 Trommelteil = 0,002 mm war, die ganzen Umdrehungen der Schraube wurden durch einen Zeiger auf einer Kreisskala angegeben. Mit Hilfe der bekannten Justierungsmethode wurde immer der kürzeste Abstand zwischen Spektrallinie und Marke gemessen. Hinterher ließen sich die Messungen graphisch darstellen: in einem rechtwinkligen Koordinatensystem wurden gleiche Stücke der Spaltverschiebung als Abszisse aufgetragen, die entsprechenden Abstände zwischen Marke und Spektrallinie gaben die zugehörigen Ordinaten, so daß die Schwankungen durch eine Kurve übersichtlich veranschaulicht waren.

Meine wichtigsten Versuche sind folgende.

A. *Sechs Etappenmessungen mit engem Spalt: 1 mm = etwa 40 Furchen für Gitter G_1 .*

$\lambda = 4358 \text{ \AA.-E.}$ 51. Ordnung links, $\nless i = 26^\circ 1'$. Jeder Etappe entspricht eine Expositionszeit von 40 Minuten und 360 Umdrehungen des kleinsten Rades des Uhrwerkes = 3,5 mm Spaltverschiebung gleich etwa 141 Furchen (also ganze Anzahl

der zur Wirkung gekommenen Furchen = $141 + 40 = 181$). Einer Umdrehung des größten Rades des Uhrwerkes entspricht eine Spaltverschiebung von etwa 9,3 mm. Zwischen je zwei Etappen liegt eine Spaltverschiebung von etwa 10 mm.

Ich begnüge mich hier damit, das Zahlenmaterial der „Etappe IV“ zur Veranschaulichung der Messungen wiederzugeben. Ich habe sämtliche Messungen wiederholt, wie Kolumne *V a* zeigt; jede Zahl dieser Kolumne bedeutet das Mittel einer dreimaligen Einstellung auf die Mitte der Spektrallinie, in Kolumne *V b* sind beide Messungen zum Mittel vereinigt. Die Bedeutung der übrigen Kolumnen ist folgende: I bedeutet die Temperatur t während der photographischen Aufnahme, II die Länge des Filmstreifens, III die auf ein Kalibrationsintervall entfallende Furchenverschiebung, IV das Kalibrationsintervall, bei dem gemessen wurde, VI *a* die größte Differenz des Abstandes zwischen Marke und Beugungsbild innerhalb einer Etappe, *b* die entsprechende Differenz in Bogensekunden, *c* die entsprechende Differenz der Gitterkonstanten c .



Fig. 3.

Nebstehend gebe ich eine Kopie der Etappe wieder, rechts ist die Marke, links die Spektrallinie; leider lassen aber die Kopien im Vergleich zu den Originalen zu wünschen übrig.

Auswertung der Differenz von 60 Bogensekunden.

Ganzes Gitter. 17. Januar 1906.

Stellung	Marke rechter Rand	Spektrallinie		Mitte	Abstand Marke gegen λ Mitte	Differenz II—I
		rechter Rand	linker Rand			
I	2,081	7,936	8,858	8,397	6,316	0,817
II = I + 60"	2,081	8,752	9,676	9,214	7,133	

Es ist für das mittlere Beugungsbild die Differenz Marke gegen Beugungsbild auf dem Film gleich 6,316 mm.

Einer Drehung des Teilkreises um 60" entspricht eine Verschiebung des Spektralbildes auf dem Film um 0,817 mm.

Die Etappenmessung.

I		II	III	IV	V		VI		
t		in			Abstand Marke rechter		Größte Differenz		
a	b	mm			Rand geg. λ Mitte in mm				
					a	b	a	b	c
20,93°				1	6,544	492	6,518		
				2	6,578	572	6,575		
				3	6,478	432	6,455		
				4	6,290	228	6,259		
20,95°				5	6,246	266	6,256		
				6	6,274	260	6,267		
	20,95°			7	6,338	340	6,339		
		15,1	8	8	6,274	260	6,267		
				9	6,280	290	6,285		
20,97°				10	6,273	309	6,291		
				11	6,353	361	6,357		
				12	6,362	350	6,356		
				13	6,354	358	6,356		
				14	6,266	268	6,267		
				15	6,199	217	6,208		
20,93°				16	6,218	232	6,225		
				17	6,217	218	6,217		

2—15 = 0,967 mm

28"

70,6 Å.-E. = 1:3600

Die nachstehenden sechs Kurven veranschaulichen in dem p. 343 angegebenen Sinne das Variieren des Furchenintervalles für alle sechs Etappen des Versuches. Die vierte Kurve von oben in Fig. 4 entspricht der in extenso mitgeteilten Etappe IV, die überall durchgezogene Gerade dem Beugungsbild des unbedeckten Gitters.

Die Genauigkeit der Ausmessungen ist, wie man sieht, wegen der Undeutlichkeit der Spektrallinie nicht gerade groß, der Fehler kann ein paar Hundertstelmillimeter gleich etwa 4 Bogensekunden betragen, wird aber im allgemeinen 2 Sek. kaum übersteigen.

Der vorstehende Versuch zeigt, daß wir es bei Abgrenzung von wenig Furchen mit sehr erheblichen Schwankungen zu tun haben, d. h. wir können von einer „Gitterkonstanten“ überhaupt nicht reden. Es ist die größte Differenz des Abstandes zwischen Marke und Spektrallinie innerhalb des ganzen Versuches: Fig. 4: vierte Kurve; 2 — erste Kurve; $14 = 53,5'' = 84,5 \text{ Å.-E. (1:3000) Differenz}$

des Furchenintervalles. Auffallend ist, daß die beiden Etappen I und II durchweg unter der Linie des Bildes des ganzen Gitters liegen; dementsprechend wäre bei diesem Rande des Gitters G_1 die Gitterkonstante durchweg zu groß. Die späteren Versuche

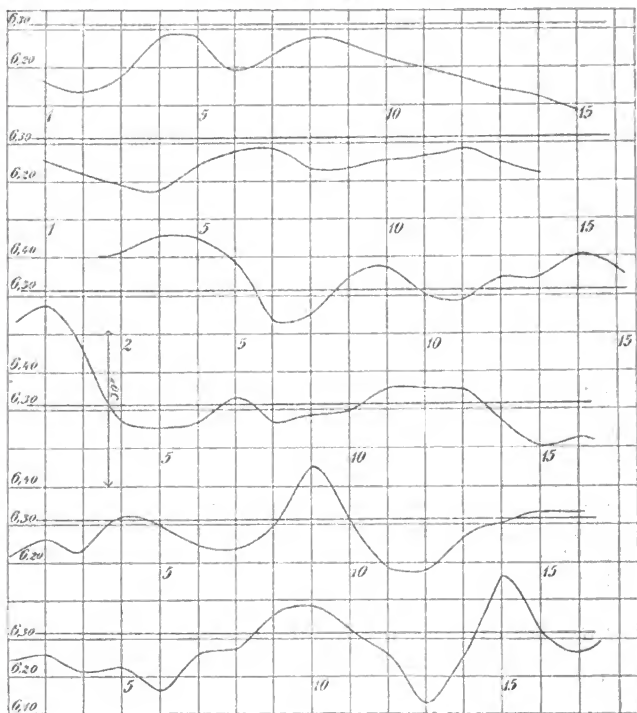


Fig. 4.

mit weiterem Spalt bestätigen diese Tatsache. Ähnliches hat übrigens Bell bei seinen erwähnten Kalibrationen gefunden.

Periodische Fehler sind nach dem vorliegenden Versuch nicht nachzuweisen; sind solche wirklich vorhanden, so sind

sie augenscheinlich durch andere Fehler der Furchen, die bald phasenverstärkend (vgl. fünfte Kurve, 9), bald abschwächend einwirken, so beeinflußt, daß sie als solche gar nicht mehr zur Geltung kommen und keine praktische Bedeutung haben. Die Theorie Rowlands für periodische Fehler der Gitterverteilung¹⁾ kann deshalb keine Anwendung finden.

Es folgte dann ein *Versuch B*, um zu ermitteln, in welchem Verhältnisse die Schwankungen bei Vermehrung der Anzahl gleichzeitig zusammenwirkender Furchen abnehmen. Benutzt wurde ein Stück aus der Mitte des Gitters G_1 bei genau derselben Stellung wie im Versuch *A*. Für ein bestimmtes Stück von etwa 25 Furchen Verschiebung — um ein beliebiges Zahlenbeispiel herauszugreifen — änderte sich die Schwankung folgendermaßen:

Zusammen- wirkende Furchen	100;	Schwankung = 0,021 mm = 1,6" = 4,0 Å.-E. Diff. von c
	80;	„ = 0,043 „ = 3,2" = 8,1 „ „ „ c
	60;	„ = 0,110 „ = 8,3" = 20,9 „ „ „ c
	40;	„ = 0,140 „ = 10,5" = 26,5 „ „ „ c

Eine Gesetzmäßigkeit zwischen diesen Zahlen ist nicht nachweisbar, kann aber auch kaum vorhanden sein, solange die Furchenintervalle sich nicht gesetzmäßig ändern.²⁾

Ich habe dann für Gitter G_{II} zwei Versuche analog *A* und *B* angestellt. Das Ergebnis war quantitativ und qualitativ wesentlich dasselbe wie für G_1 .

Damit verließ ich die Versuche mit engem Spalt, also geringer Furchenzahl. Wichtig war es dagegen und wegen der Praxis von Interesse, ob die Gitter auch noch beim Herausgreifen einer beträchtlichen Zahl von Furchen — ich habe meist 200 genommen — an verschiedenen Stellen Differenzen gegen das Spektralbild des ganz unbedeckten Gitters zeigten und von welchem Betrag. Dieser Versuch konnte wegen der geringen nötigen Expositionszeit über das ganze Gitter gemacht werden, was natürlich von Bedeutung war. Ich habe solche

1) H. A. Rowland, Gratings in theory and practice; Astronomy and Astrophysics 12. 1893.

2) Dieser und die nachfolgenden Versuche sind in meiner Inaug.-Dissertation ausführlich mit Zahlenmaterial und Kurven wiedergegeben. Ich muß mich hier darauf beschränken, die Resultate mitzuteilen.

Zusammenstellung der Versuche mit weitem Spalt über das ganze Gitter.

$$\lambda = 4358 \text{ \AA.-E.}$$

Gitter	Datum	Kennzeichen des Versuches	Breite des Gitterspaltes	GröÖte Tem- peraturdifferenz bei Aufnahmen	Stellung des Gitters	Durchmesser der Filmachse *	Ausgewertetes Gitterstück	Länge des Films	60" = mm Differenz	Lage d. Spektral- bildes bei unbe- decktem Gitter	Lage ** der Schwerlinie	GröÖte Schwan- kung			Bemerkungen
												in mm	in Sek.	Einfluß auf ϵ	
G_1	11. III. 1906	C ganzes Gitter	5 mm	0,08°	R_2 rechts 51. O. rechts $\epsilon = 26^\circ 1'$	8 mm	57,54 mm	211,8 mm	0,831	2,481	2,491	0,115	8,3"	20,9 Å.-E. (1: 12000)	
"	11. III. 1906	D g. G.	"	0,09°	R_1 rechts 51. O. links $\epsilon = 26^\circ 1'$	"	53 mm	188,3 mm	0,81	4,350	4,350	0,137	10,2"	25,8 Å.-E. (1: 9700)	Ich habe bezüglich der größten Schwan- kung von dem etwas un- sicheren Randwert abgesehen
"	19. III. 1906	E g. G.	"	0,05°	R_2 rechts 52. O. links $\epsilon = 26^\circ 34'$	4 mm	52 mm	120,5 mm	0,81	1,948	1,981	0,129	9,6"	24,2 Å.-E. (1: 10000)	
"	15. III. 1906	C_1 Gitteranfang und -ende	"	0,04°	Stellung wie C	8 mm	—	—	0,79	1,866	—	—	—	—	Kontrolliert C und be- stätigt es
"	20. III. 1906	E_1 Gitteranfang und -ende	2,5 mm	0,10°	Stellung wie E	4 mm	—	—	0,79	1,960	—	—	—	—	Kontrolliert E
G_{II}	1. III. 1906	F ganzes Gitter	5 mm	0,14°	R_2 rechts 39. O. rechts $\epsilon = 19^\circ 34'$	8 mm	55,1 mm	194,6 mm	0,86	2,934	2,956	0,145	10,1"	35,0 Å.-E. (1: 7000)	Bezüglich der größten Schwan- kung sehe ich wieder von den Ränder- werten 1,6 und 106,1 ab
"	23. III. 1906	G F. G.	3 mm	0,07°	R_1 rechts 39. O. links $\epsilon = 19^\circ 35'$	4 mm	48,6 mm	135,6 mm	0,76	3,224	3,250	0,116	9,2"	31,8 Å.-E. (1: 7800)	

* Der Achse, die den Film aufwickelt.

** Mittel aller Werte des Abstandes Marke gegen λ .

Versuche für beide Gitter in den verschiedensten Stellungen gemacht, um vor den früher als möglich geschilderten äußeren Fehlern sicher zu sein. Es war nunmehr die Spektrallinie so deutlich und scharf begrenzt, daß ich sehr wohl auf ihre Ränder einstellen konnte. Die Sicherheit der Einstellung ist somit gegen *A* und *B* bedeutend größer.

Diese Versuche sind im Original bezeichnet mit „*C*“ bis „*G*“; in der nachstehenden Tabelle sind ihre Resultate zusammengestellt. Beim Gitter *G*_{II} trat die Eigentümlichkeit auf, daß an einem Rande die Spektrallinie gespalten und sich überlagernd erschien; „*F*“ zeigt dies so stark, daß es die Messung beeinflußt.

Die Versuche ergeben, daß wir es bei beiden Gittern auch bei weitem Spalt, wo 200 Furchen zusammenwirken, noch mit merklichen Schwankungen des Beugungsbildes zu tun haben.

Weitere Erörterungen darüber werde ich zweckmäßig an die Besprechung der Resultate des nunmehr folgenden Versuches der

absoluten Messung der Lichtwellenlängen

der beiden Quecksilberlinien 5460 Å.-E. und 5791 Å.-E. anschließen.

Die sich aus der Theorie der Beugung des Lichtes ergebende Grundformel für die Bestimmung einer Lichtwellenlänge nach der Gittermethode ist

$$m\lambda = c\{\sin(\delta + i) - \sin i\}.$$

Hierin bedeutet λ die zu ermittelnde Lichtwellenlänge, *c* die Gitterkonstante, *i* den Einfallswinkel, δ den Beugungswinkel des benutzten Lichtes, *m* die Ordnung.

IV. Die Gitterkonstante.

Trotz der Ergebnisse des vorigen Abschnittes war ich zunächst auf die gebräuchliche praktische Definition: Gitterkonstante = Gitterbreite dividiert durch Anzahl der Furchenintervalle angewiesen. Zur Breitenmessung stand mir ein kleiner Zeiss'scher Komparator zur Verfügung; das auf das Gitter sehende Mikroskop vergrößerte etwa 60fach, trennte also zwei Furchen (etwa 40 auf 1 mm) sehr gut und ließ auch Einzelheiten ihrer Form erkennen. Bei geeigneter Beleuchtung

erschien die ungeteilte Gitterfläche dunkel, auf ihr hob sich jede Furche entsprechend der Form des Diamanten, der sie gezogen hatte, als ein System von vier hellen parallelen Linien ab; ihre nähere Betrachtung ließ auf Trogform schließen. Es zeigte sich, daß die Furchen von Gitter G_I bedeutend glänzender und schärfer erschienen als die von G_{II} . Bei der Größe des Gitterintervalles gelang es mit Leichtigkeit, die Furchen zu zählen; es ergaben sich

3119 Intervalle auf 79,0 mm für Gitter G_I
 und 3084 „ „ 78,2 „ „ „ G_{II} .

Im Verlauf meiner Versuche erwies sich jedoch der kleine Zeiss'sche Komparator als den großen Genauigkeitsansprüchen nicht genügend. Deshalb wurden am Schluß derselben beide Gitter an die Normaleichungskommission nach Berlin geschickt, wo ihre Breite mit den dortigen Hilfsmitteln noch einmal gemessen wurde. Der Bericht über diese Messungen, die nach bekannter Methode erfolgten, findet sich in meiner Dissertation in extenso wiedergegeben. Das Resultat der angestellten vier Messungsreihen, die je 32 Versuche umfassen, ist folgendes:

Gitter	Breite reduziert auf 17°	Abweichung vom Gesamtmittel	Größte Temperatur- differenz der ganzen Messungsreihe
G_I	79 mm + 50,1 μ	$\pm 0,5 \mu$	17,66—16,01°
G_I	+ 50,7	$\pm 0,3$	17,14—15,97
G_{II}	78 mm + 162,2	$\pm 0,4$	17,96—16,35
G_{II}	+ 163,1	$\pm 0,4$	17,58—16,41

Die N.E.C. bemerkt: „Die Unsicherheit des absoluten Betrages der Gitterbreiten ist für die Zimmertemperatur von $+17^\circ \text{C.}$ auf etwa $\pm \frac{1}{2} \mu$ anzunehmen. Wird bei einer anderen Temperatur beobachtet, so kommt zu dieser Unsicherheit noch der mögliche Fehler in der Annahme der Ausdehnung, welchen wir auf $\pm 0,5 \mu$ für 1°C. und 1 m Länge veranschlagen, hinzu.“

Als Schlußresultat ergibt sich für die Breite der Gitter,

also für den Abstand der Mitte des ersten und der Mitte des letzten Striches, senkrecht zu den Gitterstrichen gemessen:

$$G_I = 79,0504 \text{ mm bei } 17^\circ \text{ C.}$$

$$G_{II} = 78,1629 \text{ „ „ } 17^\circ \text{ C.}$$

Damit wird die *Gitterkonstante*

$$\text{für Gitter } G_I \text{ } c = 25,3447, \mu \text{ bei } 17^\circ,$$

$$\text{„ „ } G_{II} \text{ } c = 25,3446, \mu \text{ „ } 17^\circ.$$

Die Unsicherheit dieser beiden absoluten Werte dürfte nach der Annahme der N.E.C. (vgl. p. 350) für 17° C. nicht größer als $\pm 0,0002 \mu$ sein.

Den

Ausdehnungskoeffizienten ϵ meines Gittermaterials

habe ich einerseits durch Vergleichung der Gitterbreite bei verschiedenen hohen Temperaturen, andererseits nach der von Kurlbaum angegebenen Methode¹⁾ ermittelt und dabei nach den Bestimmungen von Kayser und Runge²⁾ den Brechungsexponenten der nicht trockenen Luft bei 16° und 760 mm Druck für die Wellenlänge des von mir benutzten Lichtes Hg 5460 Å.-E. als $n = 1,0002763$ zugrunde gelegt. Der Ausdehnungskoeffizient für die beiden Gitter ergab sich im Mittel als $\epsilon = 18,26 \mu$ pro 1° C. und 1 m mit einem mittleren Fehler von $\pm 0,10 \mu$.

Es sind nun die von mir verwerteten Präzisionsspektrometermessungen für G_I in den Temperaturgrenzen 15 und 19° , für G_{II} in den Grenzen 13 und 23° (einmal bei $11,5^\circ$) gemacht, die Gitterbreitenmessungen fanden für G_I zwischen $15,97$ und $17,66^\circ$, für G_{II} zwischen $16,35$ und $17,96^\circ$ statt. Es ist somit die größtmögliche Temperaturdifferenz zwischen Gitterbreiten- und Spektrometermessung rund 6° .

Nun würde aber ein Fehler des Ausdehnungskoeffizienten von $0,5 \mu$ bei einer solchen maximalen Differenz von 6° einen Fehler der Gitterkonstante von nur 3 : 1 000 000 bedingen; dieser Fehler ist aber kleiner als die durch Beobachtungsfehler hervorgerufene Unsicherheit, und wir können den Ausdehnungskoeffizienten als mit genügender Genauigkeit ermittelt betrachten.

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 33. p. 393ff. 1888.

2) H. Kayser u. C. Runge, Wied. Ann. 50. 1893; auch Berliner Akademie 1893.

V. Die Messung der Beugungswinkel.

Das von mir benutzte Spektrometer, Gitterhalter und Thermometer sind bereits in Abschnitt III geschildert.

Die schon p. 349 mitgeteilte, aus dem Huygensschen Prinzip hervorgehende Gleichung für die Bestimmung einer Lichtwellenlänge durch Gittermessungen lautet:

$$(1) \quad m\lambda = c[\sin(\delta + i) - \sin i].$$

Steht die Gitterfläche senkrecht zum einfallenden Strahl, so wird $i = 0$, und (1) geht über in

$$(2) \quad m\lambda = c \sin \delta.$$

Wenn wir die der in Gleichung (1) entsprechende Ordnung auf der anderen Seite des direkten Bildes betrachten, so können wir (1) auch schreiben:

$$m\lambda = c[\sin i + \sin(\delta - i)].$$

Bei Benutzung des Spaltokulares fallen nun einfallender und gebeugter Strahl zusammen, d. h. es wird

$$\delta = 2i.$$

Damit gibt die vorstehende Gleichung:

$$(3) \quad m\lambda = 2c \sin i.$$

Diese Stellung entspricht dem Minimum der Ablenkung.

Die beiden Beobachtungsmethoden, denen die Gleichungen (3) und (2) zugrunde liegen, sind ausschließlich von mir angewandt worden — vor allem die Spaltokularmethode. Sie erfordern beide kein Einstellen auf das direkte Bild, was bei meinen Objektiven wegen Parallaxe unmöglich war; ich habe bei meinen Messungen stets auf gleich hohe Ordnungen links und rechts eingestellt und das Winkelergebnis halbiert.

Die Justierung für die Methode des Spaltokulares war die denkbar einfachste. Fernrohrachse und Kollimatorrohrachse fielen zusammen. Nachdem die zur Justierung fast ausschließlich benutzte, für das Auge hellste grüne Quecksilberlinie (5460 Å.-E.) und der als Marke dienende Spalt keine Parallaxe mehr gegeneinander hatten, wurde mit Hilfe der beiden Schrauben des Spektrometertisches die Gitterstellung so reguliert, daß, wenn das Gitter mit Hilfe des Teilkreises gedreht wurde — bei dieser Methode stand das Fernrohr stets fest —,

die oberen (scheinbar unteren) Ränder der vorbeiwandernden Spektralbilder der verschiedenen hohen Ordnungen links wie rechts alle den oberen Rand des Spaltes berührten; damit standen die Gitterfurchen parallel zu ihrer Drehachse, d. h. zur Drehachse des Spektrometertisches. Dann wurde durch eine minimale gleichmäßige Drehung an beiden Schrauben des Spektrometertisches das Gitter um eine Idee geneigt, so daß das Spektralbild ein wenig in den Spalt hineinragte, damit er als Marke benutzt werden konnte. Damit war die Justierung beendet.

Die Justierung des Spektrometers für Benutzung des Kollimatorrohres ist wesentlich komplizierter. Die einzelnen Schritte derselben sind aber allgemein bekannt und gebräuchlich, so daß ich eine ausführliche Beschreibung für überflüssig halte. Eine solche gibt übrigens Kurlbaum¹⁾; ich habe im wesentlichen ebenso justiert.

Zunächst habe ich eine Reihe von Versuchen zur allgemeinen Orientierung mit der Anordnung für Autokollimation gemacht.

Die Formel

$$m\lambda = 2c \sin i$$

zeigt, daß hier die Spektralbilder einer bestimmten Wellenlänge verschieden hoher Ordnungen schnell aufeinander folgen müssen, wenn man berücksichtigt, daß die Gitterkonstante von der Größe 25μ ist; es wäre im idealen Fall für $\sin i = 1$ noch eine 90. Ordnung möglich ($\lambda = 5460 \text{ \AA}$ -E. zugrunde gelegt). Es zeigte sich auch bei diesen Versuchen Gitter G_I , dem Gitter G_{II} an Helligkeit der Spektralbilder überlegen. Beide Gitter wiesen Geister auf, die aber so schwach waren, daß sie die Hauptspektren nirgends störten. Es zeigten ferner beide, daß der ideale Fall, nach dem die Intensität der Spektren mit wachsender Ordnung abnehmen müßte, beim praktischen Gitter keineswegs zutrifft. Da ich nun für meine Winkelmessungen stets zwei korrespondierende Ordnungen links und rechts benutzt habe, so schieden aus der großen Zahl der vorhandenen Spektralbilder (deutlich wahrnehmbar war bei G_{II} noch etwa die 75. Ordnung, bei Gitter G_I kam ich noch über

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 33. p. 383 ff. 1888.

die 80. hinaus) nur wenige aus, die wegen ihrer gleich intensiven Bilder links wie rechts für meine Zwecke brauchbar waren. Letzteres war, abgesehen von den ersten Ordnungen, die ich wegen der zu kleinen Winkel nicht benutzt habe, der Fall bei Gitter G_1 für die folgenden Ordnungen links und rechts:

$$G_1 \left\{ \begin{array}{lllll} 20. \text{ Ordnung; Winkel } i \text{ annähernd} & = & 12^\circ 26' \\ 39. & " & " & " & = 24 \ 50 \\ 53. & " & " & " & = 34 \ 49 \\ 65. & " & " & " & = 44 \ 27 \\ 81. & " & " & " & = 60 \ 46 \end{array} \right.$$

Bei Gitter G_{II} waren es folgende Ordnungen:

$$G_{II} \left\{ \begin{array}{lllll} 22. \text{ Ordnung; Winkel } i \text{ annähernd} & = & 13^\circ 42' \\ 41. & " & " & " & = 26 \ 13 \\ 72. & " & " & " & = 50 \ 52 \end{array} \right.$$

Ich habe dann weitgehende Versuche angestellt, um zu ermitteln, ob die Spektrallinien verschieden hoher Ordnungen und verschiedener Ordnungen links und rechts eine verschiedene Einstellung erforderten; ich habe aber trotz der Empfindlichkeit des Objectives, wenn einmal die Spektrallinie in einer Ordnung sicher eingestellt war, in keiner anderen der von mir benutzten eine Parallaxe finden können, ein Beweis für die Güte der Gitter.

Bei den Versuchen mit dem Kollimatorrohr war es wegen des großen Durchmessers der beiden Rohre nicht möglich, das Fernrohr dem Kollimatorrohr auf mehr als einen Winkel von 57° zwischen beiden zu nähern. Es war also die niederste Ordnung, die zu beobachten war, die 38. Brauchbar waren die 39. bis 42. Ordnung, diese waren dafür sehr lichtstark.

Die endgültigen Messungen.

Benutzt habe ich bei diesen ausschließlich die beiden Quecksilberlinien: grün 5460 Å.-E. und gelb 5791, während ich auf die verhältnismäßig lichtschwache Linie 4358 verzichtete.

Eine Kalibration des Teilkreises habe ich nicht vorgenommen, statt dessen wurde der Teilkreis bei jeder Messungsreihe anfangs je 6mal um 60° gedreht und dann jedesmal wieder gemessen; der Erfolg dieser Versuche berechtigte mich bald, mich mit einer einmaligen Repetition um 90° zu begnügen, so daß der Einfluß der Exzentrizität ausgeglichen war.

Ich habe, wie man aus den folgenden Tabellen sieht, mich bei den Präzisionsmessungen fast ausschließlich der Methode

des Spaltokulares bedient, da diese sehr einfach, schnell und sicher zu arbeiten gestattet.

Ich lasse nunmehr das *Schema einer Präzisionsmessungsreihe* zur allgemeinen Orientierung folgen; dementsprechend sind sämtliche im folgenden verwerteten Messungen ausgeführt. Den Luftdruck habe ich an einem im großen Praktikumsaale des physikalischen Instituts, in dessen nächster Nähe mein Zimmer lag, befindlichen Gefäßbarometer abgelesen; die Skala desselben war in Millimeter geteilt, ein Nonius gestattete ein Zehntelmillimeter abzulesen. Die untereinander stehenden Sekundenablesungen in folgendem Schema, die nachher zum Mittel vereinigt sind, entsprechen je einer Einstellung auf die Spektrallinie und sind jedesmal das Mittel einer dreimaligen Einstellung des Doppelfadens auf den respektiven Skalenstrich des Teilkreises.

Gitter G_1 . Hg grün 5460. Autokollimation, 65. Ordnung.
Einmal um 90° umgelegt. (23./III. 1905.)

Teilkreis- stellung	Temp.	Druck in mm	65. Ord- nung	Ablesemikroskop I (nächst d. Fernrohr)		Ablesemikroskop II	
				Einzel- einstellungen	Mittel d. Sek.	Einzel- einstellungen	Mittel d. Sek.
Stellung I	14,76°	729,0 bei 14,2° =	links	37,1''		53,7''	
				18° 16' 37,0	37,23''	198° 13' 53,1	53,53''
				37,6		53,8	
	14,77	727,21 bei 0°	rechts	42,9		57,4	
				289 22 42,9	42,97	119 19 57,4	57,63
				43,1		58,1	
	14,78		links	38,1		54,0	
				18 16 38,4	38,25	198 13 54,4	54,25
Stellung II Teilkreis gegen I um 90° umgelegt	14,79°	729,0 bei 14,3° =	links	34,0''		54,9''	
				108° 16' 34,2	34,07''	288° 13' 55,1	55,00''
				34,0		55,0	
				40,0		57,9	
	14,79	727,20 bei 0°	rechts	19 22 39,7	89,67	209 19 57,2	57,50
				39,3		57,4	
				33,9		55,3	
	14,79		links	108 22 34,1	34,00	288 13 55,0	55,10

Es wird also:

$$\text{Stellung I: } 2i = 88^{\circ} 53' \left\{ \begin{array}{l} 54,26 \\ 55,90 \\ 55,28 \\ 56,62 \end{array} \right\} 55,51''$$

$i = 44^{\circ} 26' 57,76''$ bei $14,77^{\circ}$ und $727,21$ mm Druck,

$$\text{Stellung II: } 2i = 88^{\circ} 53' \left\{ \begin{array}{l} 54,40 \\ 57,50 \\ 54,30 \\ 57,60 \end{array} \right\} 55,96''$$

$i = 44^{\circ} 26' 57,98''$ bei $14,79^{\circ}$ und $727,20$ mm Druck.

Hierauf habe ich aus jeder dieser beiden Bestimmungen für sich die Wellenlänge λ berechnet, und das Mittel aus den beiden erhaltenen Werten nenne ich das endgültige Resultat einer Messungsreihe.

Die in den folgenden Tabellen an den Wellenlängen angebrachten Korrekturen wegen Temperatur und Luftdruck ergaben sich aus der Beziehung

$$\lambda \left(1 + 0,00000039 \frac{p}{1 + \alpha t} \right) = \text{konst.}^1),$$

wo λ eine bestimmte Wellenlänge, p den Druck in Millimetern (für das Quecksilberbarometer) und t die Temperatur bedeuten. Dementsprechend wächst λ ungefähr auf $+1^{\circ}$ um $0,95 \cdot 10^{-6} \lambda$ und auf -1 mm Druck um $0,36 \cdot 10^{-6} \lambda$.

Die Bedeutung der Kolumnen der folgenden Tabellen ist, soweit nicht direkt darüber gedruckt, folgende: II die benutzte Spektrallinie in Ä.-E., III die Methode der Spektrometermessungen, IV die Ordnung, V die Anzahl der Repetitionen, VI die Beobachtungstemperatur in Celsiusgraden, und zwar α) das Mittel, β) die größte Differenz während einer Messung, VII den Luftdruck auf 0° reduziert, VIII den Beugungswinkel i bez. δ und zwar α) das Mittel der vier Differenzen, β) die größte Differenz der Sekunden, IX die Gitterkonstante c in μ ausgedrückt und reduziert auf die Temperatur der Winkelmessung, X die Wellenlänge λ für Temperatur und Druck der

1) Es ist dies dieselbe Formel, die Kohlrausch (Prakt. Phys. 1901, IX. Aufl. p. 588) angibt; sie genügte, wie ich geprüft habe, für meine Bedürfnisse.

Winkelmessung, XI die Korrekturen für λ wegen *t*) Temperatur und *b*) Druck zur Reduktion auf 20° und 760 mm, XII λ reduziert für die einzelnen Messungen, XIII das Schlußresultat λ für jede Messungsreihe als Mittel der einzelnen Messungen, XIV die Abweichungen der einzelnen Messungen von diesem Mittel, XV die Abweichung jeder Messungsreihe vom Gesamtmittel aller Reihen, also von der definitiven unten angegebenen Wellenlänge; in XVI habe ich zur Orientierung noch den Fehlereinfluß von α) 1° C., β) 1 mm Druck und γ) 1" des Winkels i bez. δ auf die Lichtwellenlänge λ angegeben. Alle Größen von X bis XVI sind in Å.-E. ausgedrückt.

Die Vergleichsmessung in verschiedenen hohen Ordnungen für Gitter G_I ist so umfassend, wie sie es bei keinem früheren Beobachter sein konnte; sie hat vollkommen befriedigende Übereinstimmung gegeben, da alle Differenzen innerhalb der erwähnten Fehlergrenzen liegen. Dasselbe ist auch für Gitter G_{II} zu erwarten, da die Autokollimationsmessungen und die Messung mit Kollimatorrohr, bei der der Beugungswinkel etwa $2\frac{1}{2}$ mal so groß ist wie bei den ersteren, auch wieder volle Übereinstimmung geben.

Das Endergebnis der Spektromettermessungen mit Benutzung der Gitterbreitenwerte der N.E.C. ist nach den nachstehenden Tabellen für 20° C. und 760 mm Druck folgendes:

Gitter G_I .

Mittelwert für $\lambda_{\text{grün}} = 5460,78, \text{Å.-E.}$

" " $\lambda_{\text{gelb}} = 5790,71, \text{"}$

Gitter G_{II} .

Mittelwert für $\lambda_{\text{grün}} = 5460,75, \text{Å.-E.}$

" " $\lambda_{\text{gelb}} = 5790,67, \text{"}$

Das Mittel beider Gitterresultate wird somit:

$\lambda_{\text{grün}} = 5460,76,$

$\lambda_{\text{gelb}} = 5790,69.$

Die Ungenauigkeit der Resultate jedes Gitters für sich infolge von Beobachtungs- und Instrumentalfehlern (vgl. auch die Angabe der N.E.C. p. 350) dürfte für die Linie 5460 wenige Hundertstel Ångström kaum überschreiten, für die

Ergebnisse der

I Datum 1905	II	III	IV	V	VI		VII	VIII Beugungswinkel		IX Gitter- kon- stante c
					α	β		α	β	
22. III.	Hg 5460 grün	Autokolli- mation	20	2 mal um 90°	19,16° 17,71	0,06 0,00	730,37 727,53	12° 26' 31,54" 33,00	1,0° 0,3	25,3458 ₀ 51 ₃
22. III.	"	"	39	"	19,00 18,95	0,01 0,06	730,37 730,20	24 50 35,51 35,18	2,6 1,6	25,3457 ₈ 57 ₀
9. II und 10. II.	"	"	53	6 mal je um 60°	16,03 14,14 17,29 17,30 17,09 17,07	0,09 0,14 0,01 0,01 0,02 0,04	744,53 744,30 739,87 739,84 739,74 739,74	34 49 7,88 12,08 2,77 3,86 5,47 3,64	2,3 3,8 3,8 1,5 1,9 2,2	25,3443 ₄ 34 ₇ 49 ₃ 49 ₃ 48 ₃ 48 ₁
13. II.	"	"	53	"	16,05 16,18 16,20 16,22 16,22 16,22	0,12 0,04 0,01 0,04 0,04 0,03	742,18 742,01 742,10 742,08 742,31 742,22	34 49 7,62 4,81 5,91 5,57 5,63 5,81	1,1 1,3 0,5 1,5 2,5 3,5	25,3443 ₄ 44 ₀ 44 ₁ 44 ₁ 44 ₃ 44 ₃
23. III.	"	"	65	2 mal um 90°	14,77 14,79	0,02 0,00	727,21 727,20	44 26 57,76 57,98	1,2 1,6	25,3437 ₆ 37 ₇
25. III.	"	"	81	"	16,29 16,37	0,01 0,06	730,29 730,20	60 45 57,29 56,94	4,8 1,3	25,3444 ₀ 44 ₀
14. II.	5791 gelb	"	53	6 mal je um 60°	16,14 16,17 16,16 16,16 16,05 16,02	0,08 0,05 0,05 0,06 0,07 0,05	742,98 742,97 742,95 742,85 742,89 742,93	37 15 48,32 48,01 47,97 46,27 48,87 46,06	1,3 3,0 3,4 2,2 3,4 1,2	25,3443 ₀ 44 ₁ 44 ₀ 44 ₀ 43 ₁ 43 ₁

Ergebnisse der

21. II.	Hg 5460 grün	Autokolli- mation	41	2 mal um 90°	12,96° 12,98	0,09 0,04	730,36 730,65	26° 12' 50,30" 51,64	0,9° 0,9	25,3427 ₈ 27 ₀
21. II.	"	"	41	"	21,67 21,59	0,04 0,05	731,96 732,25	26 12 35,69 36,39	1,5 0,4	25,3468 ₁ 67 ₇
17. III.	"	Gitter senkr. Koll.-Rohr Spaltöffnung 0,06 mm	41	"	14,05 14,39	0,12 0,10	727,88 727,88	62 3 35,69 33,90	13,8 15,0	25,3432 ₃ 34 ₁
27. III.	"	Autokolli- mation	41	"	11,36 11,60	0,10 0,07	733,96 733,75	26 12 53,99 52,37	1,0 1,2	25,3420 ₀ 21 ₈
28. III.	"	"	41	"	22,84 22,82	0,02 0,04	734,41 734,40	26 12 32,42 32,90	1,3 2,0	25,3473 ₀ 73 ₀
22. II.	Hg 5791 gelb	"	41	"	16,13 16,11	0,04 0,01	728,93 728,83	27 55 47,38 47,23	1,2 3,3	25,3442 ₄ 42 ₄

Linie 5791 ist sie zweifellos größer, da ich mich bei ihr nur mit je einer Messungsreihe begnügt habe. Es kam mir ja dem Sinn der Arbeit entsprechend darauf an, *eine* Linie genau zu messen. Den Beobachtungs- und Teilkreisfehlern Rechnung tragend, hätte ich wohl durch Häufung der Spektrometerversuche eine Sicherheit meiner Wellenlängenergebnisse von annähernd 0,01 Å.-E. erreichen können; ich habe mich aber mit den vorstehenden Versuchen begnügt, weil es nach den Erörterungen am Anfang dieser Abhandlung ein fruchtloses Beginnen wäre, wollte man mit Gittern die Genauigkeit der Interferometerresultate von Michelson, Perot und Fabry erreichen. Vielmehr handelte es sich für mich mit Rücksicht auf die Kurlbaumschen und Bellschen Resultate um die Frage: Werden meine Resultate unter sich und mit denen von Perot und Fabry *innerhalb der durch Beobachtungs-, Teilkreis- und Komparatorfehler bedingten Grenzen übereinstimmen?* Und man sieht: Unter sich zeigen meine Gitter ähnliche Differenzen, wie die Bells; gegen den Wert für $\lambda_{\text{grün}}$ von Perot und Fabry = 5460,768 Å.-E. (20°, 760 mm Druck) haben meine Gitterresultate folgende Differenzen:

$$\begin{array}{lcl} \text{Perot und Fabry} - G_1 = -0,01, \text{ Å.-E.} \\ \text{„ „ „ } G_{11} = +0,01, \text{ „} \end{array}$$

Die Differenzen der Gitterresultate von Kurlbaum und Bell gegen Perot und Fabry für $D_1 = 5896$ Å.-E. sind:

$$\begin{array}{lcl} \text{Kurlbaum-Perot und Fabry:} & -0,10 & \text{und } +0,02 \text{ Å.-E.} \\ \text{Bell-Perot und Fabry:} & +0,22 & \text{„ } +0,27 \text{ „} \\ & +0,19 & \text{„ } +0,21 \text{ „} \end{array}$$

Es stimmen also, wie man sieht, meine Resultate mit denen von Perot und Fabry innerhalb der Genauigkeitsgrenzen durchaus befriedigend überein. Diesem Ergebnisse kommen die Gitterresultate Kurlbaums nahe. Was aber Bells Arbeit betrifft, so ist wohl zuzugeben, daß seine Versuche mit derselben Sorgfalt und überdies mit besserem Gittermaterial ausgeführt sind als die Kurlbaums; trotzdem oder gerade deshalb drängt sich nach der vorstehenden Zusammenstellung die Notwendigkeit der Annahme auf, daß Bell *ein Fehler untergelaufen ist, der nicht auf Mängel seiner Gitter, wie sie von mir in Abschnitt II und III behandelt sind, zurückgeführt werden kann.*

Es fragt sich nun, wie verhält sich die Güte meiner Resultate zu den Ergebnissen des Abschnittes III. Dabei muß man sich bewußt sein, daß die Kalibration die Wirkung des *ganzen* Gitters nur zum Teile erklärt. Denn beim *ganzen* Gitter wirken ja auch die größeren Furchenintervalle (also bis zu 0—3119 bez. 0—3084 Furchen) mit, die nicht durch die Kalibration untersucht sind. Hieraus erhellt auch, daß die in der Tabelle p. 348 angegebene „Schwerlinie“ sich mit dem Spektralbild des unbedeckten Gitters nicht zu decken braucht.

Dagegen geben meine Schwankungsversuche Anlaß zu den folgenden Betrachtungen, die von Hrn. Privatdozenten Dr. R. Gans in Tübingen herrühren, und angeschlossenen Berechnungen.

Aus der Gittertheorie ergibt sich für die Intensitätsverteilung des Beugungsfeldes folgende Beziehung¹⁾:

$$(1) \quad J_0 = J_0' \frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\mu (a+d)}{2} p}{\sin^2 \frac{\mu (a+d)}{2}}.$$

Hierin ist:

$$(2) \quad \mu = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \varphi + \sin \psi),$$

wo λ die Wellenlänge, φ den Einfallswinkel, ψ den Beugungswinkel bezeichnet. J_0' bedeutet die Lichtintensität für den Beugungswinkel Null ($\mu = 0$), wie sie bei einem Spalt sein würde; p ist die Anzahl der Furchen, a der reflektierende Teil zwischen zwei Furchen, d die Furchenbreite, also $a + d$ die Gitterkonstante.

Die Intensität als Funktion von μ betrachtet, ist ein Maximum, wenn

$$(3) \quad \frac{dJ_0}{d\mu} = 0$$

ist; dies findet statt für

$$(4) \quad \mu_0 = \frac{2\pi}{a+d} m \quad (m = 0, 1, 2 \dots).$$

m ist die Ordnung des Beugungsbildes.

1) Vgl. z. B. P. Drude, Lehrbuch der Optik 1900. p. 206.

Ist nun ein kleiner Fehler beliebiger Art an dem Gitter, so wird die Intensität des Beugungsbildes nicht mehr durch J_0 aus Gleichung (1) sich berechnen, sondern es wird

$$(5) \quad J = J_0 + J_1$$

sein, wo J_1 eine kleine zu J_0 hinzukommende Größe ist, die auch Funktion von μ ist.

Der Ort der Maxima ergibt sich jetzt aus

$$(6) \quad \frac{dJ}{d\mu} = \frac{dJ_0}{d\mu} + \frac{dJ_1}{d\mu} = 0.$$

Diese Gleichung wird nicht mehr durch μ_0 aus (4) befriedigt sein, sondern durch

$$(7) \quad \mu = \mu_0 + \delta\mu,$$

wö $\delta\mu$ den kleinen Fehler in der Lage des Beugungsbildes bedeutet. Mit (7) gibt (6) unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\delta\mu$:

$$(8) \quad \left(\frac{dJ_0}{d\mu}\right)_{\mu=\mu_0} + \left(\frac{d^2J_0}{d\mu^2}\right)_{\mu=\mu_0} \delta\mu + \left(\frac{dJ_1}{d\mu}\right)_{\mu=\mu_0} = 0.$$

Nach (3) und (4) verschwindet aber das erste Glied von (8) und wir erhalten für den Fehler in der Lage des Beugungsbildes

$$(9) \quad \delta\mu = - \left(\frac{\frac{dJ_1}{d\mu}}{\frac{d^2J_0}{d\mu^2}} \right)_{\mu=\mu_0}.$$

Wir betrachten jetzt die Amplitude. Beim fehlerlosen Gitter sei die Amplitude des Beugungsbildes in einer bestimmten Ordnung durch A_0 gegeben, wenn nur der n^{te} Teil des Gitters wirksam ist. Wirkt das ganze Gitter, also n Wellenelemente gleicher Phase, so wird die Amplitude nA_0 sein. Dementsprechend sind die Intensitäten $J_0 = A_0^2$ bez. $J_0 = n^2 A_0^2$, je nachdem der n^{te} Teil oder das ganze Gitter wirkt. Das folgt auch aus (1).

Beim fehlerhaften Gitter ist die Amplitude durch

$$(10) \quad A = A_0 + A_1$$

gegeben, falls der n^{te} Teil des Gitters wirkt; hier ist A_1 eine kleine Größe gegen A_0 . Wirkt das ganze Gitter, so ist die Amplitude

$$(11) \quad A = nA_0 + \sum A_1.$$

Hier bedeutet $\sum A_1$ die Summe der Amplituden, die durch die Fehler des ganzen Gitters hinzukommen. Die Größen A_1 werden aber, falls die Fehler nicht systematischer Natur sind¹⁾, wegen der verschiedenen Phasen der fehlerhaften Wellenelemente in Größe und Vorzeichen regellos abwechseln, so daß $\sum A_1$ von der Größenordnung von A_1 und nicht etwa von der Größenordnung $n A_1$ ist.

Die Intensität des n^{ten} Teiles des fehlerhaften Gitters ist also

$$(12) \quad A^2 = A_0^2 + 2 A A_1,$$

da wir A_1^2 vernachlässigen können.

Die Intensität des ganzen Gitters dagegen ist:

$$(13) \quad \begin{cases} J = J_0 + J_1 = (n A_0 + \sum A_1)^2 \\ \quad = n^2 A_0^2 + 2 n A_0 \sum A_1. \end{cases}$$

Also ist

$$(14) \quad J_1 = 2 n A_0 \sum A_1.$$

Der Zähler von (9) wird also der Größenordnung nach n mal so groß, wenn man statt des n^{ten} Gitterteiles das ganze Gitter wirken läßt, der Nenner dagegen wird n^2 mal so groß.

Daraus folgt, daß die Größenordnung des Fehlers in der Lage der Beugungsbilder n mal so klein wird, wenn das ganze Gitter wirkt, als wenn nur der n^{te} Teil wirkt.

Dieses Ergebnis für den Fehler ist aber nicht in Strenge richtig, da zwar A_0 und A_1 in der angegebenen Weise, dagegen die Differentialquotienten nach μ komplizierter von der ganzen Gitterbreite abhängen, und da vielleicht nicht nur die höheren Potenzen von $\delta \mu$ vernachlässigt werden dürfen. Immerhin gibt (9) verbunden mit den Amplitudenbetrachtungen ein Bild von der Größenordnung des begangenen Fehlers.

Da meine Gitter, wie p. 346f. ausgeführt ist, den Anforderungen genügen, daß keine systematischen Fehler vorhanden sind, so kann vorstehendes auf Abschnitt III unmittelbar angewandt werden. Ich gebe, wie dort, auch für das unbedeckt wirkende Gitter die Größenordnung der Abweichungen in Sekunden an (letzte Kolumne).

1) Vgl. Lord Rayleigh, Phil. Mag. (4) 47. p. 193—205. 1874; Encycl. Brit. 9. Aufl. 24. p. 438.

Gitter	Versuchs- benennung	Beugungs- winkel α	Fehlereinfluß von 1'' auf λ in Å.-E.	$n =$	Größe Abweichung von der Schwerlinie innerhalb des Versuches	Größen- ordnung der Abweichung bei ganzem Gitter
G_I	A	26° 1'	0,054	$\frac{3119}{40} = 78,0$	19,0''	0,24''
"	C ¹⁾	"	"	$\frac{3119}{200} = 15,5$	5,1	0,34
"	D	"	"	"	5,6	0,36
"	E	26° 34'	0,053	"	6,4	0,41
G_{II}	F	19 34	0,074	$\frac{3084}{200} = 15,4$	5,3	0,34
"	G	19 35	"	$\frac{3084}{120} = 25,7$	7,9	0,31

Der Fehlereinfluß auf λ wäre also nach vorstehender Tabelle im Höchstfalle

für Gitter G_I : 0,022 Å.-E.

" " G_{II} : 0,025 "

Dieses Ergebnis erklärt die Güte meiner Resultate p. 357 ff.

1) Vgl. Tabelle p. 348.

(Eingegangen 1. Dezember 1906.)

9. *Über den Durchgang Hertzscher Wellen durch Gitter; von Godfrey H. Thomson.*

(Auszug aus der Straßburger Dissertation des Verfassers.)

§ 1. Einleitung.

Die polarisierende Wirkung eines engen Drahtgitters auf eine Hertzsche Welle ist längst bekannt. Es fehlen bis jetzt aber Messungen mit solchen Gittern, so weit der Verfasser hat finden können. Professor Braun hat ihm deshalb vorgeschlagen, solche Messungen durchzuführen, mit besonderer Berücksichtigung gewisser Punkte.

Zwei theoretische Arbeiten liegen vor, eine von J. J. Thomson¹⁾ und eine weitergehende von Lamb.²⁾ In der Besprechung der Resultate werden wir letztere benutzen.

Wenn eine geradlinig-polarisierte Welle auf ein Gitter fällt, können wir sie in der Ebene des Gitters in zwei Komponenten zerlegen, die eine *parallel* zu den Drähten, die andere senkrecht dazu. Lambs Formeln zeigen, daß die senkrechte Komponente wenig geschwächt durchgeht. Nur ein kleiner Teil von ihr wird reflektiert. Dagegen wird ein großer Teil der anderen, parallelen Komponente reflektiert, und nur wenig durchgelassen. Der erste Teil der Arbeit war, eine Anzahl Gitter zu untersuchen bezüglich ihrer Durchlässigkeit, besonders für die den Drähten des Gitters parallele Komponente.

Betrachten wir nun die zwei Komponenten der Welle, die sich hinter dem Gitter nach Durchgang durch dasselbe befinden. Sie sind nach den Lambschen Formeln gegeneinander in der Phase verschoben. Sie setzen sich also nicht zu einer geradlinig-polarisierten Schwingung zusammen, sondern zu einer elliptischen. In der experimentellen Untersuchung sollte nun

1) J. J. Thomson, Recent Researches § 359, Clarendon Press, Oxford 1893.

2) H. Lamb, Proc. of the Math. Soc. 29. p. 523. 1897—98.

auch der Versuch gemacht werden, diese Phasenverschiebung zu schätzen und mit den Lambschen Werten zu vergleichen.¹⁾

Die größte Beschränkung, die uns hier begegnet, liegt in der Tatsache begründet, daß nur gedämpfte Wellen zur Verfügung stehen. Der Einfluß dieser Dämpfung zeigt sich in einer Analogie mit der Rotationsdispersion der Optik.²⁾ Auf diesen Punkt werden wir in § 5 (p. 387—388) zurückkommen.

In §§ 2 und 3 werden die Versuchsanordnungen beschrieben und die Kontrollversuche und Korrekturen besprochen; § 4 enthält die Resultate in Tafeln und Kurven, während in § 5 diese Resultate mit der Theorie verglichen werden.

§ 2. Apparat und Versuchsanordnung.

Die Anordnung bestand im wesentlichen aus einem *Sender*, einem *Empfänger*, und einem zwischen denselben befindlichen Diaphragma, vor dessen Öffnung die Gitter eingeschaltet werden konnten. Der Sender bestand aus einem *Oszillator*, der sich in

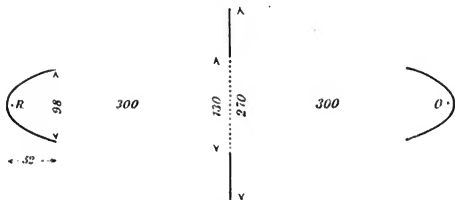


Fig. 1.

der Brennnlinie eines zylindrisch-parabolischen Hohlspiegels befand. Als Empfänger diente ein gleich großer Spiegel, in dessen Brennnlinie der Resonator justiert war. Die Öffnungen der Hohlspiegel wurden gegeneinander gerichtet in einer Entfernung, die in vielen Fällen 600 cm betrug (vgl. Fig. 1). In der Figur

1) Seit der Veröffentlichung der Dissertation des Verf. ist eine Arbeit von Schaefer und Laugwitz, „Über die bei Reflexion elektrischer Wellen an Hertzschen Gittern auftretenden Phasenverluste“ in den Ann. d. Phys. 21. p. 587. 1906 erschienen.

2) Vgl. A. Garbasso u. E. Aschkinass, Wied. Ann. 53. p. 534. 1894 und auch L. Zehnder, Wied. Ann. 53. p. 162.

ist auch das Diaphragma gezeichnet, das natürlich senkrecht steht auf der Linie OR , welche Oszillator mit Resonator verbindet. Beide Spiegel und das Gitter waren um die horizontale Linie OR als Achse drehbar.

Statt der oben beschriebenen Anordnung fand für Reflexionsmessungen die aus Fig. 2 ersichtliche Verwendung.

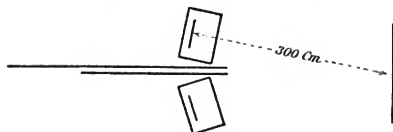


Fig. 2.

Nach diesem Überblick wollen wir nunmehr die einzelnen Teile näher besprechen und Dimensionen angeben. Das Zimmer maß $11,5 \times 10 \times 3,25$ m und die Linie OR in Fig. 1 fiel mit einer Diagonale desselben zusammen.

Die Hohlspiegel waren aus $\frac{1}{2}$ mm Zinkblech gefertigt. Die Spiegelöffnung betrug 70×100 cm. Diese und andere Dimensionen des Spiegels sind auch aus Figg. 1, 2 und 3 zu ersehen. Die Spiegel waren weiter auf Stativen so montiert, daß die (horizontale) Drehachse sich in einer Höhe von 140 cm über dem Boden befand. Die Neigung jedes Spiegels gegen die Vertikale konnte mittels eines Zeigers auf einem Halbkreis abgelesen werden. Um die vertikale und die horizontale Lage näher zu kontrollieren, waren die Spiegel mit je zwei Libellen versehen.

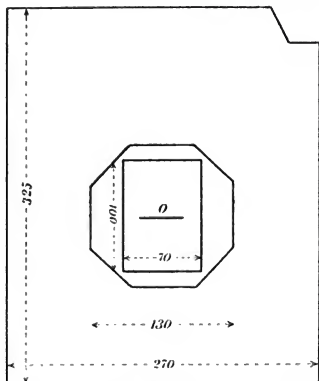


Fig. 3.

Das *Diaphragma* ist in Fig. 3 skizziert, und einige seiner Dimensionen sind auch aus Fig. 1 ersichtlich. Es bestand größtenteils aus Zinkblech, teils aber aus Stanniol, und reichte vom Boden bis zur Decke.

Mittels eines *beweglichen Blechschirmes* (2×2 m) konnte das *Diaphragma* vergrößert, oder die Öffnung desselben geschlossen werden, was bei Reflexions- und Kontrollversuchen von Wichtigkeit war.

Die *Gitter* wurden auf viereckige Holzrahmen von 140 cm Seitenlänge gespannt. Die Drahtgitter bestanden aus weichem, 0,65 mm starkem Kupferdraht, die Blechgitter aus Zinkblech (Stärke = $1\frac{1}{2}$ mm bei Gittern mit einer Streifenbreite = 7,5 cm, sonst = $\frac{1}{2}$ mm). Die bei Lösungsgittern benutzten Glasröhren hatten einen inneren Durchmesser von 0,6 cm.

Die *Oszillatoren*. Fig. 4 stellt den am meisten benutzten Oszillator dar. Er bestand aus einer 12 mm starken Messing-

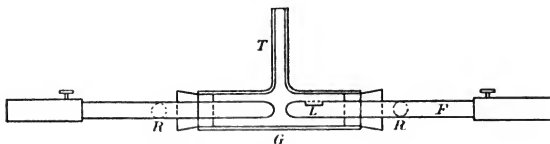


Fig. 4.

röhre mit verzinnerten Messingkugeln von demselben Durchmesser. Seine Länge betrug 37,5 cm. Andere ähnliche Oszillatoren hatten Längen von 22, 18, 11,5 cm. Es sind jedoch nur mit den Längen 37,5 cm und 18 cm ausführliche Messungen gemacht worden. Die drei kürzeren Oszillatoren waren mit Zinkkugeln versehen. In Fig. 4 sind *RR* die Righischen Zuleitungsfunken. Das Glasgefäß *G* war mit Petroleum gefüllt. Glasblasen (welche reichlich beim Durchschlagen der Funken durch das Öl entstehen), konnten durch die Röhre *T* entweichen. Wenn, wegen der Neigung, *T* zugemacht werden mußte, entwichen die Blasen durch die Öffnung *L* und die Röhre *F*. In horizontaler Lage wurde diese Röhre mit einem Kork verschlossen.

Die Messungen wurden mit Thermoelementresonatoren nach Klemenčič¹⁾ ausgeführt (vgl. Fig. 5).

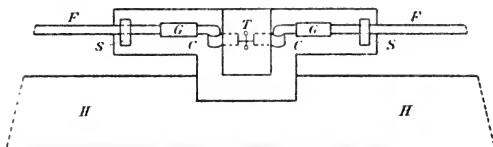


Fig. 5. Resonator B.

Für die Messungen bei großen Entfernungen diente ein *ausgepumptes Thermoelement*, von der von Dr. H. Brandes²⁾ angegebenen Form. Fig. 6 ist eine Zeichnung desselben im

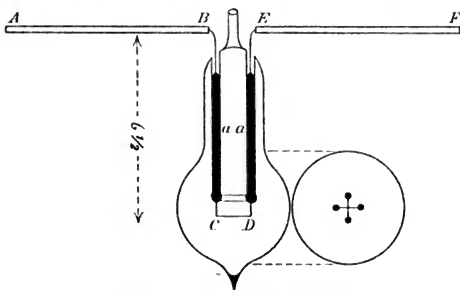


Fig. 6. Resonator C oder D.

Aufriß. Für die Messungen selbst wurde es so montiert, daß die vier mit Quecksilber gefüllten Glasröhrchen *aa* in der Fortpflanzungsrichtung der Welle lagen. In dieser Form nennen wir es *C*. Für das Aufnehmen von Resonanzkurven aber wurde, der Bequemlichkeit halber, eine andere Montierung gebraucht, worin *aa* senkrecht zu der Fortpflanzungs- und der Polarisationsrichtung der Welle waren. In dieser zweiten Form wollen wir diesen Resonator mit *D* bezeichnen. Trotz der Abweichung von der linearen Form fand Resonanz mit dem

1) J. Klemenčič, Wied. Ann. 45. p. 78. 1892.

2) H. Brandes, Physik. Zeitschr. 6. Nr. 16, p. 503.

37,5 cm langen Oszillator bei merklich derselben Länge (32 bis 33 cm) wie im Falle eines geradlinigen Resonators statt. Die hier gemeinte Länge ist *ABCDEF*.

Zur Messung des Thermostromes diente ein Dubois-Rubenssches *Galvanometer*. Einem Ausschlag von einem Skalenteil (bei Skalenabstand = 2 m) entsprach zu verschiedenen Zeiten ein Strom von $2 \cdot 10^{-8}$ bez. $5 \cdot 10^{-9}$ Amp. Sein Widerstand betrug 5 Ohm.

§ 3. Meßmethoden etc.

In diesem Paragraphen sollen die Meßmethoden beschrieben, und auch die Fehlerquellen, die Korrekturen, und die günstigsten Dimensionen des Apparates besprochen werden. Vollständige Beispiele von Messungsreihen werden am Ende gegeben.

Durchlässigkeitsmessungen. Oszillator und Resonator stehen parallel, und es ist zunächst kein Gitter eingeschaltet. Ein

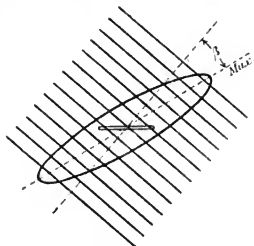


Fig. 7.

Ausschlag des Galvanometers wird notiert (nicht der erste Ausschlag, sondern die Gleichgewichtslage). Nun wird ein Gitter vor die Öffnung des Diaphragmas gestellt, und zwar so, daß die Drähte dem Oszillator und dem Resonator parallel sind. Dann wird ein zweiter Ausschlag gemessen. Das Verhältnis dieses Ausschlages zu dem ersten nennen wir die Durchlässigkeit des Gitters und bezeichnen es mit *B* (Bruchteil).

Der zweite Teil der Untersuchung bezog sich auf *Winkelmessungen*. Der Oszillator stehe zum Beispiel horizontal und die Gitterdrähte seien um 45° gegen die Oszillatorrichtung

geneigt (vgl. Fig. 7). Dann suchen wir diejenige Neigung des Resonators, bei welcher der Ausschlag ein Maximum erreicht und messen dann den Winkel β (Fig. 7).

Der Zweck der nachstehend beschriebenen Versuche war ein doppelter: 1. Fehlerquellen zu schätzen und zu zeigen, wie sie zu vermeiden, bez. als Korrekturen in Rechnung zu ziehen sind, und 2. die einwandsfreiesten Dimensionen der Anordnung zu wählen. Bezüglich des letzten Punktes können wir hier gleich die Überlegungen andeuten, die im Anfang der Untersuchungen die Wahl der zu benutzenden Wellenlänge bestimmt haben. Es hatten nämlich Orientierungsversuche gezeigt, daß die Dämpfung von kleinen Oszillatoren sehr groß war, was als eine unangenehme Beschränkung im Vergleich mit der Theorie hätte angesehen werden müssen. Da aber größere Wellen des großen Versuchsraumes wegen benutzt werden konnten, so wurden solche von 30—70 cm Länge vorgezogen. Dies erleichterte auch das Herstellen der Gitter, da es schwierig ist, dünne Drähte auf Holzrahmen nahe aneinander zu spannen, ohne daß diese nachgeben.

Diffuse Strahlung im Zimmer. Zuerst mußte untersucht werden, ob die ausgestrahlte Welle geradlinig polarisiert war. Wir lassen zu diesem Zweck den Oszillator horizontal stehen und beobachten den Ausschlag für verschiedene Neigungen des Resonators. Wenn die Welle geradlinig polarisiert ist, sollte für eine Neigung des Resonators der Ausschlag Null werden. Dies war aber nicht der Fall, sondern mit gekreuzten Leitern¹⁾ wurde immer noch ein Ausschlag beobachtet, der etwa 2 Proz. des mit parallelen Leitern gemessenen Ausschlages betrug. Solche Beobachtungen haben auch Paetzold²⁾ und Lindmann gemacht. Ersterer gibt Gründe an, die ihn zu der Ansicht geführt haben, die Störung rühre von einer gegen die Hauptkomponente um 90° phasenverschobenen Nebenkompente her, die auf der ersteren senkrecht steht. Folgende Versuche haben aber den Verfasser davon überzeugt, daß diese Erklärung bei seiner Versuchsanordnung nicht zutrifft, sondern daß eine

1) Unter „Leiter“ wollen wir nach Bjerknes zusammenfassend Oszillator und Resonator verstehen.

2) M. Paetzold, Leipziger Dissertation p. 20 und Ann. d. Phys. 19. p. 116. 1906.

diffuse, überall im Zimmer vorhandene Strahlung die Ursache der Störung sei. Erstens, wenn ein enges Gitter zwischen den gekreuzten Leitern eingeschaltet wird, hat es keinen Einfluß auf den Ausschlag, weder wenn es parallel dem Oszillator noch dem Resonator ist. Wenn die Öffnung des Diaphragmas mittels des beweglichen Schirmes zugemacht wird, verkleinert sich der Restausschlag nicht, wird aber *unabhängig von der Neigung* des Resonators gegen den Oszillator. Einhüllung der Galvanometerleitung in Messingröhren ändert auch nichts. Erst das beinahe vollständige Umhüllen des Empfängers mit Blechschirmen bewirkt eine kleine Abnahme des Ausschlages. Auf Grund dieser Versuche wurde nun der Restausschlag zukünftig einfach abgezogen von den übrigen Ausschlägen.

Die Störung rührt voraussichtlich von Schwingungen her, welche von metallischen Leitern (Drähten, Gasröhren etc.) aufgefangen und weiter geleitet werden. Ob derselben eine ausgesprochene Wellenlänge und Polarisationsrichtung beizulegen sei, bleibt unentschieden.

Von Wichtigkeit war auch der *Einfluß der Entfernung* zwischen Oszillator oder Resonator und Gitter auf die Durchlässigkeit. In den ersten Messungen war die Entfernung OR zwischen Oszillator und Resonator 300 cm. Nachher ermöglichte es der ausgepumpte Resonator, die Messungen für größere Entfernungen zu wiederholen. Besonders bei diesen großen Entfernungen war es wichtig, den Apparat sehr symmetrisch aufzustellen, sonst wurden die Messungen mit vertikalem und mit horizontalem Oszillator verschieden. Es zeigte sich dann, daß die Durchlässigkeit eines Gitters mit zunehmender Entfernung abnahm, zuerst schnell, dann langsamer. Zwischen $OR = 500$ cm und $= 850$ cm blieb sie merklich konstant (Gitter immer ungefähr in der Mitte, vgl. aber unten). Wurde die Entfernung noch mehr vergrößert, so kam der Sender- bez. Empfängerspiegel der Wand zu nahe, und die gemessene Durchlässigkeit stieg plötzlich und sehr stark, und wurde noch größer als bei kleinen Entfernungen. Die Winkel β wurden weniger beeinflußt durch diese Veränderung der Entfernung.

Die schon bei kleinen Entfernungen angestellten Messungen wurden deshalb wiederholt für eine Entfernung von $300 + 300$ cm.

Messungen für beide Entfernungen werden in § 4 gegeben. Diese Entfernung liegt in dem Gebiete, wo die Veränderung der Durchlässigkeit mit der Entfernung Null oder sehr klein ist und ist deshalb wahrscheinlich am einwandsfreiesten. Die große Durchlässigkeit bei kleinen Entfernungen ist wahrscheinlich dadurch zu erklären, daß die Welle noch nicht eben war. Denn obwohl der parabolische Spiegel ein ziemlich paralleles Strahlenbündel erzeugt, wovon man sich leicht mittels Righischer Resonatoren überzeugt, wird natürlich auch viel von dem Oszillator direkt ausgestrahlt. Es war einerlei, ob Oszillator oder Resonator sich dem Gitter zu nahe befand. Mit anderen Worten, es müssen die Ebenen, welche die Gitterdrähte sowohl mit dem Resonator wie mit dem Oszillator verbinden, einander parallel sein.

Es wäre doch möglich, daß eine Beugung um das Diaphragma oder eine Reflexion von der Wand diese Veränderung der gemessenen Durchlässigkeit mit der Entfernung durch Interferenz bewirkt. Dagegen sprechen folgende Versuche. Als das Diaphragma noch nicht vorhanden war, fand wirklich eine Beugung statt, und die Durchlässigkeits- und insbesondere die Winkelmessungen waren anders, und zwar zu klein. Bei engen Gittern war β sogar negativ, was den Eindruck einer Phasenverschiebung $\varphi > 90^\circ$ hätte geben können.

Gitter 15 hatte damals $\beta = -10^\circ$. Das Diaphragma wurde nun aufgebaut, und stückweise mit Zinkblech belegt, bis z. B. für Gitter 15 β auf $-2\frac{1}{2}^\circ$ gesunken war. Eine weitere Vergrößerung des Schirmes hatte nun keinen Einfluß mehr. Der kleine, leicht bewegbare Schirm wurde auch an verschiedene Stellen des Zimmers gebracht, aber dadurch wurde keine Veränderung der Resultate erzeugt, insbesondere auch keine Asymmetrie bei den Winkelmessungen für Neigungen gleich 45° bez. 135° .

Die Abnahme der Durchlässigkeit mit zunehmender Entfernung war verhältnismäßig größer bei engen als bei weiten Gittern. Dies kann dadurch erklärt werden, daß die Ebenen, welche benachbarte Drähte mit dem Oszillator oder Resonator verbinden, mit zunehmender Entfernung eher parallel werden, wenn der Abstand zwischen den Drähten klein ist. Eine Interferenzstörung konnte diese Tatsache aber gerade so gut erklären, so daß diese weder für die eine noch die andere Annahme spricht.

Schließlich gaben Versuche, die in einem anderen, von dem Versuchsraume sehr verschiedenen Zimmer ausgeführt wurden, immer dieselben Werte unter sonst gleichen Bedingungen.

Resonanzkurven. Im ersten Teile der Untersuchung (Entfernung zwischen Oszillator und Resonator 300 cm) war der Resonator nicht auf den Oszillator abgestimmt, sondern er besaß einfach dieselbe Länge. Nachher aber wurden Resonanzkurven aufgenommen für die verschiedenen Oszillatoren, und darauf hin wurden abgestimmte Resonatoren verwendet. Da aber der Unterschied in den Messungen sehr klein war, wurde von einer Wiederholung der schon gemachten Beobachtungen Abstand genommen.

Die Resonanzkurven wurden mittels des linearen Resonators *B* (p. 369 und Fig. 5) oder des ausgepumpten Resonators *D* (p. 369 und Fig. 6) aufgenommen. Die mit *B* im Februar 1906 aufgenommenen Kurven sind in Fig. 8 gegeben, und zwar für Oszillatoren gleich 37,5 cm, 22 cm und 18 cm. Die Entfernung zwischen Oszillator und Resonator war in diesen drei Fällen 300 cm. Die Entfernung hatte aber keinen Einfluß auf die Resonanzkurven. Zum Beispiel, eine (hier nicht gegebene) Resonanzkurve für Oszillator gleich 37,5 cm und Entfernung 750 cm, die mit dem ausgepumpten Resonator *D* drei Monate später, im Mai, aufgenommen wurde, zeigte auch ein Maximum bei 33 cm, in Übereinstimmung mit der entsprechenden Kurve in Fig. 8. Deshalb wurden die späteren Versuche mit einem Resonator von der Länge 33 cm gemacht. Glücklicherweise wurde während der Versuche die Funkenlänge im Oszillator selten berührt, und ihre Länge konstant erhalten, obwohl nur nach Augenmaß; denn es zeigte sich nachher, daß eine *Veränderung der Funkenlänge* eine starke Beeinflussung auf die Resonanzkurve ausübte. Dies zeigt Figur 9, wo Kurven für $0 = 37,5$ cm und für verschiedene Funkenlängen gezeichnet sind. Für möglichst kurze Funkenlänge ist der Ausschlag kräftig und sehr regelmäßig, so daß eine Genauigkeit von 1 Proz. erreicht werden kann. Mit zunehmender Funkenlänge nimmt der Ausschlag erst ein wenig zu, dann schnell ab. Er wird gleichzeitig viel unregelmäßiger, so daß die letzte Kurve (F.-L. = 2 mm) nur ein Zickzack ist. Das Maximum ist bei kurzer Funkenlänge sehr ausgesprochen. *Es bewegt sich nach*

der Seite der kleineren Wellen mit zunehmender Funkenlänge. Die nachher beschriebenen Messungen wurden in dem Gebiete der Kurve 3 gemacht (Fig. 9). Da der Verfasser damals nicht wußte, daß eine konstante Funkenlänge so wichtig war, hat er sie nur nach Augenmaß eingestellt, doch nur etwa alle drei

Fig. 8 links. Resonanzkurven mit verschiedenen Oszillatoren.
Längen = 37,5 cm, 22 cm und 18 cm.

Fig. 9 rechts. Abhängigkeit der Resonanzkurven von der Funkenlänge (F.L.).
Oszillatorlänge 37,5 cm.

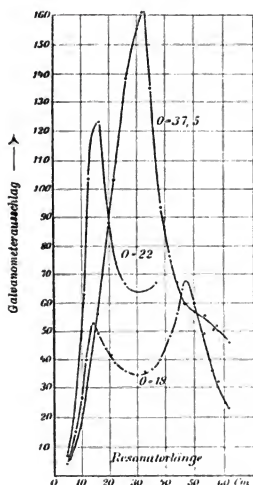


Fig. 8.

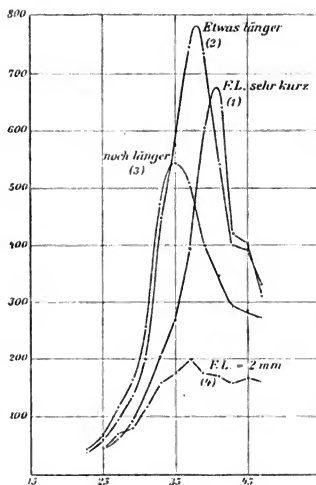


Fig. 9.

Wochen. Schon die oben erwähnte Tatsache, daß Resonanzkurven im Februar und im Mai dasselbe Maximum gaben, zeigt, daß die Funkenlänge genügend konstant war. Die erhöhte Genauigkeit, die mit möglichst kurzen Funkenstrecken zu erreichen ist, würde aber deren Gebrauch in zukünftigen Untersuchungen empfehlenswert sein lassen.

Länge der Gitterdrähte etc. Die Länge der Drähte, aus denen die Gitter bestehen, ist in der zitierten Lambschen Arbeit als unendlich angenommen. Kontrollversuche (vgl. Dissertation) zeigten, daß die Länge in diesen Versuchen genügend groß war.

Bruchteilmessungen. Nähere Beschreibung der Methode. Oszillator und Resonator werden horizontal gestellt, und ein Ausschlag wird notiert. Dann wird ein Gitter eingeschaltet mit horizontalen Drähten und ein zweiter Ausschlag gemessen. Dies wird 4 oder 8 mal wiederholt. Dann wird der Restausschlag mit gekreuzten Leitern gemessen, oft sogar zwischen je zwei Ausschlägen. Er wird von allen Ausschlägen abgezogen, bevor das Verhältnis der Ausschläge (B) berechnet wird. Alles wird nun wiederholt mit vertikalen Leitern und Gitterdrähten. Ein Beispiel folgt.

Gitter Nr. 21. 14. Mai 1906.

Abstand = 11,2 cm. Drahtdurchmesser = 0,065 cm.

Oszillatorlänge 37,5 cm. Resonatorlänge 33 cm.

Entfernung: Oszillator bis Gitter 300 cm, Gitter bis Resonator 300 cm.

Oszillator horizontal. Restausschlag = $2\frac{1}{2}$ Skt.

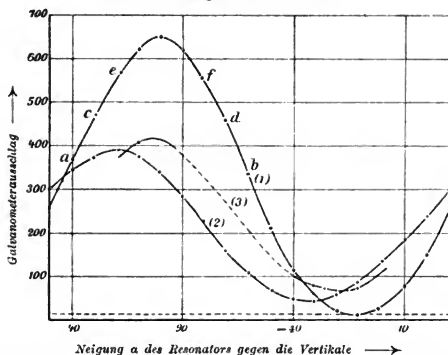
Ausschlag ohne Gitter	Ausschlag mit Gitter	Durch- lässigkeit B
356	116	$(116 - 2\frac{1}{2}) : (356 - 2\frac{1}{2}) = 0,32$
346 $\frac{1}{2}$	122	0,35
357 $\frac{1}{2}$	125 $\frac{1}{2}$	0,35
368	128 $\frac{1}{2}$	0,34

Oszillator vertikal. Restausschlag = 3 Skt.

Ausschlag ohne Gitter	Ausschlag mit Gitter	Durch- lässigkeit B
355	105	0,29
335	105	0,31
320	110	0,33
320	108	0,33

Die Winkelmessungen. Wir haben den Winkel β schon definiert (vgl. Fig. 7). Wenn wir die Ausschläge für verschiedene Neigungen α des Resonators messen und diese als Kurve auftragen, sollten wir eine $\cos^2 \alpha$ Kurve erhalten, falls

die Welle hinter dem Gitter noch geradlinig polarisiert bleibt. In Fig. 10 sind zwei solche Kurven gegeben und eine dritte angedeutet. Kurve (1) ist tatsächlich sehr annähernd eine $\cos^2$ Kurve und berührt die Linie $y = \text{Restausschlag}$; d. h. sie würde durch Null gehen, wenn der Rest nicht vorhanden wäre, Kurven (2) und (3) dagegen haben nur ein Minimum, gehen nicht durch Null. Kurve (1) wurde mit einem Gitter aus starker Kupfervitriollösung aufgenommen, Kurve (2) mit Drahtgitter Nr. 22, Kurve 3 mit Drahtgitter Nr. 7 a.



Die horizontale gestrichelte Linie gibt den Restausschlag für Kurve (1) an. Er war für (2) und (3) etwas kleiner.

Fig. 10.

Auf der x -Achse sind die Ablesungen α des mit dem Resonator sich drehenden Zeigers abgetragen. β ist die Differenz zwischen 45° und α für maximalen Ausschlag.

Die Welle ist also hinter einem Drahtgitter nicht mehr geradlinig polarisiert. Hinter allen untersuchten Lösungsgittern blieb sie geradlinig polarisiert. Allerdings war die Durchlässigkeit der Lösungsgitter eine ziemlich große (vgl. p. 385 unten). Vielleicht hätten wir bei stärkeren Lösungen oder engeren Gittern auch hier eine Abweichung von der geradlinigen Form finden können. Die Blechgitter gaben keine geradlinig polarisierte Welle.

Wir könnten diese Distortion der Welle in zweierlei Weise erklären. Entweder könnte eine *Phasenverschiebung* zwischen

den zwei Wellenkomponenten die Ursache sein, oder die Erklärung in der Tatsache liegen, daß die ursprüngliche Welle gedämpft ist. Denn eine gedämpfte Welle enthält alle Wellenlängen.¹⁾ Diese Wellen werden im Durchgang durch das Gitter verschieden gedreht. Jede Elementarwelle könnte geradlinig bleiben, aber die Kurve von Fig. 10 würde doch nirgends durch Null gehen. Welche von diesen Erklärungen zutrifft, werden wir in § 5 besprechen.

Messung von β selbst. Um den Winkel β zu messen, ist es nicht nötig die ganze Kurve zu bestimmen. Es genügt, wenn wir die Punkte *abcdef* haben, da die Erfahrung zeigt, daß die Kurven symmetrisch sind. Dann brauchen wir nur zwei oder drei Abszissen zu halbieren. Das Aufnehmen der Punkte in dieser Aufeinanderfolge verkleinert auch solche Fehler, die von einer langsamen Veränderung der Wellenintensität herrühren. Um Fehler, die von einer Asymmetrie des Apparates herrühren könnten, möglichst unschädlich zu machen,

wurden die Messungen nach folgendem Schema gemacht.

Oszillator	Gitterneigung
Horizontal	45°
„	135
Vertikal	45
„	135

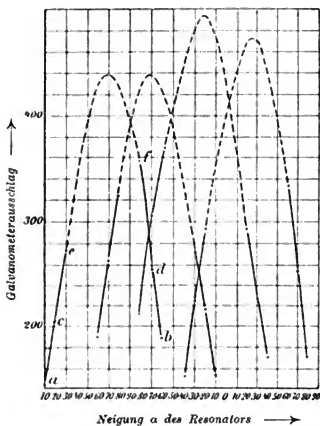


Fig. 11. $\pm \beta = \alpha_{\max} - 45^\circ$.

Anfangs wurde Maximum und Minimum gemessen. Später wurden *abcdef* aber gerade in der Mitte gewählt und dann kann die Messung entweder als Bestimmung des Maximums oder des Minimums aufgefaßt werden. Wir geben wieder ein Beispiel.

1) Vgl. z. B. A. Garbasso, Atti di Torino 30. 1894, sulla luce bianca oder E. v. Lommel, Wied. Ann. 25. p. 650. 1885.

Gitter Nr. 24. 15. Mai 1906.

Abstand = 22,5 cm. Breite der Blechstreifen 7,5 cm.

Oszillatorlänge 37,5 cm. Resonatorlänge 33 cm.

Entfernung: Oszillator bis Gitter 300 cm, Gitter bis Resonator 300 cm.

<i>Oszillator horizontal.</i>	Streifen um	45°	$\beta = 24^\circ$
"	"	135	24
<i>Oszillator vertikal.</i>	"	45	23
"	"	135	21

Die Kurven für dieses Beispiel sind in Fig. 11 gezeichnet.

Reflexionsmessungen. Die reflektierten Bruchteile wurden in folgender Weise gemessen, oder vielmehr geschätzt, denn hier waren Störungen vorhanden, die bei Durchlässigkeitsmessungen vermieden werden konnten. Ein sehr enges Gitter (Nr. 20, aus Kupferdraht, Drahtdurchmesser = 0,065 cm, Abstand = 0,085 cm) wurde als vollkommener Reflektor angenommen. Messungen wurden gemacht in der in Fig. 2 skizzierten Anordnung, abwechselnd mit Nr. 20 und mit dem zu untersuchenden Gitter. (Noch besser wie Nr. 20 würde ein 140×140 cm Blechschirm sein.) Wenn aber überhaupt kein Gitter in situ war, war doch ein Ausschlag im Galvanometer zu beobachten, etwa 6—8 Proz. des mit Nr. 20 gemessenen Ausschlages, und zwar *nicht* unabhängig von der Neigung. Die störende Welle war also polarisiert. Einen Teil der Störung wird wohl der diffuse Rest herbeiführen, aber etwas wird übrig bleiben. Die Welle, die diesen Ausschlag erzeugt, wird nun mit der direkt reflektierten Welle interferieren, und zwar anders mit verschiedenen Gittern; denn die Phase der reflektierten Welle hängt von der Beschaffenheit des Gitters ab. Diese Störung wurde überhaupt vernachlässigt. Die Reflexionsversuche sind also, wie gesagt, mehr als Schätzungen anzusehen.

§ 4.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Resultate in Form von Tafeln und Kurven geben. Die gestrichelten Kurven sind nach der Abhandlung von Lamb berechnet, mit der Annahme λ gleich der doppelten Oszillatorlänge. Erst in § 5 wollen wir die Resultate besprechen und daraus Schlüsse ziehen.

Gitternummer	Breite oder Durchmesser	Abstand zwischen Drähten Streifen	Entfernung $O R = 300$ cm				$O R = 600$ cm			
			Oszillator 37,5 Resonator 37,5		Oszillator 37,5 Resonator 18		Oszillator 18 Resonator 18		Oszillator 37,5 Resonator 33	
20	0,065	0,085	B	β	B	β	B	β	B	β
15	"	0,18		$-\frac{21}{2}^{\circ}$	0,08	$\frac{1}{2}^{\circ}$	0,10	$\frac{21}{2}^{\circ}$	0,05	8°
12a	"	2,25		$-\frac{2}{2}$	0,22	$\frac{1}{2}^{\circ}$	0,31	15	0,08	$10\frac{1}{2}^{\circ}$
9a	"	3,75		$5\frac{1}{2}$	0,29	$\frac{9}{2}^{\circ}$	0,46	22		$11\frac{1}{2}^{\circ}$
22	"	4,6		0,24	0,40	$14\frac{1}{2}$	0,32	32		
30	"	5,7		0,34	0,62	22	39			
7a	"	7,5		0,47		$33\frac{1}{2}$				
21	"	9,2		23		0,70				
19	"	11,4		$37\frac{1}{2}$						
18	"	15		$40\frac{1}{2}$	0,90	$43\frac{1}{2}$				
29	0,5	7,5	0,27	10°						12°
4	1,5	"	0,16	4					0,09,5	$71\frac{1}{2}^{\circ}$
26	3,75	11,25	0,22	8					0,18	18
27	"	15	0,39	$19\frac{1}{2}$					0,33	25
28	"	18,75	0,52	30						
25	7,5	0,5	0,04	$-\frac{29}{4}$					0,01	
3	"	7,5	0,29	9					0,13	$71\frac{1}{2}$
23	"	15	0,52	27					0,34	23
24	"	22,5								

Für Erklärung des Zeichens B vgl. p. 370 und 376, β vgl. p. 370 und 378 und Fig. 7.

0,75
0,91

Oszillator 37,5 Resonator 33
Reflektierter Bruch

Oszillator u. Resonator 37,5
Durchgehender Bruch
senkrecht zu den Streifen

Gitter aus CuSO_4 -Lösung. Innerer Durchmesser 0,6 cm. Abstand 3,85 cm.
Oszillator 37,5 cm. Resonator 33 cm.

Nr.	Leitfähigkeit	B	β	Reflektiert
11 a	0,029	0,40	33°	0,15
11 b	0,024	0,47	35	0,15
11 c	0,020	0,55	37	0,13
11 d	0,0087	0,74	41	0,12
11 e	(Wasser) < 0,00004	0,95	44	0,12
Gerüst allein				0,06

Drahtgitter.

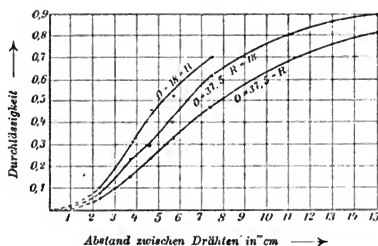


Fig. 12. Durchlässigkeit für verschiedene Oszillatorlängen (O) und Resonatorlängen (R).

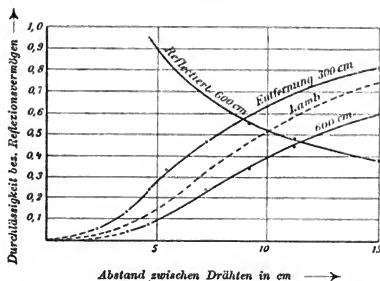
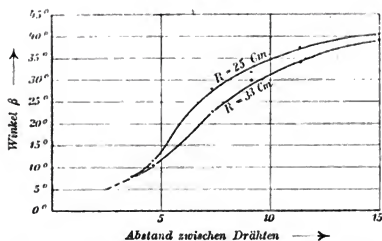


Fig. 13. Veränderung der Durchlässigkeit mit der Entfernung.

Bemerkung: Reflexionsvermögen + Durchlässigkeit = 1. Vgl. Fig. 15.

Drahtgitter.

Fig. 14. Entfernung 600 cm. $O = 37,5 \text{ cm}$.

Lösungsgitter.

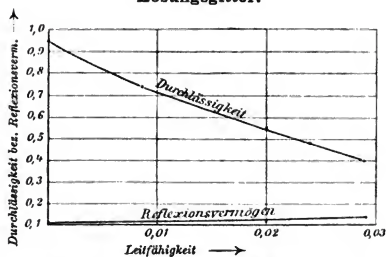
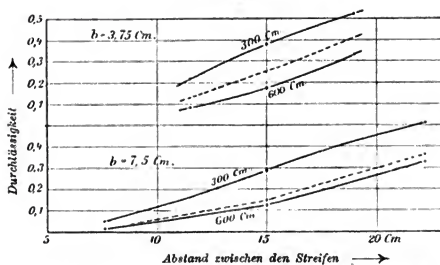


Fig. 15. Reflexionsvermögen + Durchlässigkeit < 1. Vgl. Fig. 13.

Blechgitter.

Fig. 16. Veränderung der Durchlässigkeit mit dem Abstand zwischen den Streifen. b = Streifenbreite.

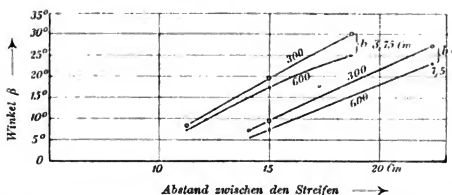


Fig. 17. Beziehung zwischen dem Winkel β und dem Abstand der Streifen.

Die Entfernung zwischen Oszillator und Resonator ist bei jeder Kurve angegeben.

§ 5. Diskussion der Resultate.

Wir wollen nunmehr die beobachteten Resultate besprechen und mit den Formeln von Lamb vergleichen. Letztere lauten:

$$B = \frac{k^2 c^2}{1 + k^2 c^2} = \text{durchgehender Bruchteil, wenn Drähte und Oszillator parallel sind,}$$

wo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \text{Wellenlänge,}$$

$$c = \frac{a}{\pi} \log \frac{a}{2\pi b}, \quad \text{wenn } b/a \text{ klein, } 2b = \text{Drahtdurchmesser,}$$

oder

$$c = \frac{a+b}{\pi} \log \sec \frac{\pi a}{2(a+b)} \quad \text{für Streifen von Breite } b,$$

a = Abstand zweier Drähte, bez. Streifen,

$a + b$ = Gitterperiode für Blechgitter,

a = „ „ „ Drahtgitter.

Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Formel ist: eine ungedämpfte Sinuswelle, deren Länge λ sehr groß ist gegen $a + b$ und sehr klein gegen die großen Dimensionen des Gitters. Da diese Voraussetzungen hier nicht erfüllt sind, ist es nicht zu erwarten, daß eine vollständige Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie stattfindet. In den Kurven von § 4 bedeuten die gestrichelten Kurven die Lambschen Werte,

berechnet für Wellenlänge gleich doppelter Oszillatorlänge. Wir haben in § 3 schon die Tatsache besprochen, daß die Werte bei Entfernung = 300 cm zu groß sind. Die einwandsfreiesten Beobachtungen, nämlich diejenigen, welche bei Entfernungen von 600 cm gemacht wurden, sind zu klein (vgl. Fig. 13 und 16 auf p. 381 und 382).

Phasenverschiebung aus der Lambschen Arbeit. Bei Lamb ist der Koeffizient der durchgehenden Welle, falls die Schwingungsrichtung parallel den Drähten liegt,

$$\frac{ikc}{1 + ikc}.$$

Dies läßt sich in die Form $u + iv$ bringen und dann ist die Phasenverschiebung, welche die Welle erleidet

$$\varphi = \arctg \frac{v}{u} = \arctg \frac{1}{kc}.$$

In unseren Gittern ging in allen Fällen die Welle, deren Schwingungsrichtung senkrecht zu den Drähten ist, ungeschwächt hindurch (abgesehen von Gittern Nr. 3 und 25, die absichtlich dafür gebaut wurden). Dann gibt obige Formel die Phasenverschiebung zwischen den Wellenkomponenten für eine beliebige Schwingungsrichtung. φ variiert zwischen 0° für kleine Wellen oder weite Gitter, und 90° für lange Wellen oder enge Gitter, und kann aus den Gitterdimensionen berechnet werden, sobald die Wellenlänge bekannt ist.

Andererseits, ohne Hilfe der Lambschen Formeln, aber wieder mit der Annahme einer ungedämpften Schwingung, können wir folgende Formeln leicht ableiten. Es seien hinter dem Gitter die zwei Wellenkomponenten

$a \sin \mu t$ senkrecht zu den Drähten,

$b \sin(\mu t + \varphi)$ parallel „ „ „ .

Dann ist

$$\frac{b^2}{a^2} = B,$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \cos \varphi \sqrt{B}}{1 - B},$$

$$\frac{n^2}{m^2} = \frac{\sin^2 \beta + B \cos^2 \beta - \sqrt{B} \sin 2\beta \cos \varphi}{\cos^2 \beta + B \sin^2 \beta + \sqrt{B} \sin 2\beta \cos \varphi},$$

wo n und m die zwei Hauptachsen der Ellipse sind. Die letzten zwei Gleichungen enthalten β , B , φ und n^2/m^2 , so daß wir aus irgend zwei dieser Größen die anderen zwei berechnen können. β und B kennen wir für alle Gitter, n^2/m^2 (was eine kleine Größe ist, für die meisten Gitter) haben wir für zwei günstige Fälle aus Fig. 10 p. 377. Da ist

für Gitter Nr. 7a	$n^2/m^2 = 0,13$
„ „ „ 22	„ = 0,083

Die nachstehende Tafel p. 386 enthält unter I die Beobachtungen, unter II die aus denselben berechneten Phasenverschiebungen und Durchlässigkeiten, wenn eine einzige Welle angenommen wird. Unter III stehen die nach Lamb für eine Wellenlänge gleich doppelter Oszillatorlänge ausgerechneten Werte. Wäre unsere Welle tatsächlich ungedämpft, so müßten alle Werte miteinander und mit dem Lambschen Werte übereinstimmen.

Für die Lösungsgitter ergibt sich für φ der Wert 0° . Die Zahlen sind:

Leitfähigkeit	B	$\operatorname{tg}^2 \beta$	
0,029	0,40	0,42	
0,024	0,47	0,49	also annähernd
0,020	0,55	0,57	$\operatorname{tg}^2 \beta = B$
0,0087	0,74	0,75	
< 0,00004	0,95	0,92	

Drahtgitter mit $B \cong 0,40$ geben aber nach unseren Messungen auch $\varphi = 0^\circ$.

Wir sehen also, daß die Übereinstimmung *nicht* eine quantitative ist, woraus wir schließen, daß die Dämpfung der Welle nicht vernachlässigt werden darf. Wie diese Dämpfung zu dieser Störung Anlaß gibt, ist schon angedeutet worden. Wir können die gedämpfte Welle ja als Spektrum auffassen (natürlich mit einer ganz bestimmten, von der Dämpfung abhängigen Energieverteilung).¹⁾ Die kleineren Elementarwellen dieses Spektrums gehen besser durch, werden also weniger

1) Vgl. Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. 20. p. 357. 1906.

Nr.	Breite Durch- messer	Abstand	I		II				III
			Gemessen		Berechnet aus Beobachtungen		Berechnet nach Lamb aus den Dimensionen der Gitter mit der Annahme $\lambda = 75 \text{ cm}$		
			B	β	$\frac{n^2}{m^2}$	B aus β und $\frac{n^2}{m^2}$	φ aus β und $\frac{n^2}{m^2}$	$\frac{n^2}{m^2}$ aus B und $\frac{n^2}{m^2}$	B
9a	0,065	3,75	0,05	8°			52°		0,08
22	"	4,6	0,08	$10\frac{1}{2}^\circ$	0,085	0,11	$60\frac{1}{2}^\circ$	51	0,18
7a	"	7,5	0,25	$22\frac{1}{2}^\circ$	0,13	0,30	$49\frac{1}{2}^\circ$	39	0,34
21	"	9,2	0,33	30				58	0,47
19	"	11,4	0,45	34			0		0,60
18	"	15	0,60	39			$\cos \varphi = 1,2$		0,75
26	3,75	11,25	0,095	$7\frac{1}{2}^\circ$			67°		0,13
27	"	15	0,18	18			45		0,26
28	"	18,75	0,33	25			45		0,40
23	7,5	15	0,13	$7\frac{1}{2}^\circ$			70		0,15
24	"	22,5	0,34	23			54		0,37

Wo $\varphi = 0$ ist, ist $\lg^2 \beta = B$
 In anderen Fällen ist $\lg^2 \beta < B$

gedreht, während die längeren stärker gedreht werden. Dies kann durch einen Versuch konstatiert werden, indem man Messungen mit verschiedenen Resonatorlängen ausführt. Solche sind in der Tafel gegeben. In der Tat wird die Durchlässigkeit bez. der Winkel β größer für einen kürzeren Resonator (doch wählt ein Resonator nicht *eine* bestimmte Wellenlänge aus dem Spektrum, sonst wäre in der Tafel p. 386 trotz der Dämpfung des Senders Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Werten; vgl. p. 388). Diese Messungen waren leichter auszuführen bei der kleineren Entfernung; denn bei der großen Entfernung muß der ausgepumpte Resonator *C* gebraucht werden, und dann sind schon 14 cm der Resonatorlänge innerhalb des Gefäßes und in der Fortpflanzungsrichtung, so daß Messungen mit sehr verschiedenen Längen nicht gut ausführbar sind. Deshalb sind die 600 cm Messungen in dieser Beziehung nicht so gut, geben aber ein ähnliches Resultat.

Rotationsdispersion. Besonders interessant ist die Abhängigkeit des Winkels β von der Resonatorlänge (Fig. 18). Denn

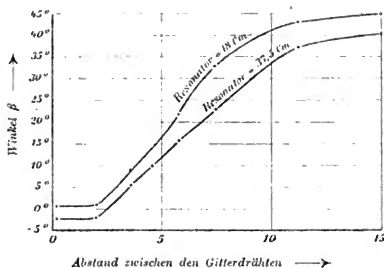


Fig. 18. Drahtgitter. Entfernung 300 cm. $O = 37,5$.

diese beweist, daß eine wirkliche räumliche Trennung der Wellen des Spektrums hinter dem Gitter stattfindet, eine Analogie mit der Rotationsdispersion der Optik.

Das Dispersionsvermögen eines Gitters, dessen Drähte um 45° gegen die Polarisationsrichtung geneigt sind, ist proportional

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda_0}$$

für Wellen in der Nähe von λ_0 . Hierin ist

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\sqrt{B} \cos \varphi}{1 - B}$$

und nach Lamb

$$\cos \varphi = \sqrt{B}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda_0} = \frac{-16 \lambda_0 \pi^2 c^2}{(\lambda_0^2 + 4 \pi^2 c^2)^2 - 8 \pi^2 c^2 (\lambda_0^2 + 4 \pi^2 c^2) + 80 \pi^4 c^4},$$

wo c die frühere Bedeutung hat (p. 383). Die gestrichelte Kurve in Fig. 19 gibt diese Funktion als Funktion von a für $\lambda_0^2 = 5000$

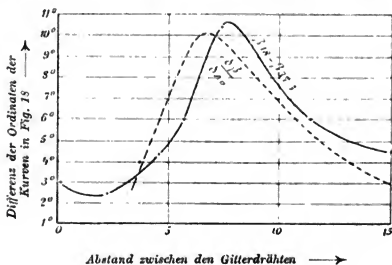


Fig. 19.

und Drahtdurchmesser = 0,065 cm an. Sie hat ein Maximum bei etwa $a = 7$ cm. Tatsächlich zeigen die Messungen, daß Gitter 7a mit $a = 7.5$ cm am besten dispergiert, und die Werte von $(\beta_{18} - \beta_{37,5})$ für Oszillator 37,5 cm und Entfernung 300 cm geben sogar eine Kurve, die der soeben abgeleiteten ähnlich ist. Dieser Vergleich zwischen Theorie und Versuch ist ziemlich unabhängig von der Dämpfung des Senders, denn $\partial \beta / \partial \lambda_0$ wird das Dispersionsvermögen bei λ_0 geben, welches auch die Energieverteilung im Spektrum sein mag. Wegen der Dämpfung des Resonators kann aber die Energieverteilung im Spektrum doch von Einfluß sein.

Messungen mit Oszillator- und Resonatorlänge = 18 cm ergaben noch größere Werte für die Bruchteile und Winkel als 0 = 37,5 und $R = 18$ cm. Das heißt, daß der 18 cm lange Resonator im letzten Fall gegen die überwiegende Amplitude

der längeren Elementarwellen wegen seiner Dämpfung nicht ganz unempfindlich ist.

Diese Versuche zeigen also, daß Dispersion stattfindet. Es fragt sich nun, ob die in der Tafel (p. 386) angegebenen Phasenverschiebungen vielleicht *ausschließlich* von der Dämpfung herrühren, also nur scheinbar sind. Um diese Frage zu untersuchen, betrachten wir den Fall, wo das Spektrum aus zwei Wellen besteht. Wir lernen dann, daß diese scheinbare Phasenverschiebung der „Lamb'schen“ sehr ähnlich ist, indem enge Gitter die größten Phasenverschiebungen geben. Wir müssen den Punkt deshalb quantitativ untersuchen.¹⁾

Wir finden dann, daß die Dämpfung allein wahrscheinlich nicht imstande ist, die großen φ zu erklären, und daß diese das Vorhandensein von wirklichen Phasenverschiebungen andeuten.

Konjugierte Gitter. Lamb hat auch Formeln gegeben für die Durchlässigkeit eines Gitters bezüglich der senkrechten Komponente. Es zeigt sich, daß wenn

B_s = „senkrechte“ Durchlässigkeit eines Gitters mit Abstand a und Breite b und

B_p = „parallele“ Durchlässigkeit eines Gitters mit Abstand b und Breite a

ist, dann ist $B_s + B_p = 1$.

Solche konjugierte Gitter sind Nr. 25 und 29. Bei diesen ist

$$0,75 + 0,27 = 1,02 \text{ (Entfernung 300 cm).}$$

Gitter 3 ist mit sich selbst konjugiert. Hier ist

$$0,91 + 0,04 = 0,95.$$

Reflexionsmessungen. Die Summe der reflektierten und durchgehenden Bruchteile muß gleich 1 sein, wenn keine Absorption stattfindet. Die Werte sind:

Gitternummer	Summe
22	1,03
21	0,89
19	0,94
18	0,96

1) Vgl. Dissertation p. 32.

Wie schon gesagt, sind die Reflexionsmessungen betreffs Genauigkeit nicht mit den Durchlässigkeitsmessungen zu vergleichen (vgl. p. 379). Die Lösungsgitter reflektieren praktisch gar nicht (vgl. Fig. 13 und 15 p. 381 und 382).

Schluß.

Die Ergebnisse der vorstehenden Arbeit können wir folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Durchlässigkeit eines Gitters ist für ebene, gedämpfte Wellen etwas kleiner, als aus den Lambschen Formeln für ungedämpfte Wellen hervorgeht.

2. Für divergente Wellen steigt die Durchlässigkeit.

3. Die Durchlässigkeit einiger aus Lösungen bestehenden Gitter wurde als Funktion der Leitfähigkeit untersucht. Diese Gitter reflektierten wenig.

4. Die Elementarwellen einer gedämpften Welle werden durch ein Gitter, das um 45° gegen die Polarisationsrichtung geneigt ist, verschieden stark gedreht (Rotationsdispersion). Es läßt sich aus den Lambschen Formeln ein Ausdruck für das Dispersionsvermögen eines Gitters ableiten, der eine befriedigende Übereinstimmung mit den Beobachtungen zeigt.

5. Mit der Annahme, daß die Welle ungedämpft ist, können die Phasenverschiebungen zwischen den zwei Wellenkomponenten (parallel und senkrecht zu den Drähten) aus den Beobachtungen einerseits und den Lambschen Formeln andererseits berechnet werden. Es herrscht nur eine qualitative Übereinstimmung. Die vorhandene Dämpfung könnte zu einer scheinbaren Phasenverschiebung Anlaß geben, und zwar auch in demselben Sinne, wahrscheinlich aber nicht in derselben Größe wie die beobachtete.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Professor Dr. Braun, welcher die Anregung zu dieser Arbeit gab, und mich während der Untersuchung wohlwollend unterstützte, sowie Hrn. Dr. Mandelstam für die vielfachen Ratschläge meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

(Eingegangen 11. Dezember 1906.)

10. *Über die Oberflächenspannungen wässeriger
Lösungen. II;
von Géza Zemplén.*

In einer früheren Arbeit¹⁾ habe ich gezeigt, wie das Gesetz Eötvös' über die molekulare Oberflächenspannung der homogenen Flüssigkeiten auf wässerige Lösungen übertragbar ist, wenn man das Molekulargewicht der Lösung nach dem molekularen Mischungsverhältnis bildet, und darin den Assoziationsgrad des Wassers und, wo nötig, auch den Dissoziationsgrad des gelösten Stoffes berücksichtigt.

Ich habe die so aufgestellte Formel mit eigenen Experimenten geprüft, die sich auf wässerige Lösungen von Harnstoff, AgNO_3 und NaCl bezogen, und eine befriedigende Übereinstimmung gefunden. Nun liegt in den Untersuchungen von W. Grabowsky²⁾ und G. Pann³⁾ neues Material vor, das wieder einen Vergleich zwischen Theorie und Experiment gestattet.

Grabowsky untersuchte wässerige Chlorid-, Pann Sulfat-, Nitrat- und Karbonatlösungen. Ihre Experimente, die sie nach der verbesserten Volkmannschen Methode ausgeführt haben, sind insofern als zuverlässig zu betrachten, daß für eine stetige Erneuerung der Flüssigkeit Vorsorge getroffen wurde.

Beide Herren haben versucht, Eötvös' Gesetz auf die untersuchten Lösungen zu übertragen, indem sie aber für das Molekulargewicht des Wassers beständig die Zahl 18 gebrauchten und die Lösung als einfaches Gemisch der Kom-

1) Géza Zemplén, Ann. d. Phys. 20. p. 783. 1906.

2) W. Grabowsky, Beiträge zur Feststellung der wahren Oberflächenspannung wässeriger Chloridlösungen. Dissert. Königsberg 1904. Vgl. auch Beibl. 29. p. 1151. 1905.

3) G. Pann, Beiträge zur Feststellung der wahren Oberflächenspannung wässeriger Sulfat-, Nitrat- und Karbonatlösungen. Dissert. Königsberg 1906. Vgl. auch Beibl. 30. p. 1004. 1906,

ponenten betrachteten, war auch nicht zu erwarten, daß die so berechneten Temperaturkoeffizienten mit der universellen Konstanten 2,1 (C.G.S.) übereinstimmen werden. In der Tat erhielten Grabowsky und Pann für diese Größe von 2,1 sehr stark abweichende Zahlen (0,89—0,99).

Ich habe versucht, aus den Ergebnissen von Grabowsky und Pann auf Grund der Formel

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dT} = \frac{d}{dT} \left\{ f \left(\frac{\mu}{s} \right)^{2/3} \right\} = \gamma$$

den Temperaturkoeffizienten γ zu berechnen. $\mathfrak{F}$ bedeutet die molekulare Oberflächenspannung, T die absolute Temperatur, f die Oberflächenspannung, μ das Molekulargewicht und s die Dichte der Lösung.

In meiner Formel ist¹⁾

$$\mu = \frac{\mu_1 + c \mu_2}{1 + c(1 + \delta)},$$

wo μ_1 das Molekulargewicht des Lösungsmittels, μ_2 dasjenige des gelösten Stoffes, c die molekulare Konzentration der Lösung und δ ihren Dissoziationsgrad bedeutet.

Für wässrige Lösungen muß dabei für $\mu_1 = x \cdot 18$ gesetzt werden, wo x der Assoziationsgrad des Wassers für jede Temperatur aus der Formel

$$f \left(\frac{18x}{s} \right)^{2/3} = \gamma(T' - T)$$

berechnet wurde. T' bedeutet hier 638° , die kritische Temperatur des Wassers.

Folgende Tabellen enthalten die Resultate dieser Rechnungen, wo zum Vergleiche auch das Molekulargewicht und die molekulare Oberflächenspannung der Lösung (μ' und $\mathfrak{F}$) berechnet sind, die man erhält, wenn man von der Dissoziation der Lösung absieht, also einfach

$$\mu' = \frac{\mu_1 + c \mu_2}{1 + c}$$

setzt.

1) l. c. p. 786. Formel (4).

Tabelle 1.

$$T = 10^{\circ}. \quad \mu_1(\text{H}_2\text{O}) = 31,762.$$

Name der Lösung	Konzentration in % Gew.	δ	s	c	$\mu = \frac{\mu_1 + c \cdot \mu_2}{1 + c}$	$\mu = \frac{\mu_1 + c \cdot \mu_2}{1 + c(1 + \delta)}$	f	δ'	δ
MgCl_2	7,96	0,536	1,0710	0,0289	33,540	21,835	77,018	765,174	574,778
	14,96	0,383	1,1318	0,0578	35,217	25,465	79,942	790,858	637,130
	21,46	0,255	1,1924	0,0909	37,032	29,507	83,346	823,475	707,774
$(\text{NH}_4)\text{Cl}$	9,11	0,854	1,0288	0,0595	32,992	17,795	76,263	781,772	510,062
	18,47	0,799	1,0555	0,1344	34,337	19,087	78,980	804,885	544,062
	24,71	0,754	1,0732	0,1949	35,308	20,129	81,089	832,541	572,440
CaCl_2	12,34	0,487	1,1097	0,0402	34,824	23,420	78,588	781,872	600,184
	22,57	0,333	1,2090	0,0834	37,861	28,403	83,866	833,226	687,978
NaCl	18,71	0,466	1,1420	0,1265	34,773	23,801	80,246	782,479	607,735
	26,24	0,365	1,2067	0,1931	36,089	26,439	83,915	808,526	656,945
KCl	9,47	0,876	1,0627	0,0446	33,587	17,903	75,929	759,002	498,983
	18,27	0,817	1,1248	0,0953	35,384	19,527	78,097	778,252	523,609
	23,32	0,791	1,1618	0,1296	36,665	20,472	79,588	794,623	538,922
SrCl_2	8,49	0,583	1,0808	0,0186	34,076	21,526	76,096	759,461	559,131
	16,02	0,485	1,1597	0,0382	36,426	24,529	77,818	762,816	595,129
	22,75	0,380	1,2356	0,0590	38,823	28,133	78,912	785,743	633,916
BaCl_2	10,23	0,579	1,0984	0,0174	34,874	22,086	75,694	758,984	558,432
	18,32	0,495	1,1894	0,0342	37,690	25,145	77,018	771,258	588,849
MgSO_4	10,63	0,197	1,1130	0,0186	33,381	27,886	76,126	734,121	651,875
	18,83	0,118	1,2101	0,0611	36,867	32,976	78,882	764,922	709,812
CuSO_4	6,43	0,240	1,0710	0,0137	33,490	27,008	74,801	742,437	643,244
ZnSO_4	16,17	0,168	1,1823	0,0379	36,497	31,247	76,510	743,056	678,843
	27,63	0,093	1,3477	0,0751	40,822	37,352	79,637	773,833	729,333
K_2SO_4	4,14	0,584	1,0343	0,0079	32,879	20,757	74,860	751,070	552,826
	8,04	0,540	1,0670	0,0159	33,994	22,074	75,370	757,393	567,988
NaNO_3	20,24	0,362	1,1511	0,0947	36,366	26,700	77,528	774,817	630,566
	35,57	0,297	1,2796	0,2061	40,875	31,521	80,756	812,971	683,680
K_2CO_3	39,41	0,205	1,4132	0,1447	45,229	37,534	92,155	928,277	814,070

Tabelle II.

$$T = 30^{\circ}. \quad \mu_1(\text{H}_2\text{O}) = 29,982.$$

Name der Lösung	Konzentration in % Gew.	δ	s	c	$\mu' = \frac{\mu_1 + c \mu_2}{1 + c}$	$\mu = \frac{\mu_1 + c \mu_2}{1 + c(1 + \delta)}$	f	δ'	δ
MgCl ₂	7,96	0,536	1,0631	0,0273	31,710	20,613	74,144	713,006	535,535
	14,96	0,883	1,1261	0,0555	33,400	24,099	77,028	788,121	593,732
	21,46	0,255	1,1854	0,0859	35,125	27,859	80,246	768,396	658,410
(NH ₄)Cl	9,11	0,854	1,0220	0,0562	31,234	16,794	73,232	715,836	473,335
	18,47	0,799	1,0487	0,1269	32,630	18,018	76,243	753,083	507,656
	24,71	0,754	1,0657	0,1840	33,637	19,002	78,088	780,895	532,958
CaCl ₂	12,34	0,487	1,1017	0,0380	32,948	22,112	75,674	729,096	558,451
	22,57	0,333	1,1996	0,0787	35,893	26,809	80,354	774,195	637,537
NaCl	18,71	0,466	1,1327	0,1194	33,024	22,526	77,519	739,973	569,005
	26,24	0,365	1,1945	0,1823	34,379	24,958	80,893	761,187	613,622
KCl	9,47	0,876	1,0566	0,0421	31,780	16,899	72,996	705,988	463,561
	18,27	0,817	1,1150	0,0899	33,655	18,430	75,096	727,763	487,028
	23,32	0,791	1,1535	0,1224	34,837	19,327	76,714	743,949	502,277
SrCl ₂	8,49	0,583	1,0748	0,0176	32,205	20,325	72,986	704,110	518,047
	16,02	0,485	1,1516	0,0369	34,556	23,241	74,831	722,608	554,887
	22,75	0,380	1,2253	0,0557	36,753	26,550	76,037	737,779	590,891
BaCl ₂	10,23	0,579	1,0911	0,0164	32,854	20,786	72,614	702,809	517,956
	18,32	0,495	1,1804	0,0323	35,569	23,757	74,163	718,313	548,917
MgSO ₄	10,63	0,197	1,1067	0,0175	31,537	26,318	72,986	681,018	603,507
	18,83	0,118	1,2038	0,0577	34,915	31,130	75,488	712,554	660,128
CuSO ₄	6,43	0,240	1,0649	0,0129	31,634	25,491	71,819	688,859	596,529
ZnSO ₄	16,17	0,168	1,1744	0,0358	34,526	29,499	73,349	697,725	629,107
	27,63	0,093	1,3391	0,0709	38,686	35,259	76,587	721,082	677,833
K ₂ SO ₄	4,14	0,584	1,0306	0,0074	31,040	19,587	71,837	696,575	511,515
	8,04	0,540	1,0610	0,0150	32,115	20,835	72,260	701,825	525,966
NaNO ₃	20,24	0,862	1,1393	0,0894	34,504	25,210	74,742	726,201	589,109
	35,57	0,297	1,2669	0,1945	38,955	29,746	78,362	769,123	642,529
K ₂ CO ₃	39,41	0,205	1,4007	0,1409	43,359	35,862	89,320	880,579	769,983

Aus diesen Tabellen ergeben sich folgende Werte für den Temperaturkoeffizienten γ und γ' mit bez. ohne Berücksichtigung der Dissoziation des gelösten Stoffes.

Tabelle III.

Name der Lösung	Konzentration in % Gew.	γ'	γ	Name der Lösung	Konzentration in % Gew.	γ'	γ
MgCl_2	7,96	2,61	1,96	BaCl_2	10,23	2,81	2,01
	14,96	2,64	2,17		18,32	2,65	2,00
	21,46	2,65	2,45				
$(\text{NH}_4)\text{Cl}$	9,11	3,29	1,83	MgSO_4	10,63	2,66	2,42
	18,47	2,59	1,82		18,83	2,62	2,48
	24,71	2,58	1,97				
CaCl_2	12,34	2,59	2,09	CuSO_4	6,43	2,68	2,34
	22,57	2,95	2,52				
NaCl	18,71	2,13	1,94	ZnSO_4	16,17	2,27	2,47
	26,24	2,37	2,17		27,63	2,64	2,57
KCl	9,47	2,70	1,77	K_2SO_4	4,14	2,72	2,06
	18,27	2,52	1,83		8,04	2,78	2,10
	23,32	2,53	1,83				
SrCl_2	8,49	2,77	2,05	NaNO_3	20,24	2,43	2,07
	16,02	2,01	2,01		35,57	2,20	2,06
	22,75	2,40	2,15				
				K_2CO_3	39,41	2,38	2,20

Der Mittelwert aller γ ergibt 2,09 (Maximalfehler 0,48), derjenige aller γ' 2,54 (Maximalfehler 0,74).

Die Berücksichtigung der Dissoziation bewirkte ganz entschieden eine bessere Übereinstimmung der Temperaturkoeffizienten sowohl untereinander, als mit der universellen 2,1, obwohl bei den relativ konzentrierten Lösungen der Einfluß der Dissoziation des gelösten Stoffes nicht bedeutend sein kann.

Die noch immer beträchtlichen Abweichungen finden ihre Erklärung einerseits in dem geringen Temperaturintervall, auf welchem die Messungen von Grabowsky und Pann sich erstrecken, andererseits in den bisher unvermeidlichen experimentellen Schwierigkeiten, denen die Messung der Kapillarkonstanten wässriger Lösungen unterworfen ist.

Allerdings scheinen die Messungen von Grabowsky und Pann die Richtigkeit meiner früheren Behauptung zu beweisen, laut welcher das Eötvös' Gesetz in der früher besprochenen Form auf die wässrigen Lösungen mit ebensolcher Genauigkeit anwendbar ist, als auf homogene Flüssigkeiten.

Das Resultat kann auch so ausgesprochen werden, daß bei dem Vorgange der Lösung der Assoziationsgrad des Wassers unverändert bleibt.

Selmeczbánya (Ungarn), Hochschule f. Forstwissenschaft.

(Eingegangen 24. Dezember 1906.)

11. Bemerkungen
zu der Abhandlung des Hrn. Heinrich Schnell:
Untersuchungen am Funkeninduktor mit Queck-
silberunterbrecher¹⁾; von B. Walter.

In der Einleitung zu der in der Überschrift genannten Abhandlung sagt Hr. Schnell, daß es jetzt als feststehend angesehen werden könne, daß dem Kondensator des Funkeninduktors eine viel weitergehende Wirkung zukommt, als ihm früher zugeschrieben wurde, indem nämlich die elektrischen Schwingungen, die in dem von der Primärspule und dem Kondensator gebildeten Schwingungskreis nach der Unterbrechung des Primärstromes entstehen, die hohe Spannung in der Sekundärspule induzieren. Schon Colley sei bei seiner Arbeit über den Sekundärfunken²⁾ von dieser Vorstellung ausgegangen.

Zu diesem letzteren Satze habe ich nun zu bemerken, daß derselbe keineswegs der Wirklichkeit entspricht; denn Colley hat den Einfluß jener primären Stromschwingungen auf die Ausbildung der sekundären Spannung durchaus unterschätzt. Auf p. 118 seiner angeführten Abhandlung z. B. sagt er ausdrücklich, daß in den von ihm für die sekundäre Spannung abgeleiteten Ausdrücken diejenigen Glieder, welche lediglich Konstanten des sekundären Stromkreises enthalten, Wellen darstellen, die sich durch größere Amplitude (!) und längere Periode auszeichnen, und daß sich auf diese Wellen kleinere (!), kürzere Wellen superponieren, die durch die Einwirkung der elektrischen Schwingungen des primären Stromkreises auf den sekundären hervorgebracht sind.

Die Angabe des Hrn. Schnell, daß schon Colley diesen letzteren Schwingungen eine weitgehende Bedeutung für die Ausbildung der sekundären Spannung zugeschrieben habe, ist daher durchaus unzutreffend; und tatsächlich wurde denn auch

1) H. Schnell, Ann. d. Phys. **21**. p. 1. 1906.

2) R. Colley, Wied. Ann. **44**. p. 109. 1891.

diese Bedeutung, soviel ich weiß, zum ersten Male in meiner Abhandlung: Über die Vorgänge im Induktionsapparate¹⁾ theoretisch und experimentell klargelegt, eine Abhandlung, die freilich von Hrn. Schnell überhaupt nicht erwähnt wird, trotzdem sie fast sämtlichen, seither auf diesem Gebiete erschienenen Arbeiten — und besonders auch den von Hrn. Schnell so oft angeführten Klingelfuss'schen — zum Ausgangspunkte der Untersuchungen gedient hat. Ist doch in derselben u. a. auch schon die sekundäre Spannung direkt aus den Konstanten des primären Schwingungskreises zahlenmäßig berechnet — und zwar nach einem Verfahren, das im Grunde genommen auf dasselbe hinausläuft wie das von Hrn. Klingelfuss angewandte, so daß denn auch die von uns gefundenen Zahlenwerte nahezu dieselben sind.²⁾

Eine zweite Bemerkung, welche in jener kurzen, historischen Einleitung des Hrn. Schnell zur Richtigstellung herausfordert, ist die, daß Hr. Zenneck³⁾ die in Rede stehenden Schwingungen mit Hilfe der Braunschen Röhre objektiv dargestellt hat. Diese Bemerkung selbst ist allerdings richtig; eine genauere, historische Darstellung der Entwicklung dieses Wissensgebietes würde aber erwähnen müssen, daß die erwähnte Röhre zur Beobachtung jener Schwingungen gleichfalls zuerst von mir a. a. O. benutzt worden ist, daß meine Beobachtungsweise allerdings nur eine subjektive war, daß aber auch die erste objektive Darstellung jener Schwingungen mit Hilfe dieser Röhre nicht von Hrn. Zenneck, sondern von den Herren Wehnelt und Donath herrührt.⁴⁾

Hamburg, Physikalisches Staatslaboratorium, Dez. 1906.

1) B. Walter, Wied. Ann. **62**. p. 300. 1897.

2) Vgl. Fr. Klingelfuss, Ann. d. Phys. **5**. p. 837. 1901.

3) J. Zenneck, Ann. d. Phys. **13**. p. 819. 1804.

4) A. Wehnelt u. B. Donath, Wied. Ann. **69**. p. 861. 1899.

(Eingegangen 12. Dezember 1906.)

**12. Bemerkungen zu der Arbeit:
„Über den Zerfall von Radium A, B und C,
II. Mitteilung“, von Hrn. H. W. Schmidt¹⁾;
von P. Gruner.**

In der kürzlich erschienenen, obgenannten Arbeit, die außerordentlich wertvolle Beiträge zur Kenntnis der Radiumstrahlungen liefert, sind meine theoretischen Arbeiten auch kurz erwähnt: Anm. 1 auf p. 626. Da sich aus jenen Zitationen gewisse Mißverständnisse ergeben könnten, sei folgendes bemerkt:

1. Die Integrationen, die in meiner ersten Arbeit behandelt sind, sind nicht Wiederholungen derjenigen von Curie und Danne, sondern sind von einem wesentlich allgemeineren Standpunkt aus berechnet, ohne die „üblichen Voraussetzungen der Zerfallstheorie“, für den Fall von vier aufeinanderfolgenden Zerfallsstufen und bei ganz allgemeinen Anfangszuständen. Der experimentell mögliche Fall, daß Rad. *B* und Rad. *C* sich direkt an den induzierten Körper anlagern, ist z. B. in diesen allgemeineren Formeln enthalten.

2. Die Berechnungen meiner zweiten Arbeit sind nicht unter Benutzung „unsicherer“ Abklingungskonstanten ausgeführt, sondern es sind für Rad. *B* und Rad. *C* die früher *durchweg* als sicher angenommenen Werte angewendet. Die neueste Arbeit von v. Lerch, die wohl ausschlaggebend zugunsten der neuen Bronsonschen Werte wirkte, war zur Zeit meiner Ausrechnungen mir noch nicht zugänglich. Betreffend der Konstanten für Rad. *A* scheinen auch jetzt noch keine ganz sicheren Werte vorzuliegen.

3. Was die Voraussetzung, daß Rad. *B* keine raschen β -Strahlen aussende, anbetrifft, so muß diese freilich *jetzt* ganz aufgegeben werden, was aber eine wesentliche Modifikation der Rutherfordschen Gedankengänge mit sich bringt. Meine

1) H. W. Schmidt, Ann. d. Phys. 21. p. 610. 1906.

Berechnungen sollten gerade Zahlen liefern, deren Vergleich mit Beobachtungen die Richtigkeit jener Voraussetzung zu prüfen gestattet.

4. Endlich sei noch auf meine letzte, allerdings nur in ihren Hauptresultaten publizierte Arbeit hingewiesen: Archives des sciences phys. de Genève (4), 22. September 1906, *über die Konstanten der Radioaktivität*. Es wurden dort die Zahlen von Duane und Bronson mit der Theorie verglichen und die Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Meine theoretischen Resultate decken sich bis zu einem gewissen Grade mit den Beobachtungen von Hrn. Schmidt. Ja es wäre denkbar, daß die sehr wenig durchdringenden Strahlen des Rad. *B* ($\nu_1 = 890 \text{ cm}^{-1}$) eben auch nichts anderes als α -Strahlen seien. Wesentlich verfeinerte magnetische Ablenkungsversuche könnten wohl erst ausschlaggebend sein. Die indirekte Methode von Bronson zum Nachweis, daß Rad. *B* keine α -Strahlen aussende, bedarf jedenfalls noch genauer Bestätigung.

Bern, 13. Dezember 1906.

(Eingegangen 14. Dezember 1906.)

Anordnung I.

$1\ \mu$



$2,5\ \mu$



$4,6\ \mu$



$13\ \mu$



$19,6\ \mu$



$34,7\ \mu$



$50\ \mu$



Anordnung II.

$\varnothing = 5\ \mu$

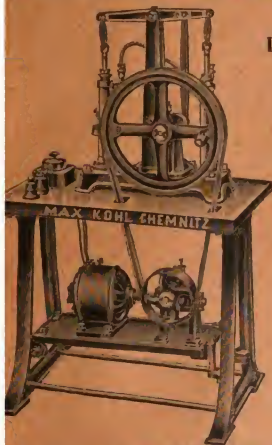


P. Dobler.

MAX KOHL, Chemnitz i. S.



Arbeits-(Praktikanten-)Tische
 in allen möglichen Ausführungen, ganz den jeweiligen örtlichen Verhältnissen angepaßt.



Radumbromid von überraschender
 chemisch rein. — Wirkung; — Preis auf Anfrage.

Experimentier-Schalttafeln

für Lehranstalten u. Laboratorien, als Wandtableau und in Form fahrbarer Tische ausgeführt, gestatten die Verwendung

des Stromes städtischer Centralen bis 110, 100, 220 Volt u. 20 oder 30 Amp. für alle im Experimentalunterricht vorkommende Arbeiten. Die Schalttafeln sind für kleine und große Stromstärken bei beliebigen Spannungen von 0,3 bis 110 resp. 220 Volt zu verwenden.

Höhere Spannungen als wie eingestellt, treten auch bei Stromunterbrechung nicht auf. — Es ist damit also einem wirklichen, lang gefühlten Bedürfnis abgeholfen.

1a. Referenzen. *Man verlange Spezial-Prospekt!*



D. D. Thermoskope nach Kolbe
 in neuester, verbesserter Ausführung.

Neu!

Öl-Luftpumpen

System Kohl, D.R.P. 169180.

Allein-Vertrieb

und Alleinberechtigung zur Fabrikation.

Die Pumpe verdünnt bis auf 0,0006 mm und verspritzt während des Pumpens kein Öl! Sie eignet sich vorzüglich zum Auspumpen von Röntgen-Röhren.

Man verlange Spezial-Prospekt!

Neue rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede, D.R.P.

Einfachste Konstruktion, sehr hohes Vakuum, geringe Wartung, einfachste Handhabung.

Hochvakuum-Pumpen liefern Vakua bis zu 0,00015 mm in 14 Minuten in einem Raum von 300 ccm.

Weltausstellung Lüttich 1905: **2 Grands Prix!**

Weltausstellung St. Louis 1904: **Grand Prix und Gold. Medaille**,
 waren in der Sonderausstellung des Königl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im Auftrag der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsaals, letztere in der deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung wissenschaftliche Instrumente.

Ehrendiplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Düsseldorf 1898.

Goldene Medaillen Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900, Aussig 1903, Athen 1904.

Listen mit ausführlichen Kostenanschlägen, Beschreibungen, Referenzen usw. gratis und franko.

E. Leybold's Nachfolger, Cöln a. Rh.

Alleinvertrieb und alleinige Berechtigung zur Fabrikation der
Neuen Hoch-Vakuum-Pumpe
nach Dr. Gaede.

D. R. P. angemeldet.

D. R. P. angemeldet



Die Pumpe evakuiert in $2\frac{1}{2}$ Minuten eine Röntgenröhre von Atmosphärendruck bis auf Röntgenvakuum, ein 6 Liter-Gefäß in 10 Minuten von 10 mm Druck bis auf 0,0016 und in 25 Minuten ein 6 Liter-Gefäß von 10 mm Druck auf 0,00003 mm.

Die Pumpe ermöglicht in kürzester Zeit die höchsten bisher erreichten Verdünnungen zu erzielen.

Preis ohne Quecksilber Mark 330.—.

Alleinige Inseratenannahme durch: Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Ulrichstr.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907.

N. 3.

ANNALEN DER P H Y S I K.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. D. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 22. HEFT 3.

DES GANZEN REIHE 327. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1907.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 5. März 1907.)

Inhalt.

	Seite
1. Emil Kohl. Über die dielektrischen Verschiebungsgleichungen für schnelle Schwingungen in ruhenden Mitteln	401
2. A. Bestelmeyer. Spezifische Ladung und Geschwindigkeit der durch Röntgenstrahlen erzeugten Kathodenstrahlen	429
3. Léon Schames. Über die Abhängigkeit der Hysteresiswärme und der Permeabilität des Eisens von der Frequenz des Wechselfeldes	448
4. O. Lehmann. Über die van der Waalssche Formel und die Kontinuität der Aggregatzustände, Erwiderung an K. Fuchs	469
5. R. Gans. Zur Theorie des Ferromagnetismus. 1. Mitteilung: Gibt es wahren Magnetismus?	481
6. Walter Block. Untersuchungen am stromliefernden Daniell-element	505
7. J. Traube. Volumen und Valenz. Atom und Elektron . . .	519
8. Günther Schulze. Spannungsgefälle an Aluminiumanoden . .	543
9. F. Dolezalek und H. G. Möller. Über Beseitigung der ungleichmäßigen Stromverteilung in Wechselstromleitern	559
10. A. Einstein. Über die Gültigkeitsgrenze des Satzes vom thermodynamischen Gleichgewicht und über die Möglichkeit einer neuen Bestimmung der Elementarquanta	569
11. N. Schiller. Eine Bemerkung über die Beziehung zwischen der absoluten Temperatur und der kinetischen Energie eines thermodynamischen Systems	573
12. Ludwig Silberstein. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivекtorieller Behandlung.	579
13. F. W. Adler. Über die Mach-Lippmannsche Analogie zum zweiten Hauptsatz	587
14. R. Küch und T. Retschinsky. Temperaturmessungen im Quecksilberlichtbogen der Quarzlampe	595
15. J. D. van der Waals jr. Zur Frage der Wellenlänge der Röntgenstrahlen	603
16. V. Dvořák. Bemerkung zu der Arbeit von W. Zernov: „Über absolute Messungen der Schallintensität	606

Die Redaktion der Annalen wird von den unseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 22.

1. *Über die dielektrischen Verschiebungsgleichungen für schnelle Schwingungen in ruhenden Mitteln; von Emil Kohl.*

Diese Arbeit knüpft an eine vorhergehende, in diesen Annalen veröffentlichte Untersuchung des Verfassers¹⁾ an, worin die Feldgleichungen der Elektronentheorie aus der Annahme von dielektrischen Verschiebungen der neutralen Elektrizität entwickelt wurden. Es war in dieser Arbeit vorausgesetzt worden, daß die dielektrischen Verschiebungen beider Elektrizitäten unter dem Einflusse einer und derselben elektrisierenden Kraft gleich groß sind; auf die allgemeinste Annahme einer ungleichen Verschiebbarkeit der beiden Elektrizitäten war zwar hingewiesen, dieser Fall jedoch nicht näher behandelt worden. Es sollen nunmehr die dort angestellten Betrachtungen dadurch erweitert und verallgemeinert werden, daß man eine verschiedene Beweglichkeit der beiden Elektrizitäten voraussetzt, wozu man durch die Grundvorstellung von dem Gebundensein eines Teiles der Elektrizität an die Materie unmittelbar geführt wird. Allerdings tritt die Notwendigkeit einer solchen Erweiterung nur für Schwingungen von sehr großer Schwingungszahl auf, bei denen man die Molekularstruktur im Vergleich zur Wellenlänge nicht mehr vernachlässigen darf und daher die Annahme einer kontinuierlichen Raumerfüllung der Elektrizität ihre Berechtigung verliert, ein Umstand, der durch die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Wellenlänge gekennzeichnet ist.

Es werden zunächst die Hauptgleichungen für die Bewegung der Elektrizität überhaupt aufgestellt, wie sie sich aus den Feldgleichungen der Maxwellschen Theorie unter Zuhilfenahme der von Lorentz eingeführten Erweiterung derselben durch den Begriff des Konvektionsstromes bewegter Elektrizität ergeben. Es wird sich nachweisen lassen, daß aus der Form

1) E. Kohl, Ann. d. Phys. 20. p. 1—34. 1906.

dieser Gleichungen notwendig auf eine molekulare Struktur der Elektrizität geschlossen werden muß, wie dies mit dem molekularen Aufbau der Materie als ihres Trägers im Zusammenhange steht. Hieraus ergeben sich zwei Möglichkeiten, um eine bestimmte Vorstellung von den elektromagnetischen Vorgängen selbst zu erhalten; die eine führt auf die Grundvorstellungen der Elektronentheorie, die andere auf die Theorie der dielektrischen Verschiebungen der neutralen Elektrizität. Eine dritte Möglichkeit besteht in der Annahme, daß die elektrischen Molekeln gewisse Eigenschwingungen besitzen, also als Resonatoren aufzufassen sind; doch wird sich zeigen, daß diese Theorie in der zweitgenannten mit inbegriffen ist.

Mit dieser Untersuchung finden die vorhergehenden Arbeiten des Verfassers über diesen Gegenstand, welche die Entwicklung der Feldgleichungen auf Grund der Theorie der dielektrischen Verschiebungen zum Zwecke hatten, eine Verallgemeinerung auch bezüglich des Gebietes der Wellenbewegungen vom Charakter der Lichtschwingungen.

I. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen elektrischer Massen.

Es werde ein sehr kleines Raumteilchen $\Delta \tau$ eines Körpers betrachtet, in dessen Innern sich elektromagnetische Bewegungsvorgänge abspielen, und die Bewegung der darin enthaltenen Elektrizität mit der Masse e verfolgt; die von e zurückgelegten Wegstrecken sollen im folgenden als geradlinig angenommen und ihre Komponenten nach den Achsen mit f, g, h bezeichnet werden. Um Wiederholungen zu vermeiden, sei bezüglich der benutzten Formeln auf eine in diesen Annalen erschienene Arbeit des Verfassers verwiesen¹⁾, worin sich die betreffenden

1) E. Kohl, Ann. d. Phys. 19. p. 587—612. 1906. — Bei der Übertragung in die Reinschrift des Manuskriptes sind hierbei einige Schreibfehler unterlaufen, welche hierin richtig gestellt werden:

1. In den Gleichungen (34) bis (37) ist überall σ^2 statt σ , ferner

2. in der Gleichung (36) überall $\frac{x_0 - x}{q^2}$ statt $\frac{x_0 - x}{q}$ zu setzen; endlich

3. in Gleichung (37) heißt das erste Glied, den vorhergehenden Rechnungen entsprechend, richtig

$$\iint \frac{\sigma^2 d\tau d\tau_0}{q \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}.$$

Rechnungen durchgeführt finden. Es bleibe zunächst dahingestellt, ob die Elektrizität kontinuierlich den Raum erfüllt oder nicht; in der Tat gelten die in dieser Arbeit entwickelten Berechnungen der durch die Bewegung erzeugten, von dem Teilchen selbst herrührenden inneren Gegenkräfte ganz unabhängig davon, wie man sich die Raumerfüllung der Elektrizität im übrigen Raume vorstellt. Es möge zuerst die gesamte äußere, auf das Teilchen e wirkende Kraft bestimmt werden. Zunächst wirkt die verschiebende Kraft des äußeren Feldes, welche nach Lorentz die Komponenten

$$(1) \quad \Xi = eP + \frac{e}{\mathfrak{B}} \left[\beta \frac{dh}{dt} - \gamma \frac{dg}{dt} \right] \text{ etc.}$$

besitzt; in ihr sei auch die Wirkung der innerhalb $\Delta\tau$ etwa befindlichen ungleichnamigen Elektrizität $-e$ bereits mit inbegriffen. Ferner wird eine Gegenkraft mit den Komponenten $-C_0 f$, $-C_0 g$, $-C_0 h$ bestehen, welche ihren Ursprung der elektrostatischen Wirkung der übrigen Elektrizität auf e sowie möglicherweise einer Wechselwirkung zwischen Materie und Elektrizität verdankt. Weiter muß unter Umständen das Auftreten einer Widerstandskraft vom Charakter der Reibung ins Auge gefaßt werden, deren Komponenten durch

$$-W \frac{df}{dt}, \quad -W \frac{dg}{dt}, \quad -W \frac{dh}{dt}$$

gegeben sind. Endlich kommt noch eine Kraft hinzu, welche als Widerstand der Bewegung infolge des Energieverlustes durch die Strahlung einzuführen wäre, jedoch wegen Kleinheit hier außer Berücksichtigung bleiben kann. Die gesamte äußere Bewegungskraft besitzt also die Komponenten:

$$(2) \quad \mathfrak{X}_a = eP + \frac{e}{\mathfrak{B}} \left[\beta \frac{dh}{dt} - \gamma \frac{dg}{dt} \right] - C_0 f - W \frac{df}{dt} \text{ etc.}$$

Gegen die von den äußeren Kräften erzeugte Bewegung entsteht nun im Innern des Teilchens eine innere Gegenkraft mit den Komponenten $\mathfrak{X}$ etc., nämlich die innere Feldkraft, welche hier dieselbe Rolle spielt wie in der Mechanik das Produkt $m(d^2s/dt^2)$; sie ist wie dort ein innerer Widerstand, welchen das Bewegte infolge seiner Trägheit jeder Bewegungsänderung entgegensetzt. Ihre Größe ergibt sich, da hier von einer Drehung des Teilchens abgesehen wird, aus der Gleichung (38) der zweitbezogenen Arbeit in der Gestalt

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d}{dt} \left[\left(1 - k_\sigma^2 \frac{\partial V}{\partial k_\sigma^2} - V \right) \frac{df}{dt} \right] \text{ etc. ,} \\ \left(k_\sigma &= \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}}{dt} \right), \end{aligned} \right.$$

worin

$$V = \iint \frac{\sigma^2 d\tau d\tau_0}{q \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}$$

bedeutet und das Integral über den Raum des Teilchens $\Delta \tau$ zu erstrecken ist. Die Funktion V läßt sich durch eine Reihenentwicklung nach k_σ^2 in der Form

$$(4) \quad V = V_0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial V}{\partial k_\sigma^2} \right)_{k_\sigma=0} k_\sigma^2 + \dots$$

darstellen; nimmt man an, daß die Geschwindigkeit der elektrischen Bewegung klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, so kann man sich auf das erste Glied allein beschränken und erhält dann

$$(5) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial k_\sigma^2} \right)_{k_\sigma=0} - V_0 \right] \frac{d^2 f}{dt^2} = -M \frac{d^2 f}{dt^2} \text{ etc. ,}$$

worin

$$M = -\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial k_\sigma^2} \right)_{k_\sigma=0} - V_0 \right] \quad \text{und} \quad V_0 = \iint \frac{\sigma^2 d\tau d\tau_0}{q}$$

ist. Außerdem muß die Möglichkeit offen gelassen werden, daß die im Raumteilchen befindliche Materie bis zu einem gewissen Grade die Bewegung mitmacht, so daß noch ein Glied

$$-m \frac{d^2 f}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2 g}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2 h}{dt^2}$$

hinzutritt und mit dem eben entwickelten vereinigt werden kann. Bezeichnet man die Summe $M + m$ mit M_0 , so nehmen die Komponenten der gesamten auf e wirkenden Kraft die Werte

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} + \mathfrak{X}_a &= -M_0 \frac{d^2 f}{dt^2} - C_0 f - W \frac{df}{dt} + eP \\ &+ \frac{e}{\mathfrak{B}} \left[\beta \frac{dh}{dt} - \gamma \frac{dg}{dt} \right] \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

an.

Es möge nun bezüglich dieser Kräfte vorausgesetzt werden, daß sie dem Prinzip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gehorchen, woraus die Beziehung

$$(7) \quad \sum \mathfrak{X} + \mathfrak{X}_a = 0, \quad \sum \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}_a = 0, \quad \sum \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}_a = 0$$

folgt; diese Annahme hat der Verfasser in der bezogenen Arbeit näher erörtert. Diese Beziehung gilt zunächst nur für die über den ganzen Raum sich erstreckende Gesamtsumme, nicht aber für die Einzelsummen, da aus rein theoretischen Betrachtungen nicht erschlossen werden kann, ob nicht infolge eines unbekannten inneren Zusammenhanges noch Bedingungen für die Bewegung vorhanden sind, welche bei der Aufstellung der äußeren Kräfte nicht berücksichtigt wurden. Nun lehrt aber die Erfahrung, daß die Bewegungen von der Art der Lichtschwingungen nach Gleichungen erfolgen, welche die Gestalt der Einzelsummen (6) haben, wenn man diese gleich Null setzt. Da diese Gleichungen Differentialgleichungen sind, so sagt diese Erfahrungstatsache, daß bei der Wahl eines hinlänglich kleinen Raumteilchens $\Delta\tau$ die auf e wirkenden Kräfte vollkommen durch die einzelnen Summanden (6) beschrieben sind. Die weitere Erfahrungstatsache, daß nur für starke magnetische Felder der von der ponderomotorischen Kraft der magnetischen Vektoren α , β , γ herrührende Bestandteil in Ξ , H , Z , bemerkbar wird, während er für die magnetische Kraft des eigenen Feldes nicht mehr in Erscheinung tritt, läßt sich ohne Schwierigkeit durch die Annahme erklären, daß die Amplituden der Schwingungen sehr klein sind.

Es soll nunmehr untersucht werden, welche Folgerungen sich hieraus hinsichtlich der Frage nach der Konstitution der Elektrizität ziehen lassen. Es werde zu diesem Zwecke der Quotient $e/\mathfrak{B} M_0$ betrachtet, für welchen die Versuche einen zwar veränderlichen, aber endlichen Zahlenwert ergeben haben. Sein Divisor besteht aus zwei Teilen: der erste Teil M besitzt die Größenordnung $|\sigma^2 \Delta l^5|$, wenn mit Δl eine Wegstrecke von dem Größenverhältnisse der Abmessungen des Teilchens $\Delta\tau$ bezeichnet wird, der zweite Teil aber die Größenordnung $|\sigma_0 \Delta l^3|$, wo σ_0 die Dichte der Materie bedeutet; außerdem ist zu bemerken, daß der Wert von M wesentlich von der Form des Teilchens $\Delta\tau$ abhängt, da er das Selbstpotential der in $\Delta\tau$ enthaltenen elektrischen Masse e darstellt. Setzt man $\lim \Delta l = 0$, so würde M gegen m verschwinden und es hätte der Quotient einen von der Gestalt des Teilchens unabhängigen Wert von der Größenordnung $|\sigma/\sigma_0|$. Die Erfahrung zeigt aber, daß dieser Quotient für Lichtschwingungen mit großer Schwingungs-

zahl ziemlich unabhängig von der Materie dem Grenzwerte $1,8 \cdot 10^7$ nahe kommt und sicherlich von der materiellen Masse der Molekel nicht in der eben abgeleiteten Weise abhängt. Man muß daraus schließen, daß für Schwingungen von hoher Frequenz nicht mehr die materielle Masse m , sondern vielmehr die Elektrizität selbst die Schwingung vollführt. Würde man aber bloß Schwingungen der Elektrizität annehmen, so würde $e/\mathfrak{B}M$ unendlich groß werden, wenn sich $\Delta\tau$ der Grenze Null nähert; außerdem würde er, wenn $\Delta l > 0$ gewählt wird, je nach der Gestalt von $\Delta\tau$ einen wechselnden Wert besitzen. Man muß daraus die Folgerung ziehen, daß die Raumteilchen $\Delta\tau$ an eine ganz bestimmte untere Grenze gebunden sind, unter welche sie nicht hinabgehen dürfen, ohne daß die Differentialgleichungen ihre Geltung verlieren; ferner muß man schließen, daß bei Annahme dieser unteren Grenze für $\Delta\tau$ das darin enthaltene Teilchen e eine eigene Form besitzt, welche nicht von der Wahl des umschließenden Raumes abhängig ist. Vom physikalischen Standpunkte aus läßt sich aber das Bestehen einer Differentialgleichung mit den entwickelten Eigenschaften kaum anders deuten, als daß man bei fortgesetzter Teilung des Raumes schließlich auf Raumteilchen stößt, innerhalb deren die darin befindliche elektrische Masse als ein selbständiges Individuum aufgefaßt werden muß.

Diese Betrachtungen bleiben gemäß den im IV. Abschnitte darzulegenden Entwicklungen auch für den Fall bestehen, daß das ungleichnamige Teilchen im selben Raume als vorhanden zu betrachten ist.

Es ergibt sich somit, daß die Maxwellschen Feldgleichungen mit ihrer Erweiterung durch den Begriff des Konvektionsstromes der bewegten Elektrizität notwendig auf die Annahme einer molekularen Struktur der an der Materie haftenden Elektrizität führen.

II. Die Grundannahmen der Elektronentheorie.

Die eben entwickelten Folgerungen sind von jeder besonderen Annahme über die Raumverteilung der elektrischen Massen $\pm e$ frei. Hinsichtlich dieser Raumverteilung können nun zwei wesentlich verschiedene Annahmen eingeführt werden. Man kann nämlich die einzelnen positiven und negativen elek-

trischen Teilchen $\pm e$ als unveränderlich bestehende, fertig gebildete Individuen (Elektronen) auffassen, oder aber man kann annehmen, daß sich die wahren (d. h. getrennten) Elektrizitäten erst beim Vorgange des Elektrischwerdens selbst bilden, indem die vorher vereinigten Elektrizitäten (die neutrale Elektrizität) eine Verschiebung erfahren. Die erste Voraussetzung ist jene der Elektronentheorie. Sie betrachtet unmittelbar die Wegstrecken, welche die getrennt voneinander vorhandenen elektrischen Teilchen unter dem Einflusse der Feldkräfte zurücklegen; sie rechnet also mit elektrischen, nicht mit dielektrischen Verschiebungen der Elektrizitäten. Um ferner die ungleiche Verschiebbarkeit der Elektronen zu erklären, setzt sie voraus, daß die positive Elektrizität in viel engerer Verknüpfung mit der Materie steht als die negative; so ist in der von Abraham als Modell der Lichtquelle bezeichneten Konfiguration die positive Elektrizität ganz oder wenigstens nahezu ganz an die materielle Molekel gebunden, welche letztere wegen ihrer größeren mechanischen Masse viel schwerer beweglich ist als die elektromagnetische Masse des Elektrons.

Diese beiden Annahmen, nämlich das Bestehen fertig gebildeter elektrischer Atome und deren ungleiche Beweglichkeit infolge eines verschiedenen Grades der Gebundenheit an die Materie, bilden die Grundlage für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen der Elektronentheorie. Sie führt in ihren letzten Konsequenzen folgerichtig dazu, die unelektrische Materie als ein System zu betrachten, bei welchem die positive Elektrizität durch die Materie selbst, die negative aber durch die eigentlichen Elektronen dargestellt wird, also zur elektromagnetischen Auffassung der Materie.

III. Die Grundannahmen der Theorie der dielektrischen Verschiebungen.

Der Unterschied zwischen dieser und der Elektronentheorie ist in letzter Linie rein energetischer Art. Nach der Elektronentheorie ist auch im unelektrischen Zustande eine gewisse Menge von elektromagnetischer Energie, von dem Bestehen der Elektronen herrührend, vorhanden; beim Übergange in den elektrischen Zustand erfährt sie infolge der Änderung des gegenseitigen Potentials und der freien Bewegungsenergie

der Elektronen eine Zu- oder Abnahme, welche als Änderung der elektromagnetischen Feldenergie in Erscheinung tritt. Man kann aber auch umgekehrt die Elektrizität überhaupt als bloße Energieform der Materie ansehen, so daß diese für unsere Art des Erkennens als das Ursprüngliche und als Träger dieser besonderen Energieform aufzufassen wäre; es würde sonach das Entstehen von elektromagnetischer Energie durch den Umsatz einer gleichen Energiemenge von anderer Form zu erklären sein, ebenso, wie sie sich bei Umkehrung des Vorganges wieder in nicht elektromagnetische Energie zurückverwandelt. Der Mechanismus des Überganges eines Körpers aus dem unelektrischen Zustande, wo also keine elektromagnetische Energie vorhanden ist, in den elektrischen, wo eine solche auftritt, kann mittels des bekannten Begriffes der neutralen Elektrizität und der dielektrischen Verschiebungen ihrer beiden ungleichnamigen Bestandteile der Vorstellung zugänglich gemacht werden. Auch hier sind die beiden ungleichnamigen Elektrizitäten in unveränderlicher Menge fortwährend vorhanden; da sie aber im unelektrischen Zustande übereinander gelagert sind, wird erst dann eine elektromagnetische Energie entstehen können, wenn die beiden ungleichnamigen Elektrizitäten infolge der Wirkung elektrisierender Kräfte gegeneinander verschoben werden. Die Grundbegriffe, um welche es sich also in dieser Theorie handelt, sind die elektrisierende Kraft und die durch sie hervorgerufene dielektrische Verschiebung, da durch diese der Begriff des Stromes festgelegt wird, welcher in den Maxwellschen Gleichungen die elektrisierenden Kräfte und die magnetischen Vektoren miteinander verknüpft.

Die früheren Arbeiten des Verfassers über diesen Gegenstand sind aber nunmehr durch zwei Erweiterungen zu ergänzen. Es stellt sich erstens die Notwendigkeit heraus, die elektrischen Verschiebungen der beiden Elektrizitäten aus ihrer Ruhelage (d. h. relativ zum Mittelpunkte der Molekel) unter dem Einflusse derselben elektrisierenden Kraft nicht mehr als gleich vorauszusetzen, sondern ein bestimmtes Größenverhältnis zwischen ihnen in der Gestalt

$$(8) \quad f_-, g_-, h_- = -\lambda f_+, -\lambda g_+, -\lambda h_+$$

anzunehmen. Hierbei ist λ als eine positive, der Materie der Molekel eigentümliche Konstante zu betrachten. Über die Ursache der ungleichen Beweglichkeit der beiden Elektrizitäten soll später eine Voraussetzung gemacht werden, indem sie in der besonderen Natur der Verknüpfung zwischen Materie und Elektrizität gesucht und als eine Besonderheit des elektromagnetischen Vorganges aufgefaßt werden wird. Zweitens hat man für schnelle Schwingungen an Stelle der einfachen Beziehungen $\sigma f = DP$ etc. zwischen Verschiebung und Kraft eine aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen des I. Abschnittes abzuleitende erweiterte Form derselben treten zu lassen, da dann die freie Bewegungsenergie der beiden Elektrizitäten gegenüber ihrer rein elektrostatischen Energie nicht mehr vernachlässigt werden darf.

IV. Die Grundgleichungen der Theorie der dielektrischen Verschiebungen.

Es werde wieder das Raumteilchen $\Delta\tau$ betrachtet und angenommen, daß sich in seinem Innern im Zustande der Ruhe eine Anzahl N neutraler, an die Materie gebundener elektrischer Massen $\pm e$ befinden; der Allgemeinheit wegen soll die Möglichkeit offen bleiben, daß N aus einer Summe von Gruppen von je N_i Teilchen bestehe, welche dieselben Konstanten der Schwingungsgleichungen besitzen. Die Komponenten der elektrischen Verschiebungen relativ zum Mittelpunkt der Molekel sollen

$$f_+, f_- = -\lambda f_+; \quad g_+, g_- = -\lambda g_+; \quad h_+, h_- = -\lambda h_+$$

sein; außerdem wird die Molekel unter dem Einflusse der ponderomotorischen Kraft selbst eine Bewegung ihres Mittelpunktes mit den Komponenten p, q, r erfahren, so daß die gesamten Wegstrecken der elektrischen Verschiebung die Werte

$$(9) \quad \xi_{\pm} = f_{\pm} + p, \quad \eta_{\pm} = g_{\pm} + q, \quad \zeta_{\pm} = h_{\pm} + r$$

besitzen. Die im Raumteilchen $\Delta\tau$ herrschende elektrostatisch gemessene Stromstärke besteht aus der dielektrischen Strömung im Äther und aus dem Konvektionsstrom der bewegten Teilchen; sie hat, da in diesem die von p, q, r herrührenden Glieder wegfallen, die Komponenten

$$(10) \quad i_z = \frac{1}{4\pi} \frac{dP}{dt} + \sum N_i \frac{d\overline{ef_i}}{dt} \text{ etc.}$$

$$(\overline{ef_i} = e_{+i} f_{+i} + e_{-i} f_{-i} = e_i (f_{+i} - f_{-i}) \text{ etc.}),$$

wenn wegen der Annahme eines ruhenden Mittels $d./dt$ statt $\partial./\partial t$ gesetzt wird.

Es handelt sich nunmehr darum, die Gleichungen für die dielektrischen Verschiebungen in ihrer Abhängigkeit von den herrschenden Kräften aufzustellen, indem man die Wirkung auf die beiden Teilchen $\pm e$ aufsucht. Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bilden die Gleichungen (43) bis (45) des 7. und 8. Abschnittes der zweitgenannten Abhandlung, worin die allgemeinsten Gleichungen für die Bewegung elektrischer Massen in dem Falle entwickelt wurden, daß ein materieller Träger der Elektrizität eine Rolle spielt. Wenn man in der Gleichung (43) der zweitgenannten Arbeit die Größen $\mathfrak{K} + \int \sigma \Xi_a d\tau_0$ etc., also die Komponenten der gesamten, auf das betrachtete Teilchen wirkenden elektrisierenden Kraft mit (P) , (Q) , (R) , ferner den auf die Einheit der Geschwindigkeit bezogenen Leitungswiderstand mit W , und schließlich die Komponenten der durch die Anwesenheit des materiellen Trägers bedingten elektromotorischen Kraft mit X , Y , Z bezeichnet, so besteht die Beziehung

$$(11) \quad (P)_{\pm} - W \frac{df_{\pm}}{dt} + X_{\pm} = 0 \text{ etc.}$$

Diese Gleichung wurde dort in der Weise abgeleitet, daß die Änderung der Gesamtenergie, welche sich aus einem elektromagnetischen und einem nicht elektromagnetischen Anteile zusammensetzt, für jedes der beiden Teilchen aus der Wirkung dieser drei Kraftarten berechnet und gleich Null gesetzt wurde; daraus ergab sich dann unter Anwendung des Prinzipes der gleichen Wirkung und Gegenwirkung das Verschwinden der Komponenten der Kraftsummen nach den drei Koordinatenachsen. Unter der elektromotorischen Kraft wurde jene Kraft verstanden, durch deren Arbeit nichtelektromagnetische Energie in elektromagnetische und umgekehrt übergeführt wird.

Es handelt sich nun darum, diese drei Kräfte (P) , W und X der Reihe nach zu bestimmen, wobei zunächst das Teilchen $+e$ betrachtet werden soll.

1. Die Komponenten der elektrisierenden Kraft (P) sind aus drei Teilen zusammengesetzt, erstens aus der äußeren Feldkraft

$$\Xi = P + \frac{e}{\mathfrak{B}} \left[\beta \frac{d\zeta_+}{dt} - \gamma \frac{d\eta_+}{dt} \right],$$

ferner aus der inneren Gegenkraft $\mathfrak{X}$ des Teilchens gegen die Bewegung, hervorgerufen durch die elektromagnetische Trägheit, und endlich aus der von dem ungleichnamigen Teilchen $-e$ ausgeübten Kraft $\mathfrak{X}_a$. Es ist hierbei vorausgesetzt, daß die Abmessungen des Teilchens $\pm e$ sehr klein gegen die Strecken, auf welchen die äußere Feldkraft sich merklich ändert, also gegen die Wellenlängen, sind, so daß man im Ausdrucke für die äußeren Kräfte statt der genauen Formel Ξ, H, Z

$$= \int \sigma \left[P + \frac{1}{\mathfrak{B}} \left(\beta \frac{d\zeta}{dt} - \gamma \frac{d\eta}{dt} \right) \right] d\tau \text{ etc.}$$

die angenäherte

$$= e P + \frac{e}{\mathfrak{B}} \left(\beta \frac{d\zeta}{dt} - \gamma \frac{d\eta}{dt} \right) \text{ etc.}$$

schreiben kann.

Die Komponente $\mathfrak{X}$ stammt von dem Teilchen $+e$ selbst her und hat, wenn man wieder höhere Potenzen der Quotienten

$$\frac{d\zeta}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}$$

vernachlässigt, die bereits in (5) abgeleitete Gestalt

$$(12) \quad \mathfrak{X} = -M \frac{d^2 \xi_+}{dt^2}.$$

Die Komponente $\mathfrak{X}_a$ besitzt gemäß den Gleichungen (32) und (33) der zweitgenannten Arbeit unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens der ungleichnamigen Masse die Größe

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}_a &= \int \sigma \left[(1 - k_{\sigma-}^2) \frac{\partial U_0}{\partial x_0} + (1 - k_{\sigma-}^2) \frac{\partial |U|}{\partial x_0} + \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{dF}{dt} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\mathfrak{B}} \frac{\partial}{\partial x_0} (U_0 r_0) k_{\sigma-}^2 \right] d\tau_0 \text{ etc.} \\ &\quad \left(k_{\sigma-} = \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \sqrt{\xi_-^2 + \eta_-^2 + \zeta_-^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Die Integration ist jetzt in den Größen U bezüglich $d\tau$ über den Raum des Teilchens $-e$, bezüglich $d\tau_0$ jedoch über den Raum des Teilchens $+e$ zu erstrecken; da diese Räume nicht

mehr wie bei der Berechnung von $\mathfrak{X}$ zusammenfallen, darf das Glied

$$\int \sigma (1 - k_{\sigma-}^2) \frac{\partial U_0}{\partial x_0} d\tau_0$$

nicht wie dort weggelassen werden. Eine weitere Änderung bei der Berechnung von $\mathfrak{X}_a$ gegenüber jener von $\mathfrak{X}$ tritt dadurch ein, daß die Größen $x_0 - x$, $y_0 - y$, $z_0 - z$ mit der Zeit veränderlich sind, wodurch das in der Gleichung (30) der zweitgenannten Arbeit vorhandene Glied

$$\frac{x_0 - x}{\varrho} k_x' + \frac{y_0 - y}{\varrho} k_y' + \frac{z_0 - z}{\varrho} k_z'$$

nicht mehr in der einfachen Form $\frac{d}{dt} (k \cos \varphi)$ erscheint; da nämlich

$$\frac{d}{dt} (x_0 - x) = \frac{d\xi_+}{dt} - \frac{d\xi_-}{dt} = \frac{df_+}{dt} - \frac{df_-}{dt} \text{ etc.}$$

ist, hat man jetzt

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & \frac{x_0 - x}{\varrho} k_x' + \frac{y_0 - y}{\varrho} k_y' + \frac{z_0 - z}{\varrho} k_z' = \frac{d}{dt} (k_{\sigma-} \cos \varphi_-) \\ & - \frac{1}{\varrho} \left[k_{x-} \frac{d}{dt} (f_+ - f_-) + k_{y-} \frac{d}{dt} (g_+ - g_-) \right. \\ & \quad \left. + k_{z-} \frac{d}{dt} (h_+ - h_-) \right] \\ & + \frac{1}{\varrho} (k_{\sigma-} \cos \varphi_-) \left[\frac{x_0 - x}{\varrho} \frac{d}{dt} (f_+ - f_-) \right. \\ & \quad \left. + \frac{y_0 - y}{\varrho} \frac{d}{dt} (g_+ - g_-) + \frac{z_0 - z}{\varrho} \frac{d}{dt} (h_+ - h_-) \right]. \end{aligned} \right.$$

Es ergeben sich hieraus also zwei neue Glieder für $\mathfrak{X}_a$, welche leicht durch Einsetzung des Ausdruckes links in das zweite Integral der Gleichung (30) der zweitgenannten Arbeit gefunden werden können und die zusammen mit Φ_x bezeichnet werden sollen; es ist zu bemerken, daß Φ_x aus Größen besteht, welche

die Produkte von $\frac{df}{\mathfrak{X}}$ etc. mit k_ν ($\nu = x, y, z, \sigma$) enthalten. Es ergibt sich somit schließlich

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}_a = & - \frac{1}{\mathfrak{X}^2} \frac{d}{dt} \left[(1 - k_{\sigma-}^2) \left(\frac{\partial V_a}{\partial k_{\sigma-}^2} \right)_{k_{\sigma-}=0} - V_a \right] \frac{d\xi_-}{dt} \\ & + \int \sigma (1 - k_{\sigma-}^2) \frac{\partial U_0}{\partial x_0} d\tau_0 + \Phi_x \text{ etc.,} \end{aligned} \right.$$

worin

$$(16) \left\{ \begin{aligned} V_a &= \int_{R_+} \int_{R_-} \frac{\sigma^2 d\tau d\tau_0}{\varrho' \sqrt{1 - (k_{\sigma-} \sin \varphi')^2}}, \quad U_0 = \int_{R_-} \frac{\sigma d\tau}{\varrho' \sqrt{1 - (k_{\sigma-} \sin \varphi')^2}} \\ (\varrho' &= \sqrt{(x'_0 - x')^2 + (y'_0 - y')^2 + (z'_0 - z')^2}) \end{aligned} \right.$$

ist. Die Zeiger R_+ , R_- bedeuten hierbei den von $+e$ und $-e$ eingenommenen Raum, ferner stellen $x'_0 - x'$, $y'_0 - y'$, $z'_0 - z'$ die Koordinatendifferenzen nach der Verschiebung um die Strecken $\xi_{\pm}$, $\eta_{\pm}$, $\zeta_{\pm}$ dar.

Man kann nun eine wesentliche Vereinfachung dieser Ausdrücke durch die Einführung der Annahmen vornehmen, daß erstens die Quadrate und Produkte, sowie allgemein höhere Potenzen der Quotienten aus den Geschwindigkeiten der Teilchen durch die Lichtgeschwindigkeit vernachlässigt werden können, und daß zweitens die Verschiebungen $\xi_{\pm}$, $\eta_{\pm}$, $\zeta_{\pm}$ gegen die Abmessungen des Teilchens $\pm e$ sehr klein sind; die größte an dem Teilchen vorkommende Abmessung soll mit a bezeichnet werden. Hierdurch verschwinden vor allem die Glieder Φ und man kann sich in (15) auf die beiden ersten Summanden allein beschränken. Wie man sofort sieht, besteht die Beziehung

$$(17) \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\sqrt{[(x_0 - x) + (f_+ - f_-)]^2 + [(y_0 - y) + (g_+ - g_-)]^2 + [(z_0 - z) + (h_+ - h_-)]^2}},$$

so daß man durch Reihenentwicklung

$$(17') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\varrho'} &= \frac{1}{\varrho} + \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{\varrho} \right) (f_+ - f_-) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{1}{\varrho} \right) (g_+ - g_-) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{1}{\varrho} \right) (h_+ - h_-); \end{aligned} \right.$$

erhält. Setzt man diesen Wert in den ersten Summanden von $\mathfrak{X}_a$ ein; so ergibt sich zunächst

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} V_a &= V_0 + (f_+ - f_-) \int_{R_+} \int_{R_-} \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{\varrho} \right) d\tau d\tau_0 \\ &\quad + (g_+ - g_-) \int_{R_+} \int_{R_-} \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{1}{\varrho} \right) d\tau d\tau_0 \\ &\quad + (h_+ - h_-) \int_{R_+} \int_{R_-} \sigma^2 \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{1}{\varrho} \right) d\tau d\tau_0. \end{aligned} \right.$$

Man beachte nun, daß das Größenverhältnis von

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} V_0 = \left| a^4 \frac{a}{\mathfrak{B}} \right|,$$

jenes von

$$\frac{f}{\mathfrak{B}} \iint \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varrho} \right) d\tau d\tau_0 \text{ etc.} \\ = \left| a^4 \frac{f}{\mathfrak{B}} \right| \quad \text{oder} \quad = \left| a^4 \frac{a}{\mathfrak{B}} \right| \left| \frac{f}{a} \right| \text{ etc.}$$

ist; nach der zweiten Annahme sind daher die letzteren Glieder verschwindend klein gegen $(1/\mathfrak{B}) V_0$; der erste Summand in (15) besitzt demnach bis auf das Vorzeichen wie in (5) die Größe

$$- \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial k_{\sigma-}^2} \right)_{k_{\sigma-}=0} - V_0 \right] \frac{d^2 \xi_-}{dt^2} = M \frac{d^2 \xi_-}{dt^2}.$$

Was den zweiten Summanden von $\mathfrak{X}_a$ betrifft, so ist er seiner mathematischen Form nach die X -Komponente der elektrostatischen Anziehung, welche das Teilchen $-e$ auf das um die sehr kleine Strecke

$$s = \sqrt{(\xi_+ - \xi_-)^2 + (\eta_+ - \eta_-)^2 + (\zeta_+ - \zeta_-)^2} \\ = \sqrt{(f_+ - f_-)^2 + (g_+ - g_-)^2 + (h_+ - h_-)^2}$$

verschobene Teilchen $+e$ im Zustande der Ruhe ausübt. Man kann diese Komponente sofort angeben, wenn man die Kraft in der Richtung der Verschiebung s bestimmt und mit $f_+ - f_-/s$ multipliziert; man erhält so hierfür den Wert

$$-(f_+ - f_-) \int \int_{R_+ R_-} \frac{\sigma^2}{\varrho^3} d\tau d\tau_0 = -C(f_+ - f_-),$$

wobei C den konstanten Wert des bestimmten Integrales bedeutet. Das Größenverhältnis dieses Gliedes ist $|a^4(f/a)|$, es darf also nicht mehr vernachlässigt werden, weil der Betrag $|f/a|$ jenen von $|a/\mathfrak{B}|$ erreichen oder auch übertreffen kann.

Die gesamte, auf das Teilchen $+e$ wirkende elektrisierende Kraft (P) hat somit, da

$$\frac{d^2 \xi_+}{dt^2} - \frac{d^2 \xi_-}{dt^2} = \frac{d^2 f_+}{dt^2} - \frac{d^2 f_-}{dt^2}$$

ist, den Wert

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & -M \left(\frac{d^2 f_+}{dt^2} - \frac{d^2 f_-}{dt^2} \right) - C(f_+ - f_-) + eP \\ & + \frac{e}{\mathfrak{B}} \left[\beta \frac{d\xi_+}{dt} - \gamma \frac{d\eta_+}{dt} \right]. \end{aligned} \right.$$

2. Was den Leitungswiderstand W betrifft, so erfährt das Teilchen $+e$ durch ihn eine der Reibung vergleichbare Gegenkraft mit den Komponenten $W(d\xi_+/dt)$ etc., wodurch ein Teil der elektromagnetischen Energie in Wärme verwandelt wird.

3. Es sind nun noch die elektromotorischen Kräfte X des materiellen Trägers aufzusuchen. Zunächst wird die materielle Molekel unter dem Einflusse der ponderomotorischen Kraft des magnetischen Vektors selbst in Schwingung geraten und eine mechanische Gegenkraft mit den Komponenten $-m(d^2p/dt^2)$ etc. hervorrufen, wobei m die Masse der Molekel bedeutet; dann entsteht eine molekulare Gegenkraft elastischer Art zwischen der Molekel und ihren Nachbarmolekeln, welche m wieder in seine Ruhelage zurückzubringen sucht und den Wert $-b_p$ etc. hat. Von größerer Wichtigkeit sind aber zwei andere elektromotorische Kräfte, deren Ursprung in einer eigentümlichen Art von Bewegung innerhalb der materiellen Molekel zu suchen ist und die man als *Auflockerung* derselben bezeichnen könnte. Ein Bild für sie läßt sich durch die Vorstellung gewinnen, daß jede der beiden Elektrizitäten einen bestimmten Teil der Molekel, also einen Atomkomplex, in Bewegung versetzt, welche unter Umständen zu deren Zerreißen führen kann; offenbar werden diese Kräfte nicht von den Verschiebungen p, q, r , sondern bloß von $f_{\pm}, g_{\pm}, h_{\pm}$ abhängen. Man wird anzunehmen haben, daß die beiden Elektrizitäten mit ungleicher Stärke an ihren zugehörigen Atomkomplexen haften, also unter der Wirkung derselben elektrisierenden Kraft eine verschieden große Verschiebung erfahren, und daß ferner außerdem diese Atomkomplexe selbst in Bewegung geraten und eine gewisse lebendige Kraft erhalten. Dann hat man erstens das Auftreten einer inneren Gegenkraft zu berücksichtigen, welche die Verschiebung rückgängig zu machen strebt und deren Komponenten wegen der Kleinheit derselben dieser proportional, also gleich $-B_{\pm}(f_{\pm}, g_{\pm}, h_{\pm})$ gesetzt werden können; zweitens wird durch die Erteilung einer gewissen lebendigen Kraft an den betreffenden Atomkomplex das Entstehen einer inneren Gegenkraft mit den Komponenten

$$-A_{\pm} \left(\frac{d^2 f_{\pm}}{dt^2}, \frac{d^2 g_{\pm}}{dt^2}, \frac{d^2 h_{\pm}}{dt^2} \right)$$

bedingt, welche der Gegenkraft der Materie gegen eine Geschwindigkeitsänderung infolge ihrer Trägheit vergleichbar ist. Man hat nun zu erwägen, daß jede Auflockerung der Molekel einen chemischen Vorgang darstellt, bei dem die erste Kraft als die Wirkung der zwischen den Atomkomplexen tätigen chemischen Anziehung betrachtet werden muß, während die Arbeit der zweiten Kraft in der Form von freier Bewegungsenergie der schwingenden Elektrizität erscheint; es läßt sich daher die physikalische Bedeutung dieser beiden Kräfte dahin aussprechen, daß durch sie der Umsatz von chemischer Energie in elektromagnetische und umgekehrt während des Schwingungsvorganges beschrieben wird. Es möge nun vorausgesetzt werden, daß beide Kräfte rein innere sind, also den Beziehungen

$$(20\ a) \quad A_+ \cdot \frac{d^2 f_+}{dt^2} + A_- \frac{d^2 f_-}{dt^2} = 0 \text{ etc.,}$$

ferner

$$B_+ f_+ + B_- f_- = 0 \text{ etc.}$$

unterliegen, woraus sich mit Hilfe von (8) die Definitionsgleichung für λ in der Gestalt

$$(20\ b) \quad \lambda = \frac{A_+}{A_-} = \frac{B_+}{B_-}$$

ergibt. Diese Beziehungen sind gleichbedeutend mit der Bedingung, daß die inneren Eigenschwingungen der beiden Atomkomplexe, welche durch das positive und negative Teilchen in Bewegung gesetzt werden, die gleiche Schwingungszahl besitzen sollen, wie dies durch das Auftreten von Lichtschwingungen bei gewissen chemischen Prozessen erfahrungsmäßig gefordert wird. Die Konstanten $A_{\pm}$ und $B_{\pm}$ können als Maß der Auflockerung der Molekel bezeichnet werden.

Führt man die in 1., 2. und 3. abgeleiteten Kraftwerte ein, so erhält man schließlich die Bewegungsgleichung des positiven Teilchens:

$$(21\ a) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\frac{d^2 f_+}{dt^2} - \frac{d^2 f_-}{dt^2} \right) - C(f_+ - f_-) + eP \\ \quad + \frac{e}{\mathfrak{B}} \left(\beta \frac{d \xi_+}{dt} - \gamma \frac{d \eta_+}{dt} \right) - W \frac{d \xi_+}{dt} \\ - A_+ \frac{d^2 f_+}{dt^2} - B_+ f_+ - m \frac{d^2 p}{dt^2} - b p = 0 \text{ etc.,} \end{array} \right.$$

und ähnlich jene des negativen Teilchens:

$$(21\ b) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M \left(\frac{d^2 f_-}{dt^2} - \frac{d^2 f_+}{dt^2} \right) - C(f_- - f_+) - eP \\ \quad - \frac{e}{\mathfrak{B}} \left(\beta \frac{d \xi_-}{dt} - \gamma \frac{d \eta_-}{dt} \right) - W \frac{d \xi_-}{dt} \\ -A_- \frac{d^2 f_-}{dt^2} - B_- f_- - m \frac{d^2 p}{dt^2} - b p = 0 \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man zunächst die Bewegungsgleichungen der materiellen Molekel in der Gestalt:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{2\mathfrak{B}} \left[\beta \frac{d h}{dt} - \gamma \frac{d g}{dt} \right] - \frac{1}{2} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} W \frac{d f}{dt} \\ \quad - W \frac{d p}{dt} - m \frac{d^2 p}{dt^2} - b p = 0 \text{ etc.,} \end{array} \right.$$

wenn gemäß der Bezeichnung von $e f_+ - e f_-$ als dielektrische Verschiebungskomponente $\bar{e} f$

$$f_+ - f_- = f,$$

ferner nach (8)

$$f_+ + f_- = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} f \text{ etc.}$$

gesetzt wird.

Es werde behufs Untersuchung dieser Gleichung vorausgesetzt, daß das Mittel keine Absorption besitzt, also $W = 0$ ist und daß ferner das Teilchen $\pm e$ eine Schwingung von der Gestalt $s e^{2\pi n i t}$ ausführt; man ersieht dann zunächst, daß für schwächere magnetische Kräfte, also auch für die des eigenen Feldes, das linksstehende, die ponderomotorische Kraft darstellende erste Glied außerordentlich klein ist; man wird daraus schließen müssen, daß das eigene magnetische Feld überhaupt zu keiner für den Schwingungsvorgang in Betracht kommenden Bewegung der Molekel Veranlassung gibt. Wenn man weiter ein konstantes äußeres magnetisches Feld mit der Stärke H_0 vorhanden annimmt, so wird der Mittelpunkt der Molekel gemäß (22) eine Schwingung von der Form $s_0 e^{2\pi n i t}$ vollführen, deren Amplitude s_0 das Größenverhältnis

$$s_0 = \frac{\frac{e}{2\mathfrak{B}} H_0}{-(2\pi n)^2 m + b}$$

besitzt. So lange nun die Schwingungen des elektrischen Teilchens nicht mit einer Eigenschwingung der Molekel zu-

sammenfallen, ist der mit s multiplizierte Bruch, welcher zugleich das Größenverhältnis der Amplitude der Molekelschwingung zu jener des Teilchens angibt, eine sehr kleine Zahl; hieraus folgt, daß die Bewegung des Molekelmittelpunktes auch bei starken äußeren Feldern gänzlich vernachlässigt werden kann. Es verschwindet somit vor allem der Einfluß, den die Bewegung der Molekel als Träger der neutralen Elektrizität auf diese ausübt und welcher sich im Auftreten einer neuen, bei der Erklärung des Unipolareffektes besprochenen elektrisierenden Kraft äußern würde.

Der Vollständigkeit wegen muß übrigens erwähnt werden, daß die Verschiebungen p , q , r die durch den elektromagnetischen Strahlungsdruck hervorgebrachte Bewegung liefern, wenn man α , β , γ als die magnetischen Kräfte des eigenen Feldes betrachtet; tatsächlich ist die durch diesen Druck entwickelte Bewegungsenergie erfahrungsmäßig sehr klein gegen die elektromagnetische Energie der Strahlung selbst, wodurch die eben angeführten Bemerkungen bestätigt werden.

Subtrahiert man die Gleichungen (21 a) und (21 b), so erhält man, wenn gemäß (20)

$$A_+ \frac{d^2 f_+}{dt^2} - A_- \frac{d^2 f_-}{dt^2} = \frac{A_+ + \lambda A_-}{1 + \lambda} \frac{d^2 f}{dt^2} \\ = \frac{2 A_+}{1 + \lambda} \frac{d^2 f}{dt^2} = 2 A \frac{d^2 f}{dt^2} \text{ etc. ,}$$

$$B_+ f_+ - B_- f_- = \frac{B_+ + \lambda B_-}{1 + \lambda} f = \frac{2 B_+}{1 + \lambda} f = 2 B f \text{ etc. ,}$$

ferner

$$M + A = M_0, \quad C + B = C_0 \quad \text{und} \quad W = 2 W_0$$

gesetzt wird, die Beziehungen

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & - M_0 \frac{d^2 f}{dt^2} - W_0 \frac{df}{dt} - C_0 f + e P \\ & + \frac{e}{2 \mathfrak{B}} \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \left(\beta \frac{dh}{dt} - \gamma \frac{dg}{dt} \right) \\ & + \frac{e}{\mathfrak{B}} \left(\beta \frac{dr}{dt} - \gamma \frac{dq}{dt} \right) = 0 \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

Dividiert man durch e und berücksichtigt, daß gemäß den an die Gleichungen (22) geknüpften Bemerkungen das letzte, den unipolaren Effekt der bewegten materiellen Molekel darstellende Glied wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden

kann, so erhält man endlich für die Komponenten der dielektrischen Verschiebungen ef , eg , eh die Gleichungen

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \left(\frac{M_0}{e^2} \right) \frac{d^2 f}{dt^2} - \left(\frac{W_0}{e^2} \right) \frac{d \overline{ef}}{dt} - \left(\frac{C_0}{e^2} \right) \overline{ef} \\ & + P + \frac{1}{2 \mathfrak{B} e} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left[\beta \frac{d \overline{eh}}{dt} - \gamma \frac{d \overline{eg}}{dt} \right] \text{ etc.,} \end{aligned} \right.$$

welche das Endziel dieser Entwicklungen bilden. Diese Gleichungen stimmen vollkommen mit jenen der Elektronentheorie überein, wie sie z. B. die Darstellung von Drude¹⁾ bietet, nur tritt, wie schon erwähnt wurde, hier der Begriff der dielektrischen Verschiebung an die Stelle der dort eingeführten elektrischen Verschiebung mit den Komponenten ξ , η , ζ ; ferner besitzen bei Drude die Vektoren α , β , γ das entgegengesetzte Zeichen wie hier. Ein Unterschied ist nur bezüglich des Faktors $1 - \lambda/1 + \lambda$ vorhanden, welcher in dieser Theorie noch im Ausdrücke für die ponderomotorischen Kraftkomponenten der magnetischen Vektoren auftritt. Auch ist zu bemerken, daß hier im Gegensatze zum Maßsystem der Elektronentheorie nicht die auf die positive (oder negative) Einheit der elektrischen Masse, sondern die auf die Einheit der neutralen Elektrizität wirkende elektrisierende Kraft, also der doppelte Wert, mit P , Q , R bezeichnet ist, wie in der erstgenannten Arbeit näher ausgeführt wurde. Wenn man demnach im Ausdrücke für die Stromkomponenten

$$\frac{d}{dt} \overline{ef}, \quad \frac{d}{dt} \overline{eg}, \quad \frac{d}{dt} \overline{eh}$$

der Gleichungen (10) die Maßeinheiten der Elektronentheorie einführen wollte, so müßte man sowohl P , Q , R als auch die magnetischen Vektoren α , β , γ mit 2 multiplizieren. Hiermit erledigt sich auch der scheinbare Unterschied zwischen diesen Gleichungen und jenen der Elektronentheorie hinsichtlich des im Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte auftretenden Faktors $1/2$. Wenn bloß das eigene magnetische Feld der Schwingungen vorhanden ist, so verschwinden wegen der Klein-

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik, 2. Aufl. Leipzig 1906. p. 422, Gleichung (42) u. ff.

heit der elektrischen Verschiebungen die ponderomotorischen Glieder

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{B} e} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left[\beta \frac{d \bar{e} h}{d t} - \gamma \frac{d \bar{e} g}{d t} \right] \text{ etc.}$$

und es ergeben sich die Gleichungen für die normale und anomale Brechung; ist jedoch ein starkes äußeres magnetisches Feld wirksam, so geben diese ponderomotorischen Kräfte Veranlassung zum Auftreten der magnetischen Drehung der Polarisationssebene. Wenn der äußere magnetische Vektor γ_0 senkrecht zu den elektrisierenden Kräften P, Q der Lichtschwingungen liegt und das Mittel keine Absorption besitzt, also $W=0$ ist, so liefern die bei Drude durchgeführten Rechnungen unter Berücksichtigung der Gleichung (10) für die Strömungskomponenten den Wert des Drehungswinkels δ in der Form

$$(25) \quad \delta = \arctg \frac{P}{Q} = \frac{\pi}{2} - \Theta \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \gamma_0 z,$$

falls man eine einzige Art schwingender Molekel voraussetzt; Θ ist hierbei eine leicht berechenbare positive Größe. Wie man sieht, hängt die Größe und die Richtung der magnetischen Drehung wesentlich von dem Vorzeichen und dem Betrage des Faktors $1 - \lambda / 1 + \lambda$ ab, d. h. von dem Verhältnisse der den Umsatz zwischen chemischer und elektromagnetischer Energie bestimmenden Konstanten $A_{\pm}$ und $B_{\pm}$.

Es sei bemerkt, daß die Gleichungen (24) bezüglich der Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante D von der Dichte d auf die ältere Beziehung

$$\frac{D-1}{d} = \text{konst.}$$

führen; um die genauere Formel

$$\frac{D-1}{D+2} \frac{1}{d} = \text{konst.}$$

zu erhalten, müßten wohl ähnliche Betrachtungen angestellt werden, wie sie Planck¹⁾ unter Zugrundelegung der Elektronentheorie durchgeführt hat und die darauf gegründet sind, daß sich das äußere Feld in unmittelbarer Nähe des schwingenden Teilchens von dessen innerem Felde unterscheidet. Der Ver-

1) M. Planck, Berliner Ber. 1902. p. 470—494.

fasser war noch nicht in der Lage, diese Betrachtungen auf die Theorie der dielektrischen Verschiebungen zu übertragen, weshalb dieser Punkt einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben muß.

V. Einige Folgerungen aus den Grundgleichungen.

1. Vor allem erkennt man, daß bei bewegter Materie die freie Bewegungsenergie des neutralen Teilchens $\pm e$ den Wert Null hat, da sich wegen der gleichen Richtung der Geschwindigkeit die elektrodynamische Wirkung der beiden Teilchen in $+e$ und $-e$ vollständig aufhebt. Hierin liegt wieder ein Unterschied gegenüber der Elektronentheorie, bei welcher durch das Bestehen wahrer elektrischer Massen die materielle Masse auch im unelektrischen Zustande scheinbar vergrößert wird.

2. Es werde ferner das in der erstgenannten Abhandlung eingeführte Koordinatensystem wieder zugrunde gelegt, in welchem die XY -Ebene in der Zeichenebene liegt und die positive Y -Achse sich nach rückwärts erstreckt; die positive Z -Achse verlaufe horizontal nach rechts, die positive X -Achse nach aufwärts. Setzt man γ_0 als positiv voraus, so besitzen die Ampèreschen Ströme eine positive Drehung, wenn man darunter jene versteht, welche, von einem Punkte der positiven Z -Achse aus betrachtet, im umgekehrten Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers vor sich geht. Dann ist nach (25)

$$(26) \quad d\delta = -\Theta \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \gamma_0 dz.$$

Bekanntlich erfolgt bei den meisten Mitteln die Drehung der Polarisationssebene im Sinne der Ampèreschen Ströme, es muß also, damit $d\delta$ positiv wird, $1-\lambda/1+\lambda$ negativ, also $\lambda > 1$ sein, während für jene Mittel, welche die Polarisationssebene im umgekehrten Sinne drehen, $\lambda < 1$ angenommen werden muß. Wenn man die Definition (20) für λ anwendet, so läßt sich dieses Ergebnis bei Annahme eines einzigen schwingenden Teilchens in folgender Fassung aussprechen:

Ein Mittel dreht unter dem Einflusse eines senkrecht zu den Lichtschwingungen verlaufenden äußeren magnetischen Feldes die Polarisationssebene im Sinne der Ampèreschen Ströme, wenn die durch die gleiche elektrische Verschiebung hervorgerufene Auflockerung

der Molekel (also die in elektromagnetische freie Bewegungsenergie umgewandelte chemische Energie) für die positive Elektrizität größer als für die negative ist; im umgekehrten Falle findet eine Drehung entgegen den Ampèreschen Strömen statt.

Würde man $A_- = 0$ annehmen, so erhielte man $\lambda = \infty$, also $1 - \lambda/1 + \lambda = -1$, und es wäre $A = B = 0$, ferner $M_0 = M$, $C_0 = C$. Es ist dies jener Fall, wo bloß das negative Teilchen an der Bewegung teilnimmt, während das positive mit der materiellen Molekel nahezu ruht; er entspricht in der Elektronentheorie dem von Abraham beschriebenen Modell einer Lichtquelle. Bekanntlich zeigen aber die Versuche, daß der Quotient $e/\mathfrak{B}M$ etwas kleiner ist, als der theoretisch aus den Messungen an Kathodenstrahlen berechnete; es würde sich dieses Ergebnis nach den entwickelten Vorstellungen so deuten lassen, daß λ zwar größer als 1, aber eine endliche Zahl ist, daß also auch das positive Teilchen der neutralen Elektrizität sich in Schwingung befindet.

3. Weiter ist eine Folgerung bemerkenswert, die sich an die Tatsache knüpft, daß für den freien Äther keine Brechung und magnetische Drehung der Polarisationssebene eintritt, also die freie Bewegungsenergie und die ponderomotorische Kraft des magnetischen Vektors verschwindet. Es heißt dies, daß für den Äther $\lambda = 1$ zu setzen ist, demnach die beiden Elektrizitäten als gleich beweglich betrachtet werden müssen; damit aber auch die freie Bewegungsenergie verschwindet, muß man annehmen, daß die Amplituden unendlich klein sind; hiermit steht auch die Vorstellung von der kontinuierlichen Raumerfüllung der Elektrizität des Äthers im Einklange, da in diesem Falle jede endliche, wenn auch noch so kleine Verschiebung der unendlich ausgedehnten Äthermasse unendlich große elektrisierende Kräfte voraussetzen würde. Diese Betrachtung legt die Auffassung nahe, daß die dielektrischen Verschiebungen im Äther eigentlich fiktive Größen sind, welche zu dem Zwecke in die Gleichungen einzuführen sind, um die Haupteigenschaft des freien Äthers, nämlich reine Impulse elektromagnetischer Natur von Materie zu Materie zu vermitteln, mathematisch beschreiben zu können. Auf diese, übrigens auch der Elektronentheorie geläufige Vorstellung führt bereits der Stefansche Ansatz für die elektrisierenden Kräfte, wie der Verfasser

(Monatshefte für Mathematik und Physik, XII. Jahrgang. 1901. p. 264) gezeigt hat.

4. Um endlich einen Einblick in die Größenordnung der auftretenden Ausdrücke zu erhalten, mögen einige zunächst nur als Abschätzungen zu betrachtende Rechnungen durchgeführt werden. Die Konstante C_0 läßt sich berechnen, wenn die betreffende Eigenschwingung des Doppelteilchens $\pm e$ bekannt ist. Es werde z. B. die ultrarote Eigenschwingung beim Wasser zugrunde gelegt, für welche Drude die Wellenlänge $7,5 \cdot 10^{-3}$, also die Schwingungszahl $n_0 = 4 \cdot 10^{13}$ berechnet hat. Hieraus folgt $C_0 = (2\pi n_0)^2 M_0$; für $e/\mathfrak{B} M_0$ ist hier der Wert 10^4 einzuführen, so daß, da annähernd $e = 4,7 \cdot 10^{-10}$, $e/\mathfrak{B} = 1,6 \cdot 10^{-20}$ gesetzt werden kann, C_0 den abgerundeten Betrag $C_0 = 9 \cdot 10^3$ besitzt. Betrachtet man eine unendlich langsame dielektrische Verschiebung, welche somit der Gleichung $C_0 f = eP$ etc. genügt, so ist für die Einheit der elektrisierenden Kraft annähernd $f = 5 \cdot 10^{-13}$; bei den Lichtschwingungen ist f entsprechend kleiner. Um schließlich das Größenverhältnis der Abmessungen a des Doppelteilchens $\pm e$ zu erhalten, werde angenommen, daß C_0 dieselbe Größenordnung wie C habe, wobei das Integral

$$C = \int_{R_+} \int_{R_-} \frac{d\tau d\tau_0}{\varrho^3},$$

abgesehen von einer von dessen Form abhängigen Konstanten, das Größenverhältnis $|e^2/a_m^3|$ besitzt, wenn a_m einen mittleren Wert dieser Abmessungen darstellt. Es ergibt sich dann für a_m das Größenverhältnis 10^{-8} , also annähernd jenes der materiellen Molekel; man muß daraus schließen, daß das neutrale Teilchen $\pm e$, welches die ultrarote Eigenschwingung des Wassers aussenden würde, seiner Größe nach mit der Molekel des Wassers zusammenfällt. Zugleich ersieht man, daß sich das Verhältnis $|f/a_m|$ tatsächlich als sehr klein erweist, wie in der vorhergehenden Untersuchung angenommen wurde.

VI. Auffassung des schwingenden Doppelteilchens als elektromagnetischen Resonator.

Im vorhergehenden Abschnitte wurde der Wert von a_m unter der Voraussetzung berechnet, daß das Doppelteilchen $\pm e$

das Elementarquantum an positiver und negativer Elektrizität besitzt. Eine genauere Betrachtung lehrt, daß in der hier vorgetragenen Theorie diese Annahme im allgemeinen unzulässig ist; es läßt sich nämlich zeigen, daß e und a_m durch zwei Gleichungen bestimmt sind und Werte besitzen, welche von der Gestalt des Teilchens $\pm e$ und auch von seinen sonstigen Bestimmungsstücken abhängen. Es werde, um einen bestimmten Fall zu betrachten, eine Eigenschwingung des Teilchens von der Art der Lichtschwingungen mit höherer Schwingungszahl n_0 angenommen, für welche mit genügender Annäherung $\lambda = \infty$, also $A = B = 0$ und somit $M_0 = M$, $C_0 = C$ gesetzt werden kann; dann lautet die erste Gleichung:

$$C = \left| \frac{e^2}{a_m^3} \right| = K \frac{e^2}{a_m^3},$$

wo K eine von der Gestalt des Doppelteilchens abhängige Konstante bedeutet. Da nun C mit der Schwingungszahl n_0 durch die Beziehung $C = (2\pi n_0)^2 M$ zusammenhängt, so erhält man, wenn der bekannte, aus den Versuchen bestimmbar Quotient e/M zwischen der statischen und elektrodynamischen Masse gleich κ gesetzt wird,

$$(2\pi n_0)^2 M = K \frac{e^2}{a_m^3} \quad \text{oder} \quad \frac{e}{a_m^3} = \frac{(2\pi n_0)^2}{\kappa K}.$$

Andererseits wird sich M , welches die Größenordnung $|e^2/a_m^5|$ hat, in der Form

$$M = K' \frac{e^2}{a_m^5}$$

darstellen lassen, wo K' eine zweite, von der Gestalt des Doppelteilchens abhängige Konstante ist, so daß man

$$\frac{e}{M} = K' \frac{e}{a_m^5} \quad \text{oder} \quad \frac{e}{a_m^5} = \frac{1}{\kappa K'}$$

erhält. Hieraus ersieht man, daß e und a_m eindeutig aus den Größen n_0 , K , K' und κ berechenbar sind; man muß also folgern, daß e nicht für jedes Doppelteilchen dieselbe Größe besitzen kann.

Eine zweite Schwierigkeit dieser Theorie liegt darin, daß die Größenverhältnisse der Abmessungen des Teilchens $\pm e$ unter Umständen jenen der materiellen Molekel gleichkommen können; es ist demnach die Annahme, daß im Raumteilchen Δr

N Doppelteilchen vorhanden sind, welche zusammen nach Gleichung (10) die Stromstärke liefern, schwer mit der Bedingung in Einklang zu bringen, daß $\Delta \tau$ wirklich noch von molekularer Abmessung ist, wenn eine große Zahl von Eigenschwingungen besteht, also viele Teilchen $\pm e$ anzunehmen sind. Von dieser Schwierigkeit ist natürlich auch die Elektronentheorie nicht vollkommen frei, wenn sie mit der Forderung der Theorie der elektrolytischen Dissoziation, welcher sie den Begriff des Elementarquantums entlehnt hat, in Übereinstimmung bleiben soll, wonach jede Molekel eine ganz bestimmte, ihrer Wertigkeit entsprechende Anzahl von Elementarquanten, also Elektronen, tragen muß.

Diese Betrachtungen legen den Gedanken nahe, daß den Gleichungen (24) eine ganz andere Bedeutung zugrunde gelegt werden muß, als dies in den eben gegebenen Darlegungen der Fall war. Man wird unschwer zur Vorstellung geführt, daß nicht für jede Eigenschwingung ein besonderes Doppelteilchen vorhanden ist, sondern daß ein ganzes System solcher Eigenschwingungen einem einzigen Doppelteilchen zugehört, welches somit als elektromagnetischer Resonator aufzufassen ist. Wie man erkennt, führt diese Theorie in letzter Linie auf die Anschauungen von Planck, wobei jedoch die Frage hier offen bleibt, ob man die ganze, an der Molekel haftende Elektrizität als einen einzigen Resonator zu betrachten oder aber anzunehmen hat, daß die in der Molekel vereinigten Atomkomplexe je nach ihrer Wertigkeit eine bestimmte Anzahl von räumlich getrennten Resonatoren tragen, von denen jeder das Elementarquantum an Elektrizität besitzt. Von diesem Gesichtspunkte aus läßt sich die Gleichung (24) so deuten, daß sie den Vorgang der Gesamtschwingung mathematisch durch das Bild von superponierten Einzelschwingungen einer Reihe fiktiver, mit bestimmten Eigenschwingungen begabter Doppelteilchen beschreibt. Legt man diese Auffassung zugrunde, so verlieren die Konstanten der Schwingungsgleichung (24) ihre physikalische Bedeutung und sind als Größen zu betrachten, welche wesentlich von der Gestalt des Resonators abhängen, jedoch behufs Versinnlichung des Vorganges als Konstante in den Schwingungsgleichungen gewisser gedachter Teilchen $\pm e$, betrachtet werden können. Dann ver-

schwinden die vorhin erwähnten Schwierigkeiten, indem man nicht mehr jedem solchen Teilchen die gleiche Größe und gleiche Ladung zuzuschreiben hat. Die vorher durchgeführten mathematischen Betrachtungen verlieren hierbei in keiner Weise ihre Geltung, wiewohl sie sich zunächst auf die Gesamtschwingung beziehen, da die auftretenden Gleichungen lineare Differentialgleichungen sind, also die Eigenschaften des Ganzen durch die Summe der Eigenschaften der einzelnen Teile beschreiben.

Diese Auffassung des schwingenden Doppelteilchens der neutralen Elektrizität ist übrigens schon in Analogie mit der Theorie der elastischen Körper naheliegend, da man ja nicht mehr berechtigt ist, einem elektrischen Doppelteilchen von selbständiger Gestalt eine einzige Eigenschwingung zuzuschreiben, sobald man die Annahme macht, daß die darauf wirkenden Kräfte mathematisch betrachtet, die Form von elastischen Kräften tragen. Eine eingehende Untersuchung ist aber zurzeit sowohl wegen des hypothetischen Charakters jeder Annahme über die Gestalt der Teilchen als auch wegen der ganz außerordentlichen Schwierigkeiten mathematischer Natur bei der Berechnung der Schwingungen einigermaßen komplizierter Systeme wohl ausgeschlossen.

Die hier durchgeführten Untersuchungen stehen nicht im Widerspruche mit dem Auftreten freier Elektronen bez. freier Elementarquanten, wie sie die Theorie der Kathoden- und Kanalstrahlung, sowie jene der elektrolytischen Dissoziation fordert. Sie beziehen sich ja nur auf solche periodische Bewegungen der neutralen Elektrizität, bei welchen die gegenseitige Verschiebung der Teilchen $\pm e$ sehr klein ist; es wurde aber schon darauf hingewiesen, daß die Auflockerung der Molekel auch bis zu deren vollständigem Zerfall gehen kann, wie sich dies beispielsweise bei solchen Schwingungen, deren Frequenz mit jener der Eigenschwingungen der Atomkomplexe zusammenfallen, schon aus mathematischen Gründen als wahrscheinlich ergibt; setzt man hierbei voraus, daß die Elektrizität an dem betreffenden Atomkomplex haften bleibt, so gelangt man zur Vorstellung des Ions. Es ist aber auch der Fall denkbar, daß die eine Elektrizität (gegebenenfalls auch beide) überhaupt keine Auflockerungsarbeit zu verrichten hat; sie

wird sich dann ganz unabhängig von der Materie nur unter dem Einflusse der elektrisierenden Kräfte und der etwa vorhandenen elektrostatischen Wirkung der übrigen Ladungen bewegen können. Man erkennt, daß hierdurch die Möglichkeit des Bestehens von bewegten elektrischen Massen ohne materiellen Träger, also von Elektronen im Sinne der Elektronenstrahlung, gegeben ist. Ferner erkennt man, daß bei solchen chemischen Vorgängen, welche in den Atomkomplex selbst eingreifen, also die innere Natur des Atomes berühren, auch das Austreten freier neutraler Elektrizitätsteilchen möglich ist, da in den Betrachtungen der erstgenannten Arbeit stets vorausgesetzt wurde, daß die Materie eine ganz bestimmte, also von ihren Atomen abhängige Menge neutraler Elektrizität mit sich führt. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß die Emanation der radioaktiven Substanzen mit dem Ausstoßen solcher Teilchen freier neutraler Elektrizität in engem Zusammenhange steht.

VII. Über den Michelsonschen Versuch.

Eine Schwierigkeit für die vorliegende und auch für die Elektronentheorie liegt in der Erklärung des Michelsonschen Versuches, welcher die Annahme von der absoluten Ruhe des freien Lichtäthers in Frage stellt. Nun muß man aber berücksichtigen, daß der Michelsonsche Versuch eigentlich Glieder zweiter Potenz der Größe k betrifft, worin k das Verhältnis der Geschwindigkeit der Materie zur Lichtgeschwindigkeit bedeutet. In allen bisherigen Untersuchungen wurden aber die Gleichungen für die Reflexion und die Dispersion der Strahlung bei bewegten Mitteln nur bis auf Glieder erster Potenz von k entwickelt, so daß sich ein genauer Überblick über die auftretenden Glieder zweiter Potenz von k derzeit nicht geben läßt und somit auch die Frage offen bleibt, ob das Ergebnis dieses Versuches überhaupt mit den Lorentzschen Gleichungen im Widerspruche steht. Für eine genaue Durchforschung der bei diesem Versuche auftretenden Verhältnisse genügt jedenfalls nicht mehr die gewöhnlich zu seiner Erklärung verwendete Zeichnung. Schon Lorentz hat gefunden, daß auch die Aberration des senkrecht zur direkten Strahlung verlaufenden gespiegelten Strahles in Rechnung gezogen werden muß; dies setzt aber voraus, daß der am oberen Spiegel reflektierte,

in das Beobachtungsfernrohr tretende Lichtstrahl nicht mehr in der Richtung der Fernrohrachse, sondern schief dazu einfällt. Dann muß aber auch der von der Lichtquelle kommende, horizontal verlaufende und von der eingeschobenen Platte zum Fernrohr gespiegelte Strahl einen ganz anderen Weg zurückgelegt haben, als gewöhnlich in der Zeichnung angegeben wird, wenn er überhaupt mit dem vorher erwähnten interferieren soll. Um also eine exakte Darstellung des ganzen Verlaufes der Strahlen beim Michelsonschen Versuche zu geben, müßten zuerst die Gesetze der Spiegelung und Brechung bis auf Glieder mit der zweiten Potenz von k genau entwickelt werden; die Berechnungen sind aber mit ganz außerordentlichen mathematischen Schwierigkeiten verknüpft, deren Bewältigung dem Verfasser bisher nicht vollständig gelungen ist. Nur scheint sich zu ergeben, daß eine Art optischer Verkürzung eintritt, so daß in der gesamten, aus der Bewegung der spiegelnden Flächen und des Fernrohres sich zusammensetzenden Aberration ein Glied von der Ordnung k^2 auftritt, um welches bei der Einstellung des die Strahlen zum Beobachtungsfernrohre zurückwerfenden Spiegels (sowie der Platte) der betreffende Arm verkürzt erscheint, um die Interferenz zu bewirken. Der Verfasser muß sich jedoch dermalen noch darauf beschränken, auf die Möglichkeit dieser Erklärung hinzuweisen, wodurch der Widerspruch zwischen der Annahme eines absolut ruhenden Lichtäthers und dem Ergebnis der Erfahrung gelöst würde.

Wien, im Dezember 1906.

(Eingegangen 12. Dezember 1906.)

**2. Spezifische Ladung
und Geschwindigkeit der durch Röntgenstrahlen
erzeugten Kathodenstrahlen;
von A. Bestelmeyer.**

Fallen Röntgenstrahlen auf einen Körper, insbesondere auf ein schweres Metall, so geht von der Auftreffstelle der Röntgenstrahlen eine neue Strahlung aus, die zum Teil aus Röntgenstrahlen, zum Teil aus Kathodenstrahlen besteht. Für letztere hat Hr. Dorn die Geschwindigkeit unter der Voraussetzung bestimmt, daß die spezifische Masse ϵ/μ für diese Strahlen dieselbe sei, wie die in anderen Fällen gefundene. So wahrscheinlich diese Annahme a priori ist, so ist sie immerhin nicht bewiesen; dann aber bieten die so erzeugten Kathodenstrahlen die Möglichkeit der Bestimmung von ϵ/μ unter sehr reinen Verhältnissen. Wenn für diese wichtige Größe bei geringen Geschwindigkeiten der Wert $1,8 \dots 10^7$ wiederholt gefunden wurde und schon im Begriffe steht, unter die sicher bekannten physikalischen Konstanten gerechnet zu werden (für ϵ/μ scheint $1,8 \dots 10^7$ C.G.S. für langsame Kathodenstrahlen nun definitiv sicher zu sein¹⁾), so mag dem gegenüber schon hier erwähnt werden, daß meine Versuche einen merklich kleineren Wert ergeben haben.

Versuchsanordnung.

Die Untersuchungsmethode bestand darin, aus den ursprünglich diffusen Kathodenstrahlen, in denen alle Richtungen und ein großes Intervall verschiedener Geschwindigkeiten vertreten sind, durch Gegenschalten von magnetischer und elektrischer Kraft ein nahe in einer Ebene verlaufendes Bündel von begrenztem Geschwindigkeitsbereich auszusondern und für dieses

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 17. p. 404. 1905.

durch photographische Fixierung den Krümmungsradius in einem bekannten Magnetfeld festzustellen.

Die Versuchsanordnung ist aus Figg. 1 und 2 zu ersehen.

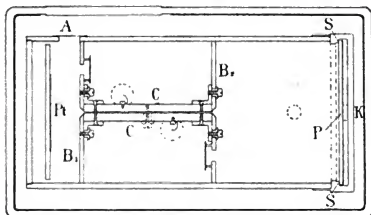


Fig. 1 ($\frac{1}{3}$ nat. Größe). Horizontalschnitt.

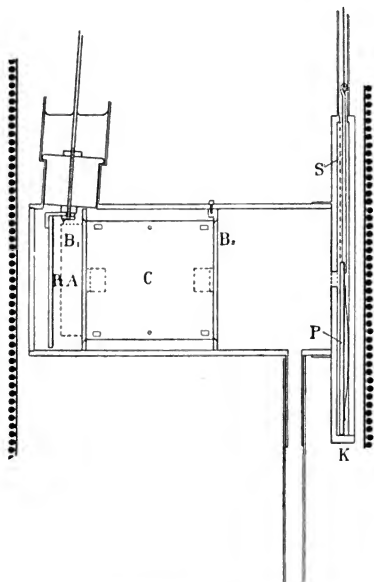


Fig. 2 ($\frac{1}{3}$ nat. Größe). Vertikalschnitt.

Kathodenstrahlapparat.

Der ganze Apparat ist in einem an die Quecksilberpumpe angeschlossenen zylinderförmigen Messinggehäuse von 8 cm Durchmesser eingeschlossen. Durch das Aluminiumfenster *A* (0,1 mm Dicke) fallen die Röntgenstrahlen auf das Platinblech *P*, von welchem folglich die diffuse Kathodenstrahlung ausgeht. Die beiden Platten des Kondensators *C*¹⁾ werden unter Zwischenschaltung von Spiegelglasplättchen an den vier Ecken, durch zwei mit Hartgummibüchsen isolierte Schrauben leicht gegeneinander gedrückt. Andererseits ist der Kondensator durch vier in gleicher Weise isolierte Schrauben an den geerdeten Blenden *B*₁ und *B*₂ befestigt. Diese haben vertikale Spalte von 0,1 cm Breite und 6 cm Länge. Die photographische Platte *P* wird durch einen Messingblechrahmen mit federnder Rückwand gegen die Schienen *SS* gedrückt. Mittels eines Schliffs kann ein Faden auf einen Messingstab aufgewickelt werden; dadurch werden ohne Öffnung des Vakuums der Reihe nach verschiedene Streifen der photographischen Platte vor den 8 mm breiten horizontalen Ausschnitt der Kassette *K* gebracht.

Die Dicke der die Kondensatorplatten trennenden Spiegelglasstückchen wurde zu $0,0580 \pm 0,0001$ cm bestimmt; eine nachträgliche direkte Prüfung des Abstandes mittels zwischen geschobener Glaskügelchen verschiedenen Durchmessers ergab, daß die Platten in der Nähe der sie zusammenhaltenden Schrauben ein wenig durchgebogen waren, doch war der Abstand nirgends kleiner als 0,057 cm; da der Abstand dementsprechend auf der anderen Seite der trennenden Glasstückchen etwas größer als deren Dicke war, so war der mittlere Abstand auf mindestens 1 Proz. gleich der Dicke der Glasplättchen. Die Platten selbst sind aufeinander matt geschliffen. Ihre Länge beträgt 6,68 cm; von den Blenden *B*₁ und *B*₂ sind sie durch Glimmerblättchen von 0,005 cm Dicke isoliert. Der Abstand der photographischen Platte von der ihr abgewendeten Seite der Blende *B*₂ beträgt 6,65 cm.

1) Eine Prüfung der Permeabilität der Kondensatorplatten ergab, daß dieselbe — entsprechend der Empfindlichkeitsgrenze der angewandten Methode — sicher 1,0003 nicht überstieg.

Magnetfeld.

Der beschriebene Apparat befindet sich in der Mitte einer Spule von rechteckigem Querschnitt, die in *einer* Lage aus 3,5 mm starkem, gut isoliertem Kupferdraht auf eine Zinkblechunterlage gewickelt ist. An der dem Aluminiumfenster entsprechenden Stelle befindet sich ein Ausschnitt im Zinkblech, und die Kupferdrähte sind dort durch Kupferblechstreifen von 5 mm Breite und 1,3 mm Höhe ersetzt.

Die Höhe der ganzen Spule beträgt 76,78 cm, die Windungszahl 179, woraus sich die mittlere Windungszahl pro Zentimeter zu 2,33 berechnet. Für den mittleren Teil der Spule wurde die Windungszahl durch verschiedene Messungen bestimmt.

In der Mitte der vier Seiten ergab sich für die mittelsten 30 Windungen:

2,31 2,32 2,345 2,35 Mittel: 2,33 Windungen pro cm

An der Breitseite der Spule wurden für die mittleren Zonen ferner die folgenden Zahlen bestimmt:

Mittlere Zone von 6 Windungen:

2,372 2,406 2,359 2,424 Mittel: 2,390

Darunterliegende Zone von 6 Windungen:

2,330 2,358 2,306 2,268 Mittel: 2,316

Oberhalb der mittleren liegende Zone von 6 Windungen:

2,359 2,267 2,426 2,347 Mittel: 2,350

Da der Einfluß der mittleren Windungen größer ist als der der entfernteren, wurde in die Rechnung als Hauptmittel eingeführt:

2,35 Windungen pro cm.

Für das Feld in einem Punkte des mittleren Querschnittes einer rechteckigen Spule erhält man einen ziemlich umfangreichen Ausdruck, der sich für die Punkte einer zu dem einen Seitenpaar parallelen Mittellinie reduziert auf:

$$H = 4i \left[\operatorname{arctg} \frac{m_0 \sqrt{q_0^2 + l^2} + q_0^2}{m_1 \cdot l} + \operatorname{arctg} \frac{m_2 \sqrt{q_2^2 + l^2} + q_2^2}{m_1 \cdot l} \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{m_1 \sqrt{q_0^2 + l^2} + q_0^2}{m_0 \cdot l} + \operatorname{arctg} \frac{m_1 \sqrt{q_2^2 + l^2} + q_2^2}{m_2 \cdot l} \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \frac{m_0}{l} - 2 \operatorname{arctg} \frac{m_1}{l} - \operatorname{arctg} \frac{m_2}{l} \right].$$

Hier bedeutet:

$$\left. \begin{array}{l} m_0 = m_s \\ m_1 \\ m_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{senkrechter Abstand des betrachteten Punktes von den} \\ \text{Seiten,} \end{array}$$

l = halbe Länge der Spule,
 $\left. \begin{array}{l} \varrho_0 \\ \varrho_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Entfernung des betrachteten Punktes von den Ecken des recht-} \\ \text{eckigen Querschnittes,} \end{array}$
 i = Strom pro Längeneinheit der Spule.

Nach dieser Formel erhält man bei 2,35 Windungen pro Zentimeter für den Mittelpunkt der Spule:

$$H = 2,891 \cdot i,$$

wo i den Spulenstrom in Ampère bedeutet, während man selbst noch für den Mittelpunkt der schmälere Spulenseite einen um nur 1 Promille größeren Wert erhält. In einer unendlich langen Spule von der gleichen Windungszahl bestände das um 2 Proz. stärkere Feld:

$$H = 2,953 \cdot i.$$

Berechnet wurde die Feldstärke als:

$$H = 2,892 \cdot i.$$

Dieser Wert ist noch zu vermehren oder zu vermindern um den Betrag der Vertikalintensität des Erdmagnetismus. Da die Versuche zur Bestimmung von ϵ/μ immer paarweise unter Umkehrung der Feldrichtungen ausgeführt wurden, braucht die Vertikalintensität nicht genau bekannt zu sein. Es wurde der Spulenstrom um 0,3 Amp. größer genommen, wenn das erzeugte Feld dem Erdfeld entgegengesetzt war, entsprechend einer Vertikalintensität von 0,43; für die Berechnung wurde einfach der Mittelwert des Stromes gesetzt.

Gesamtaufstellung, Messung und Regulierung von Strom und Spannung.

Die Versuchsanordnung war in einem völlig eisenfrei gebauten Zimmer des Instituts aufgestellt. Über den Apparat konnte nach Einlegen einer photographischen Platte (8×9 cm) die über Rollen aufgehängte und ausbalancierte Spule herabgelassen werden; direkt neben derselben befand sich eine allseitig mit Blei beschlagene Holzkiste. Abgesehen von einigen

nicht bedeutenden Eisenbeschlägen an dieser Kiste und den kleinen Nägeln, mit denen das Bleiblech befestigt war, war der Raum in der Umgebung des Apparates in allen Richtungen auf die Entfernung von etwa 2 m frei von Eisen.

In dem erwähnten Bleikasten befand sich eine selbst-regulierende wassergekühlte Röntgenröhre von 20 cm Durchmesser, deren Strahlen durch einen Ausschnitt der Kiste durch die Zwischenräume zwischen den Windungen und das Aluminiumfenster des Apparates hindurch auf das Platinblech fielen. Die Röhre wurde mit einem großen Ruhmkorffinduktorium betrieben, das primär mittels eines Turbinenunterbrechers (4.1200 Unterbrechungen pro Minute) mit 50 Volt und ca. 10 Amp. betrieben wurde.

Der Kathodenstrahlenapparat selbst war an den Stellen, an denen eine Verlötung nicht möglich oder angängig war, mit Marineleim luftdicht gekittet. Er war an eine rotierende Quecksilberpumpe angeschlossen, die während der ganzen Versuchsdauer in Betrieb gehalten wurde. Trotzdem gelang es nicht, das Vakuum hoch genug zu bringen, um an das Platinblech eine beträchtliche Spannung anlegen zu können, ohne daß Entladungen eintraten, so daß die ursprüngliche Absicht einer Beschleunigung der Kathodenstrahlen einstweilen aufgegeben werden mußte. Zur Kontrolle des Vakuums war kurz hinter dem Apparat eine Röhre von 4 cm Durchmesser mit Plattenelektroden von 11 cm Abstand eingeschaltet. Mit einem kleineren Induktorium betrieben, ergab diese bei den definitiven Versuchen zwar nicht völlige Stromlosigkeit, aber immerhin nur noch schwache Fluoreszenz der Glaswand.

Die an den Kondensator angelegte Spannung wurde durch Abzweigen von einem Manganinwiderstand hergestellt, an dessen Enden eine parallel geschaltete Hochspannungsbatterie von 160 bez. 320 Volt angelegt wurde. Die Mitte des Widerstandes wurde durch einen an Erde liegenden Normalwiderstand von 100 Ohm gebildet, an dessen Enden die Spannung mittels Kompensationsapparates gemessen wurde. Ein vorgeschalteter Schieberheostat gestattete, diese Spannung konstant zu halten. Desgleichen wurde der Strom der Magnetspule mittels eines Normalwiderstandes von 0,01 Ohm und Kompensationsapparat gemessen und durch vorgeschaltete Widerstände konstant ge-

halten. Während der Versuche wurden Strom und Spannung alle 5 Minuten gemessen und, wenn nötig, reguliert.

Theorie der Versuchsanordnung.

Es bezeichnet F das elektrische, H das magnetische Feld. Beide sind so gerichtet, daß sie entgegengesetzte Kräfte auf die zwischen den Kondensatorplatten sich bewegenden Elektronen ausüben. Vernachlässigt man den kleinen Winkel zwischen der Bahn eines solchen Elektrons und der Kondensatorebene, so wirkt auf dasselbe eine Gesamtkraft von der Größe:

$$\varepsilon \cdot F - \varepsilon \cdot u \cdot H,$$

wo u die horizontale Geschwindigkeitskomponente bedeutet. Für ein Elektron mit der Geschwindigkeitskomponente $u = F/H$ ist danach die äußere Kraft Null; seine Bahn zwischen den Platten ist eine geradlinige. Nach Verlassen des elektrischen Feldes wirkt nur das magnetische Feld, das Elektron bewegt sich dann auf einer Schraubenlinie vom Radius

$$r_0 = \frac{\mu}{\varepsilon \cdot H} \cdot u = \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{F}{H^2}.$$

Ist dagegen $u \geq F/H$, so bewegt sich das Elektron schon zwischen den Kondensatorplatten auf einer Schraubenlinie vom Radius

$$r_1 = \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{u^2}{Hu - F}.$$

Vergleicht man die Bahn eines solchen Elektrons mit der eines anderen, welches das elektrische Feld an der gleichen Stelle betritt und verläßt, aber die Geschwindigkeitskomponente $u = F/H$ hat, so ergibt sich, sofern die Abweichung der Geschwindigkeiten klein, der Radius nach Verlassen des elektrischen Feldes aber groß ist, daß sich die Bahnen der beiden Elektronen in einem Anstand

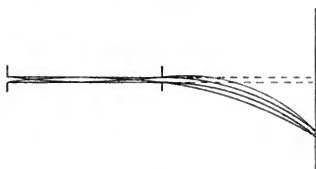


Fig. 3.

gleich der Länge des Kondensators wieder schneiden. Unter solchen Umständen verhält sich also ein Kathodenstrahlbündel

an der Stelle der photographischen Platte gerade so, als wenn alle Elektronen die Geschwindigkeit $u = F/H$ besäßen. Fig. 3 deutet diese gegenseitige Beziehung der Bahnen an. Unberücksichtigt ist bei diesen Betrachtungen die Veränderung der elektrischen Masse.

Inwieweit die genannten Voraussetzungen in den vorliegenden Versuchen zutreffen, läßt sich durch zahlenmäßige Durchrechnung ermitteln. Ohne hierauf näher einzugehen, führe ich im folgenden kurz einige Resultate dieser Rechnungen an, um einen Anhalt über die hier vorkommenden Abweichungen zu geben.

Die größte Krümmung besitzen die Elektronenbahnen, die durch die beiden Kanten der einen Kondensatorplatte gehen und die andere Platte in der Mitte berühren. Der Radius einer solchen Bahn ist 96 cm. Diesen Bahnen entsprechen die extremen noch zur Beobachtung kommenden Geschwindigkeiten.

	Bei 2,2 cm Ablenkung	1,8 cm Ablenkung
Weichen diese vom Werte F/H ab um	- 9,5 Proz.	- 11 Proz.
	+ 15,5 „	+ 19,5 „
80 Proz. der Gesamtstrahlung gehören Geschwindigkeiten an, die vom Werte F/H weniger abweichen als	- 4 „	- 5 „
	+ 6 „	+ 7,5 „
Die mittlere Geschwindigkeit weicht vom Werte F/H ab um	+ 1 „	+ 1,5 „

Die Auftreffstelle auf der photographischen Platte weicht für verschiedene Strahlenarten von der Mitte der Auftreffstelle des Bündels mit der Geschwindigkeit F/H ab:

Für Strahlen extremer Geschwindigkeiten	- 0,03 cm	- 0,04 cm
	- 0,045 „	- 0,045 „
Für die Begrenzungsstrahlen der 80 Proz. Strahlen mit mittleren Geschwindigkeiten	- 0,003 „	- 0,008 „
	- 0,010 „	- 0,006 „

Auch diesen Berechnungen liegen die Voraussetzungen zugrunde, daß 1. in der ursprünglichen diffusen Kathodenstrahlung die photographische Intensität der Strahlen mit

Geschwindigkeiten zwischen u und $u + du$ proportional sei mit du/u , und daß 2. die Veränderlichkeit von ε/μ innerhalb der in Betracht kommenden Bereiche vernachlässigt werden könne.

Magnetisches Spektrum der Kathodenstrahlen.

Um die erste der genannten Voraussetzungen zu prüfen, und den Bereich der Geschwindigkeiten festzustellen, innerhalb dessen dieselbe erfüllt ist, war es nötig, das magnetische Spektrum der Kathodenstrahlen photographisch aufzunehmen. Zu diesem Zwecke war der Kondensator aus dem Apparate genommen und lediglich zwei Blenden mit spaltförmiger Öffnung eingesetzt.

Die Versuche ergaben, daß die Geschwindigkeitsverteilung in den durch Röntgenstrahlen erzeugten sekundären Kathoden-



Fig. 4.

strahlen zwar merklich unabhängig ist von der Intensität der primären Strahlung, dagegen mit der Härte der Röhre sich ändert, indem durch härtere Röntgenstrahlen das Intensitätsmaximum nach der Richtung der schnelleren Kathodenstrahlen verschoben wird. Dies ist deutlich aus den beiden Spektren Fig. 4¹⁾ zu ersehen, die auf derselben photographischen Platte mit demselben Magnetfeld aufgenommen wurden. Deshalb mußte bei diesen Hilfsversuchen sowohl, wie bei den Hauptversuchen die Härte der Röhre gemessen werden.

Ein Baryumplatincyansschirm war auf seiner Vorderseite mit einem Streifen doppelten Pauspapiers belegt; auf der Rückseite der frei bleibenden Teile waren Aluminiumbleche verschiedener Dicke befestigt. Die Stärke des Aluminium-

1) Die Abbildungen Figg. 4, 5 und 6 sind gegenüber den Originalplatten Negative.

blechs, das die gleiche Schwächung des Fluoreszenzlichtes hervorbrachte wie das Pauspapier, diente als Maß der Härte.

Leider ist es leichter, die Härte einer Röhre zu messen, als sie während stundenlanger Expositionen beliebig zu regulieren. Auch ist infolge der hohen Kosten großer Röntgenröhren das gesammelte Material nur ein beschränktes. Fig. 5a ist eine Reproduktion der besten Aufnahme des magnetischen Spektrums. Fig. 5b stellt die mit einem Hartmannschen Mikrophotometer ermittelte Intensitätskurve dar. Die Entfernung vom ersten zum zweiten Spalt war gleich der Ent-

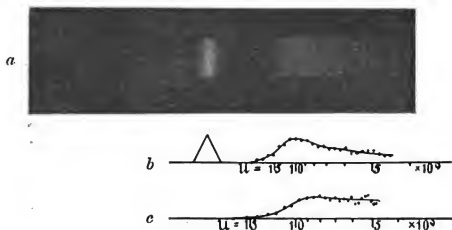


Fig. 5.

fernung vom zweiten Spalt zur photographischen Platte. Die Breite des ersten Spaltes betrug hier 2,5 mm, die des zweiten 1,25 mm. In der Richtung der Verbindungslinie der beiden Spalte hat man durch die nichtablenkbaren sekundären Röntgenstrahlen erzeugten Eindruck, dessen Intensitätskurve sich aus den Dimensionen des Apparates ergibt. Fig. 5c zeigt dasselbe Spektrum reduziert auf Abszissen, die den Logarithmen der Geschwindigkeiten proportional sind. Andere Aufnahmen zeigen einen ähnlichen Verlauf. Die Härte der Strahlen war bei den Spektrumsaufnahmen etwas geringer als während der Bestimmung von ϵ/μ .

Versuchsergebnisse betreffend ϵ/μ .

Es wurden, abgesehen von einigen Vorversuchen, die infolge zu geringer Intensität keine exakte Ausmessung gestatteten, vier Doppelversuche zur Bestimmung von ϵ/μ ausgeführt. Fig. 6 ist die Reproduktion einer solchen Doppelaufnahme.

Die Expositionsdauer betrug für jeden einfachen Versuch 90 Min. Da die Röhre mit der Zeit schlechter wurde, so ist die Intensität der letzten Aufnahmen erheblich geringer als die der früheren. Die Ausmessung der Platten geschah dadurch, daß ein mit dem Komparatorschlitten fest verbundener Spiegel-



Fig. 6

glasstreifen schleifend auf der Platte verschoben wurde. Als Marke diente ein auf der Unterseite des Glasstreifens angebrachter feiner Kreis von ca. 1 mm Durchmesser. Die Einstellung erfolgte mit bloßem Auge, da die ziemlich schwachen abgelenkten Spaltbilder keine Vergrößerung vertrugen. Die Messungsergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle I.

Nr.	Spannungs- differenz der Kondensator- platten (Volt)	Strom der Magnetspule (Ampère)	Abstand y des abgelenkten von dem nicht ab- gelenkten Spalt- bild (cm)	Mittlere Ab- lenkung (cm)
1 { l. r.	167,23 „	- 13,85 + 13,55	2,258 } 2,245 }	2,252
2 { l. r.	250,15 „	- 15,70 + 15,40	1,839 } 1,828 }	1,834
3 { l. r.	104,16 „	- 10,95 + 10,65	2,283 } 2,273 }	2,278
4 { l. r.	292,27 „	- 18,50 + 18,20	2,274 } 2,259 }	2,267

Bei Betrachtung der y -Werte fällt auf, daß das Spaltbild nach links (l.) immer um 0,010—0,015 cm stärker abgelenkt ist, als nach rechts (r.). Diese Abweichung zeigen alle Messungsreihen ausnahmslos, so daß es sich hier nicht um zufällige Fehler

beim Ausmessen handelt; die Unsymmetrie ist höchstwahrscheinlich bedingt durch kleine Unsymmetrien des Apparates, der im allgemeinen nicht als Präzisionsapparat gebaut war. Für die Bestimmung des Absolutwertes von ϵ/μ kommen diese Unregelmäßigkeiten ihrer geringen Größe wegen nicht in Betracht; für die relativen Messungen von ϵ/μ dagegen ist kaum eine Fehlerquelle für die genannten Abweichungen zu denken, die nicht eliminiert würde, insoweit man stets die gleiche Ablenkung innehält.

Aus den Zahlen der Tab. I berechnen sich die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte für die Feldstärken F und H ; die spezifische Ladung folgt aus der Gleichung:

$$\frac{\epsilon}{\mu} = \frac{F}{r \cdot H^2},$$

wo

$$r_0 = \frac{6,65^2}{2y} + \frac{y}{2}.$$

Die Geschwindigkeit bezogen auf die Lichtgeschwindigkeit = 1 ist berechnet nach der Gleichung:

$$\beta = \frac{F}{H \cdot c} + \delta;$$

δ bedeutet ein Korrektionsglied, das sich zusammensetzt aus der Reduktion auf die mittlere horizontale Geschwindigkeitskomponente (vgl. p. 436) und der Berücksichtigung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente; dieser wurde Rechnung getragen durch Erhöhung des Wertes F/Hc um 0,8 Proz., so daß die ganze Korrektion gesetzt wurde = 1,8 Proz. bei 2,2 cm Ablenkung und = 2,3 Proz. bei 1,8 cm Ablenkung.

Tabelle II.

Nr.	F	H	$\frac{\epsilon}{\mu}$	β
1	2,883 · 10 ¹¹	39,62	1,678 · 10 ⁷	0,2469
2	4,313 „	44,97	1,644 „	0,3270
3	1,796 „	31,23	1,697 „	0,1951
4	5,039 „	53,07	1,643 „	0,3222

Wie man sieht, ergibt sich ε/μ im Vergleich zu den bisher bekannten Messungen auffallend klein. Auf die Geschwindigkeit 0 extrapoliert erhält man, je nach der zugrunde gelegten Theorie etwas verschieden, 1,71 bis 1,73. 10^7 . Dieser Wert ist 8 bis 9 Proz. kleiner als der von Hrn. Kaufmann aus der S. Simonschen Zahl berechnete (1,88. 10^7). Nun ist der verwendete Apparat, wie gesagt, zwar sorgfältig, aber nicht mit *besonders* großer Genauigkeit gebaut. Trotzdem ergibt die Betrachtung der bei Ausmessung der Spule sowie bei Bestimmung des Abstandes der Kondensatorplatten erhaltenen Zahlen, daß der erhaltene Wert wohl auf 1 bis 2 Proz. unsicher sein kann; ein Fehler von 8 bis 9 Proz. aber liegt weit außerhalb der übersehbaren Fehlergrenzen.

Die Annahme der völligen Gleichheit der auf verschiedene Weise erzeugten Elektronen wird man heute nur nach den allerzwingendsten Gründen aufzugeben geneigt sein. Solche liegen aber sicher vorläufig nicht vor.

Wenn daher, wie im vorliegenden Falle, die Resultate verschiedener Beobachter so erheblich voneinander abweichen, so kann dem objektiven Kritiker nicht zugemutet werden, daß er sich mit Bestimmtheit zugunsten des einen Wertes entscheidet. Man wird vielmehr abwarten müssen, bis neuere und präzisere Bestimmungen vorliegen.¹⁾ Was ich zugunsten des hier ermittelten Wertes anführen möchte, ist die Reinheit der Versuchsbedingungen: hohes Vakuum, photographische Fixierung, Einfachheit und Übersichtlichkeit des Versuches.

Die Veränderlichkeit von ε/μ ist ebenfalls aus obiger Tabelle deutlich zu ersehen; wenn man sie mit den verschiedenen Theorien vergleicht, so darf der Versuch 2 nur mit Vorbehalt verwendet werden, da in diesem die Ablenkung eine andere war. Ich habe deshalb aus jedem der drei übrigen Versuche nach den Theorien von Abraham, Lorentz und Bucherer den Wert von ε/μ für die Geschwindigkeit gleich Null berechnet, für jede Theorie den Mittelwert genommen, und hiermit umgekehrt die Werte von ε/μ für die betreffenden Geschwindigkeiten berechnet. Diese Werte sind in der Tab. III eingetragen.

1) Mit der Vorbereitung solcher Versuche bin ich zurzeit beschäftigt.

Tabelle III.

Nr.	β	ϵ/μ beob.	ϵ/μ berechnet nach			Differenzen beob.-ber.		
			A.	L.	B.	A.	L.	B.
	0		1,720	1,733	1,713			
3	0,195	1,697	1,694	1,700	1,690	+ 3	- 3	+ 7
1	0,247	1,678	1,678	1,679	1,677	0	- 1	+ 1
4	0,322	1,643	1,647	1,640	1,651	- 4	+ 3	- 8
(2)	(0,327)	(1,644)	(1,645)	(1,638)	(1,650)	(- 1)	(+ 6)	(- 6)

Die Betrachtung dieser Zahlen zeigt, daß die beobachteten Werte zwischen den nach Abraham und den nach Lorentz berechneten liegen. Etwas größer sind die Abweichungen für die Formel von Bucherer. Doch liegen auch diese den möglichen Fehlergrenzen zu nahe, um einen sicheren Schluß zu gestatten.

Folgerungen hinsichtlich der Versuche von Hrn. W. Kaufmann.

Hr. W. Kaufmann¹⁾ ist bei der möglichst präzisen Wiederholung seiner Versuche über die Veränderlichkeit von ϵ/μ mit der Geschwindigkeit zu dem Resultat gekommen, daß die Lorentzsche Theorie nicht in Einklang zu bringen sei mit den Ergebnissen der Beobachtungen. Da Hr. Kaufmann seine Schlußfolgerungen zum Teil auch auf den Vergleich mit dem Kathodenstrahlwert von ϵ/μ_0 stützt, so liegt es nahe zu betrachten, wie sich der Vergleich unter Verwendung des hier gefundenen Wertes von ϵ/μ_0 gestaltet.

Hr. Kaufmann gibt für ϵ/μ_0 an:

- a) für Kathodenstrahlen $1,878 \cdot 10^7$
- b) „ β -Strahlen
- nach Abraham 1,823 „
- „ Lorentz 1,860 „
- „ Bucherer 1,808 „

Da der hier bestimmte Wert $1,72 \cdot 10^7$ dem nach Lorentz berechneten näher liegt als den übrigen, so möchte man auf den ersten Blick annehmen, daß hierdurch die Übereinstimmung

¹⁾ W. Kaufmann, Bericht der Berliner Akademie. Ann. d. Phys. 19. p. 487 ff. 1906.

der Lorentzschen Formel mit den beobachteten Werten eine bessere würde. Eine nähere Überlegung ergibt jedoch, daß die Zugrundelegung von $1,72 \cdot 10^7$ die Abweichung für alle drei Theorien um ungefähr den gleichen Betrag vergrößert. Dies ist am besten aus der in der zweiten zitierten Abhandlung gegebenen Kurve zu ersehen, die mit dem Werte $\epsilon/\mu_0 = 1,878 \cdot 10^7$ berechnet ist. Die Betrachtung der Gleichungen (14) und (15)¹⁾ zeigt nämlich, daß bei einer Veränderung von ϵ/μ die beiden Koordinaten im gleichen Verhältnis geändert werden, d. h. der berechnete Punkt bewegt sich auf einer durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden, und zwar in Richtung nach dem Nullpunkt, wenn ϵ/μ abnimmt. Aus denselben Gleichungen ist auch zu ersehen, wie sich der Punkt bewegt, wenn man für E/M einen anderen Wert einsetzt; verteilt man hierbei z. B. die Änderung zu gleichen Teilen auf E und M , so bewegt sich der Punkt auf einer Geraden, die hinsichtlich der Koordinatenrichtungen symmetrisch zu der vorerwähnten Geraden liegt.

Der scheinbare Widerspruch der erwähnten Betrachtungsweisen des Einflusses von ϵ/μ_0 hängt damit zusammen, daß man die Kurvenkonstanten ziemlich weit variieren kann, ohne dadurch unzulässige Abweichungen von der beobachteten Kurve zu erhalten. Deshalb ist auch die erste der von Hrn. Kaufmann unter Benutzung der Apparatkonstanten angestellten Prüfungen nicht so zwingend, als es bei Betrachtung der Differenzen scheint; durch andere Wahl der Konstanten kann man erheblich andere Differenzen bekommen. Diese Methode gibt uns zwar bündigen Aufschluß, welche Theorie nach den Versuchsergebnissen die wahrscheinlichste ist, nicht aber um wieviel sich die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Theorien unterscheiden. Als einzige übersichtliche Prüfung bleibt die Vergleichung der gemessenen Kurve mit den berechneten Werten. Für diese liegt allerdings die Lorentzsche Formel am weitesten ab. Die ganze Frage konzentriert sich darauf, welche Fehler in der Bestimmung von E und M muß man annehmen, um die berechneten Punkte in den Bereich der Fehlergrenzen der beobachteten Kurve zu bringen?

1) W. Kaufmann, Ann. d. Phys. 19. p. 529. 1906.

Aus einer in größerem Maßstab gezeichneten Kurve habe ich hierfür die folgenden Werte entnommen: Unter Zugrundelegung von $\epsilon/\mu_0 = 1,878 \cdot 10^7$ muß E kleiner und M größer angenommen werden:

nach Abraham	. . .	um je ca. 1,7 Proz.
„ Lorentz	. . .	„ „ 3,1 „
„ Bucherer	. . .	„ „ 1 „

Diese Differenzen überschreiten zwar zum Teil nicht unerheblich die von Hrn. Kaufmann geschätzten Fehlergrenzen; doch scheint mir der Unterschied der anzunehmenden Fehler bei der Wichtigkeit des Problems zu klein, um den von Hrn. Kaufmann zu ungunsten der Lorentzschen Theorie gezogenen Schluß zu rechtfertigen.

Legt man den Wert $\epsilon/\mu_0 = 1,72 \cdot 10^7$ zugrunde, so werden die anzunehmenden Fehler in allen drei Fällen noch größer, nämlich:

nach Abraham		je ca. 3,5 Proz.
„ Lorentz		„ „ 5 „
„ Bucherer		„ „ 2,7 „

Diese Fehler sind durchaus größer als nach Hrn. Kaufmanns Angaben zulässig erscheint. Da indessen eine Neubestimmung von ϵ/μ bei kleinen und mittleren Geschwindigkeiten soeben in Angriff genommen wird, erscheint es zweckmäßig, vorerst von einer weiteren Diskussion abzusehen.

Vergleich der Methode der gekreuzten Felder mit der der parallelen Felder.

Für die Wahl der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Methode der gekreuzten Felder war in erster Linie die erheblich größere Intensität der so zu erhaltenden photographischen Eindrücke gegenüber der Kaufmannschen Methode der parallelen Felder maßgebend. Die Intensität der auf ein Flächenelement auffallenden Strahlung eines bestimmten Geschwindigkeitsbereiches ist nahe proportional der strahlenden Fläche und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung zwischen Strahlungsquelle und photographischer Platte. Da nun bei der vorliegenden Methode der als Strahlungsquelle in Betracht kommende Anfang des Kondensators Spaltform hat, während bei der Methode der parallelen Felder die Strahlungsquelle punktförmig sein muß, so erhellt hieraus ohne

weiteres die erheblich größere Intensität der hier verwendeten Methode. Allerdings erhält man durch *eine* Exposition auch nur den Wert der spezifischen Ladung für *eine* Geschwindigkeit, während Hr. Kaufmann mit *einer* Exposition den Wert für alle vorhandenen Geschwindigkeiten erhält. Da aber Messungen doch nur für eine begrenzte Zahl von Geschwindigkeiten nötig sind (trotz des Vorhandenseins der ganzen Kurve mißt auch Hr. Kaufmann nur 9 Punkte aus, wovon sogar einer ebenfalls eine eigene Aufnahme nötig machte), so wiegt der durch die Notwendigkeit mehrerer Aufnahmen bedingte Zeitaufwand bei weitem nicht den Vorteil der größeren Intensität auf. Eine Messung der spezifischen Ladung der durch Röntgenstrahlen erzeugten Kathodenstrahlen mit der hier erzielten Genauigkeit wäre nach der Methode der parallelen Felder schlechterdings nicht möglich gewesen.

Da die Elektronen den Kondensator auf nahe geradlinigen Bahnen durchlaufen, so können die Kondensatorplatten sehr nahe aneinander gebracht werden, wodurch die Bestimmung der Grenzen des elektrischen Feldes in demselben Maße verbessert wird, als das Verhältnis der Länge zum Abstand der Kondensatorplatten zunimmt; dieses war hier 113:1, während es bei den neuen Kaufmannschen Versuchen 12:1 war; zudem geht nur das Ende des elektrischen Feldes in die Rechnung ein, nicht aber der Anfang. Infolge des geringen Plattenabstandes kann man ferner mit ziemlich kleinen Spannungen auskommen. Andererseits wird die Größe der Ablenkung nach Verlassen des elektrischen Feldes und damit die Meßgenauigkeit durch den Plattenabstand in keiner Weise beschränkt. Bei Wiederholung der Versuche ist sogar beabsichtigt, die Bahnkrümmung im Magnetfeld erheblich stärker zu nehmen, und das Ende des Durchmessers des im Magnetfeld beschriebenen Halbkreises photographisch zu fixieren. Hierdurch läßt sich außer anderen Vorteilen eine größere Beschränkung des Geschwindigkeitsbereiches erzielen, wobei die Intensität mit dem Geschwindigkeitsbereich nur proportional abnimmt, während bei Erstrebung desselben Zieles durch weitere Verminderung des Plattenabstandes die Intensität quadratisch abnehmen würde. Auch geht dann der Fehler in der Grenzbestimmung des Kondensators nur in Glieder zweiter Ordnung ein.

Die kürzere Expositionsdauer ermöglicht die Erzeugung eines sehr homogenen und gutdefinierten Magnetfeldes im Innern einer Spule, sowie die ständige Kontrolle und Regulierung des die Spule durchfließenden Stromes sowohl wie der an die Kondensatorplatten angelegten Spannung.

Für die Bestimmung der Geschwindigkeitsfunktion $\Phi(\beta)$ in der Gleichung $\mu = \mu_0 \cdot \Phi(\beta)$ bietet der Umstand einen großen Vorteil, daß man die Felder so wählen kann, daß die Elektronenbahnen bei allen Geschwindigkeiten dieselben sind, wodurch man nicht nur für alle Geschwindigkeiten eine möglichst günstige Größe der Ablenkung wählen kann, sondern auch eine Reihe von Fehlerquellen ohne weiteres eliminiert wird. In die Berechnung von $\Phi(\beta)$ gehen nur ein der Abstand der Spaltbilder auf der photographischen Platte und die Spannungsbez. Strommessung von Kondensator und Spule. Die Apparatdimensionen gehen nur für die Berechnung von β ein, wodurch die Methode auch bei kleinen Geschwindigkeiten noch exakte Messungen der Größe $(\Phi(\beta) - 1)$ ermöglicht.

Endlich ist die Ausmessung des Abstandes zweier Spaltbilder viel sicherer auszuführen und viel weniger beeinflusst von Plattenfehlern als die punktweise Ausmessung einer Kurve.

Zusammenfassung.

1. Die Geschwindigkeit der durch Röntgenstrahlen erzeugten Kathodenstrahlen ist merklich unabhängig von der Intensität der Röntgenstrahlen, und nimmt zu mit der Härte der Röhre.

2. Der Wert der spezifischen Elektronenladung e/μ_0 bei der Geschwindigkeit 0 ergibt sich erheblich kleiner als die Simonsche Zahl; aus den vorliegenden Versuchen berechnet er sich zu $1,72 \cdot 10^7$.

3. Die Veränderlichkeit von e/μ mit der Geschwindigkeit ist deutlich aus den Versuchen zu ersehen, doch läßt sich eine Entscheidung hinsichtlich der verschiedenen Theorien nicht treffen.

4. Die Einsetzung des erhaltenen Wertes von e/μ_0 in die Kaufmannschen Berechnungen vergrößert die Abweichungen von der gemessenen Kurve; eine sichere Entscheidung zwischen den drei verglichenen Theorien ist vorläufig nicht möglich.

5. Die Methode der gekreuzten Felder bietet gegenüber der Methode der parallelen Felder die folgenden Vorteile:

Größere Intensität.

Geringer Abstand der Kondensatorplatten; daher: genaue Bestimmung des elektrischen Feldes, kleine Spannungen.

Der Anfang des Kondensators geht nicht in die Berechnung ein, das Ende bei geeigneter Anordnung nur in unbedeutendem Betrage.

Die Bahnkrümmung nach Verlassen des Kondensators kann unabhängig vom Plattenabstand gewählt werden.

Erzeugung des Magnetfeldes im Innern einer Stromspule; infolge der kurzen Expositionsdauer können Stromstärke und Spannung fortlaufend kontrolliert werden.

Die Apparatkonstanten gehen nur in die Berechnung von ϵ/μ_0 und β ein, nicht aber in die von $\Phi(\beta)$.

Die Bedingungen für eine genaue Ausmessung der Platte sind günstig.

Zum Schluß ist es mir ein Bedürfnis, Hrn. Geheimrat Riecke für das meiner Arbeit jederzeit entgegengebrachte Interesse ehrerbietigen und herzlichen Dank zu sagen.

Göttingen, Physik. Inst. der Universität, 15. Mai 1906.

(Eingegangen 24. Oktober 1906.)

**3. Über die Abhängigkeit
der Hysteresiswärme und der Permeabilität des
Eisens von der Frequenz des Wechselfeldes¹⁾;
von Léon Schames.**

Einleitung.

Unterwerfen wir Eisen einer periodisch wechselnden magnetischen Kraft, so wird Wärme entwickelt, und zwar sind es zwei Ursachen, die diese Wärmeproduktion bedingen:

1. Die Hysteresis und 2. die Wirbelströme.

Letztere rühren daher, daß infolge der Änderung der magnetischen Feldstärke im Eisen elektrische Ströme induziert werden. Diese Wirbelströme sind in massiven Eisenmassen sehr beträchtlich, und weil mithin der von ihnen hervorgerufene Effektverlust sehr groß ist, so ist die Technik schon früh dazu gekommen, das Eisen in Form dünner Bleche oder Drähte zu unterteilen.

In dieser Arbeit soll nun untersucht werden, inwieweit die Energievergeudung durch Hysteresis von der Geschwindigkeit abhängt, mit der der zyklische Prozeß durchheilt wird; gleichzeitig soll konstatiert werden, ob und wie die Permeabilität von dieser Feldwechselzahl beeinflußt wird.

Die erste Frage ist von vielen Seiten in Angriff genommen worden, ohne daß eine einheitliche Lösung erfolgte. Warburg und Hönig²⁾, Tanakadate³⁾ und Weihe⁴⁾ wandten kalorimetrische Methoden zur Messung der Hysteresiswärme an. Ihre Arbeiten ergaben das Resultat, daß bei der Wechselstrommagnetisierung die Energievergeudung kleiner sei als bei

1) Auszug aus der Würzburger Dissertation.

2) E. Warburg u. M. Hönig, Wied. Ann. 20. p. 814. 1883.

3) A. Tanakadate, Phil. Mag. 28. p. 207. 1889.

4) F. A. Weihe, Wied. Ann. 61. p. 578. 1897.

statischen Versuchen. Eine Unabhängigkeit fanden Hopkinson¹⁾, Maurain²⁾, Gray³⁾ und Guye und Herzfeld.⁴⁾

Steinmetz⁵⁾, Niethammer⁶⁾, M. Wien⁷⁾, Krogh und Rikli⁸⁾, Dina⁹⁾ und Corbino¹⁰⁾ hingegen folgern aus ihren Versuchen, daß der Energieverlust durch Hysteresis bei Wechselstrom größer ist, als ihn die statische Hysteresisfläche ergibt, und daß die Energievergeudung mit der Wechselzahl zunimmt. Eine analoges Resultat fand Klemenčič¹¹⁾ für weiches Eisen, hingegen für Stahl und Nickel merkliche Konstanz.

Auf die Kritik dieser Arbeiten will ich später im Anschluß an meine eigenen Resultate zurückkommen.

Die zweite Frage, die Abhängigkeit der Permeabilität von der Periodenzahl wurde von M. Wien⁷⁾ und Krogh und Rikli⁸⁾ dahin beantwortet, daß eine Abnahme der Permeabilität mit wachsender Periodenzahl stattfindet. Ähnlich findet Klemenčič¹¹⁾ bei Schwingungen von 1000 und 2000 Perioden in der Sekunde, daß die Permeabilität sich merklich einer Konstanten nähert.

In der vorliegenden Arbeit wurde eine rein kalorimetrische Methode angewandt. Das zu untersuchende Eisenblech wurde in der Form von prismatischen Bündeln in Glasröhren eingeschmolzen, die in Kapillarröhren endigten. Die Glasgefäße wurden mit Xylol gefüllt, so daß man die Wärmeenergie, die durch schnell wechselnde Magnetfelder (sekundliche Periodenzahl 0—500) im Eisen erzeugt wurde, durch die Verschiebung des Xylolmeniskus in der Kapillare bestimmen konnte. Wie wir sahen, rührt nun diese Wärme sowohl von der Hysteresis, als auch von den Wirbelströmen her. Letztere wurden mit

1) Hopkinson, Elektrotechn. Zeitschr. 13. p. 642.

2) Ch. Maurain, Ecl. electr. 15. p. 409. 1898.

3) Gray, Phil. Trans. 184 A. p. 531.

4) Guye u. Herzfeld, Compt. rend. 136. p. 957.

5) C. F. Steinmetz, Elektrotechn. Zeitschr. 13. p. 43.

6) F. Niethammer, Wied. Ann. 66. p. 29. 1898.

7) M. Wien, Wied. Ann. 66. p. 859. 1898.

8) Krogh u. Rikli, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1083. 1900.

9) A. Dina, Elektrotechn. Zeitschr. p. 41. 1902.

10) O. M. Corbino, Atti. Assoc. electr. ital. 1903.

11) I. Klemenčič, Wiener Ber. 1894. p. 205; 1895. p. 724; 1898.

Hilfe einer analytischen Formel berechnet, wie dies in § 6 näher ausgeführt wird.

Ausführung der Versuche.

I. Teil. Vorversuche.

§ 1. Bestimmung der Materialkonstanten.

Nachdem zuerst Vorversuche mit Drahtbündel angestellt waren, gelangten zur eigentlichen Untersuchung Bleche, weil sie in der Praxis bei weitem mehr Verwendung finden. Ich untersuchte zwei Stärken und zwar:

1. Das ca. 0,3 mm starke Transformatorenblech der Firma Siemens-Schuckert-Werke Nürnberg und

2. Dasselbe Blech, von Heräus in Hanau auf ca. den zehnten Teil, also auf 0,03 mm Dicke ausgewalzt.

Diese Bleche waren nach einheitlichem Format zu Streifen von 200 mm Länge und 18 mm Breite geschnitten. Nachdem das spezifische Gewicht und der elektrische Widerstand des Materiales bestimmt worden war, wurden gleiche Metallvolumina der Bleche mit einer Zwischenlage von dünnstem Seidenpapier zu Bündel vereinigt, die im Schraubstock zusammengepreßt und durch Umschnüren mit Bindfaden zusammengehalten wurden. Tab. I ergibt die aus einer großen Zahl von Beobachtungen bestimmten Durchschnittswerte:

Tabelle I.

	Material	Spez. Gew.	Dicke mm	Widerstand	Anzahl der Bleche
A	Eisen 0,3	7,77	0,288	0,134	50
B	Eisen 0,03	7,77	0,0329	0,136	438

Die Bestimmungen der Permeabilität des Eisens geschahen nach der ballistischen Methode und zwar an einem ringförmigen Versuchskörper, um von dem Einfluß der entmagnetisierenden Wirkung der Enden frei zu sein. Aus dem dünnen Eisenblech wurden 75 Ringe von 80 mm äußerem und 46 mm innerem Durchmesser durch Umschlingen mit Isolierband zu einem festen Körper vereinigt. Es wurden in drei Lagen 190 Windungen primär und 55 Windungen sekundär aufgewickelt. Damit der scheinbare Widerstand der Wickelung nicht störend in Betracht kommen konnte, benutzte ich erstens eine hohe

Spannung mit viel Vorschaltwiderstand, und zweitens ein Edelmannsches Galvanometer mit einer Schwingungsdauer

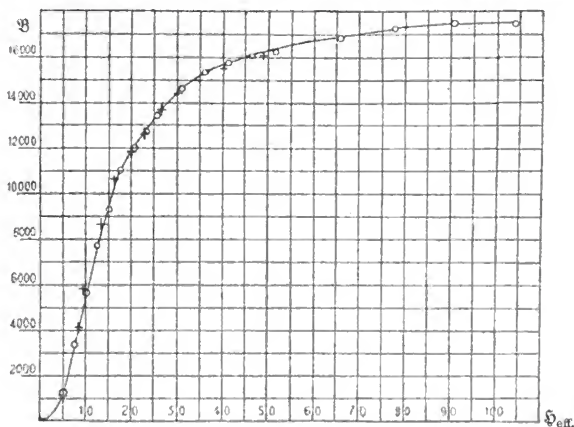


Fig. 1. Ballistische Bestimmung der Permeabilität.

$T = 4,25$ Sek. Die Kurve der Permeabilität, wie sie aus diesem Versuche folgt, zeigt Fig. 1.

§ 2. Magnetometrische Messungen.

Wir gehen jetzt über zur Aufnahme der statischen Hysteresisfläche, welche unter denselben Umständen erfolgen sollte, wie später die Bestimmung der Wechselstromhysteresis. Zu diesem Zwecke wurde das zu untersuchende Eisenbündel in eine Spule gebracht, die einen weiten Hohlraum besaß, um bei den Wechselstromversuchen Kühler und Wärmeschutzvorrichtung aufnehmen zu können. Die Dimensionen dieser Spule waren: Höhe = 30 cm, innerer Durchmesser = 7,8 cm, äußerer Durchmesser = 12,2 cm. Sie war mit neun Lagen zu je 98 Windungen bewickelt. Da die Länge der Eisenbündel nur 20 cm betrug, so war die Spule hinreichend lang, um störende Kraftlinienverteilung an den Enden zu vermeiden.

Die Meßanordnung war nun folgende: ein Kohlrausch-

sches Bifilarmagnetometer wurde in den magnetischen Meridian gestellt; in erster Hauptlage dazu befand sich die beschriebene Spule. Eine zweite Spule, in zweiter Hauptlage, diente zur Kompensation der Ablenkung, die durch den Magnetisierungsstrom hervorgerufen wurde. Außerdem war in den Stromkreis ein Regulierwiderstand, der, damit er nicht auf das Magnetometer wirken konnte, bifilar gewickelt war, ein Kugelpolampèremeter und ein Kommutator eingeschaltet.

Nachdem nun das Eisen mehreren vollständigen Kreisprozessen ausgesetzt worden war, wurden Messungen ausgeführt, deren Resultate in Tab. 2 zusammengestellt sind.

Die Feldstärke, die aus den Dimensionen der Spule zu berechnen war, mußte korrigiert werden, weil die Spule im Verhältnis zu ihrer Länge nicht eng genug war. Es ergab sich nach Heydweiller¹⁾, daß der Wert 5 Proz. kleiner war, als ihn die sonst übliche Formel

$$\mathfrak{H} = \frac{4 \pi n J}{e}$$

ergab, und zwar wurde gefunden:

$$\mathfrak{H} = 35,15 J_{\text{Amp.}}.$$

Tabelle II.

$J_{\text{Amp.}}$	$\mathfrak{H}$	Bündel A				Bündel B			
		e		$\mathfrak{H}$		e		$\mathfrak{H}$	
0	0	-1	+1	-4,7	4,7	-10	+10	-47	47
1	35,15	38	40	178	187	36,5	56	172	262
2	70,3	76,5	78,5	358	366	83	100	390	469
3	105,5	116	118	544	553	127	143,5	596	668
4	140,6	154	156	723	731	168	182,5	788	864
5	175,8	187,5	189	880	887	202	216	949	1014
6	210,9	217	218,5	1016	1024	229	238	1077	1112
7	246,1	234,5	236,5	1099	1109	246	252,5	1157	1184
8	281,2	248	249,5	1163	1171	260	264,5	1220	1241
9	316,4	260	261	1222	1226	272	274	1275	1285
10	351,5	270	270,5	1268	1270	282	283	1322	1330
11	386,7	277	277,5	1305	1307	289,5	290,5	1356	1364
12	421,8	285		1336		297		1394	

1) A. Heydweiller, Hilfsb. z. Ausführung elektr. Messungen p. 45.

Die magnetische Intensität $\mathfrak{J}$ ergibt sich aus $\mathfrak{J} = M/V$,
wo V das Eisenvolumen = 51,7 ccm ist, und

$$M = \frac{1}{2} r^3 H (1 + \theta) \frac{\sigma}{2a}, \quad 1)$$

wo wiederum a der Abstand zwischen Spiegel und Skala, σ der

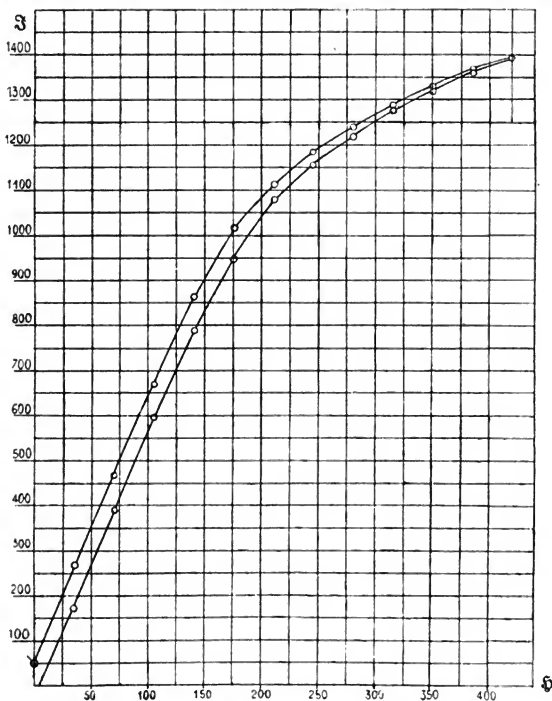
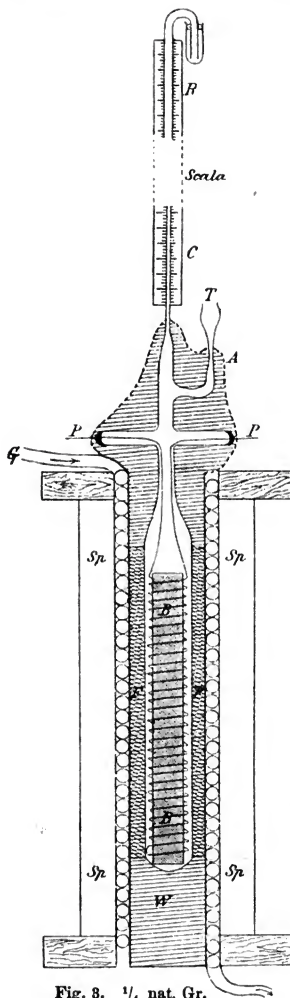


Fig. 2. Hysteresisfläche (magnetometrische Messungen).

Ausschlag, θ das Torsionsverhältnis und H die erdmagnetische Intensität bedeutet.

1) F. Kohlrausch, Prakt. Physik p. 834.

Fig. 3. $\frac{1}{4}$ nat. Gr.

Aus der Tab. 2 geht ohne weiteres hervor, daß der Energieverlust durch Hysteresis im dicken Blech nur einen ganz kleinen Bruchteil beträgt von dem Verlust im dünnen Blech. In Fig. 2 habe ich die Hysteresisfläche für das dünne Eisen wiedergegeben, wie sie aus obiger Tabelle folgt; ihre Auswertung ergibt einen Verlust von 39000 C.G.S. pro Kreisprozeß und pro Kubikzentimeter. Bei dem dicken Eisenblech liegen die Punkte so dicht beieinander, daß eine rationelle Auswertung der Hysteresisfläche nicht möglich war.

§ 3. Die Kalorimetergefäße.

Nachdem so die magneto-statischen Messungen durchgeführt worden waren, ging ich an die Herstellung der Glasgefäße, die als Xylolthermometer benutzt werden sollten. Um diese später bequem eichen zu können, wurde auf das Eisenbündel *B* eine Spirale aus 0,1 mm starkem Platindraht gewickelt, und zwar bifilar, damit in dem Draht selbst möglichst wenig Wirbelströme entstehen konnten. Die Heizspirale war durch Seidenpapier vom Eisenkern isoliert und wurde durch Bindfaden in ihrer Lage festgehalten. Aus der nebenstehenden Fig. 3 ist die Form der Kalorimetergefäße

ersichtlich. Das Rohr R war umgebogen, damit eventuell ausfließendes Xylol sich in einem kleinen mit einem durchbohrten Kork angesetzten Reagenzglas ansammeln konnte. Kühlte sich dann das Eisen wieder ab, so wurde das Xylol von selbst wieder zurückgesogen. Was schließlich das Füllen der Gefäße anbelangt, so geschah dies unter fortwährendem Auspumpen mit der Wasserstrahlluftpumpe und unter vorsichtigem Erwärmen, um die letzten Spuren von Luft, die eventuell zwischen dem Seidenpapier und dem Eisen in Gestalt winziger Bläschen sitzen konnten, zu entfernen. Zuletzt wurde der Einfülltrichter T an der Stelle A abgeschmolzen; die hier auftretende Luftblase wurde alsdann durch Neigen des Gefäßes in die Kapillare getrieben, aus welcher sie durch vorsichtiges Erwärmen leicht ganz zu entfernen war.

Bevor wir nun zu den kalorimetrischen Messungen übergehen, will ich mitteilen, wie eine Wirkung der Jouleschen Wärme auf das sehr empfindliche Xylolthermometer verhindert wurde. Die Spule hatte, wie wir gesehen haben, absichtlich einen weiten Hohlraum, um hier einen Wasserkühler anzubringen. Bei den ersten Versuchen war ein doppelwandiger Zinkblechzylinder verwandt worden, der sich aber bald als gänzlich untauglich herausstellte, weil er in Gestalt von Wirbelströmen einen zu großen Effekt verzehrte. Statt seiner wurde ein Gummischlauch G in eng aneinanderliegenden Windungen auf ein Papprohr aufgewunden. Der Zwischenraum zwischen letzterem und dem Glasgefäß wurde durch das Filzrohr F und durch Watte W ausgefüllt, damit das Kalorimeter gegen Wärmeverlust geschützt sei.

II. Teil. Wechselstromversuche.

§ 4. Kalorimetrische Messungen.

Zur Erzeugung des magnetischen Wechselfeldes dienten zwei Gleichstrom-Wechselstromumformer:

1. Eine vierpolige 1 HP-Maschine von Siemens & Halske mit einer Frequenz von 50 Sek.¹⁾
2. Eine 36 polige 8 HP-Maschine von Schuckert, die

1) v. Trautenberg, Dissertation. Würzburg 1905.

bei der maximalen Tourenzahl von 2000 Min. eine Frequenz von 600 Sek. erreicht.¹⁾

Bei den Versuchen mit der ersten Maschine bestand der Stromkreis aus einem doppelpoligen Ausschalter, einem Hitzdrahtampèremeter von Hartmann & Braun und der oben beschriebenen Untersuchungsspule. Im Nebenschluß lag ein Hartmann-Kempfscher Frequenzmesser, dessen mittlere Feder auf die Periodenzahl 50 abgestimmt worden war. Bei allen kalorimetrischen Messungen mit dieser Anordnung wurde diese Frequenz durch Regulierung der Widerstände der Magnetwicklung, der Ankerwicklung und der Erregerwicklung des Wechselstromgenerators erzielt. (Die Abweichung konnte maximal $1\frac{1}{2}$ Proz. betragen, dieselbe Genauigkeit kommt auch den Ablesungen am Hitzdrahtampèremeter zu.)

Bei den Versuchen mit der zweiten Maschine jedoch konnte ein solch einfacher Stromkreis nicht beibehalten werden, denn bei der hohen Frequenz ging durch die Spule nur ein minimaler Strom. Es mußte folglich mittels eines Kondensators Resonanz erzwungen werden. Gleichzeitig haben wir so ein Mittel an der Hand, um mit fast reinen Sinusströmen zu arbeiten, worauf ich in § 5 näher eingehen werde. In der Fig. 4 ist *C* der Kondensator eines großen Induktorkiums; seine Kapazität betrug ca. $2\frac{3}{4}$ M.-F. Um nun bei den verschiedensten Stromstärken Resonanz zu erhalten, wurde die Tourengeschwindigkeit des Generators variiert. Es folgt also im Gegensatz zu den Versuchen mit der ersten Maschine, wo die Frequenz immer konstant blieb, daß hier die Frequenzen jedesmal verschieden waren; sie wurden von Fall zu Fall durch Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit mit einem Tourenzähler bestimmt. Bei unserer Anordnung schwankt die Frequenz für das dicke Eisen von 475—525, für das dünne von 460—510. Um eine Frequenz zu erzielen, welche zwischen diesen und denjenigen von 50 lag, schaltete ich dem Kondensator einen kleineren von $\frac{1}{2}$ M.-F. parallel; es ergab sich dann eine Periodenzahl von ca. 400.

Da der Kondensator regulär schon Spannungen bis zu 1100 Volt auszuhalten hatte, so mußte man mit dem Unter-

1) W. Wien, Physik. Zeitschr. 4. p. 588. 1903.

brechen des Stromes vorsichtig sein, damit nicht etwa ein zu großer Öffnungsstrom den Kondensator durchschlug. Ich verfertigte deshalb einen speziellen Schalter, der den Zweck hatte, den Kondensator im Moment vor der Stromöffnung kurz zu schließen, so daß eine Beschädigung ausgeschlossen war. Die

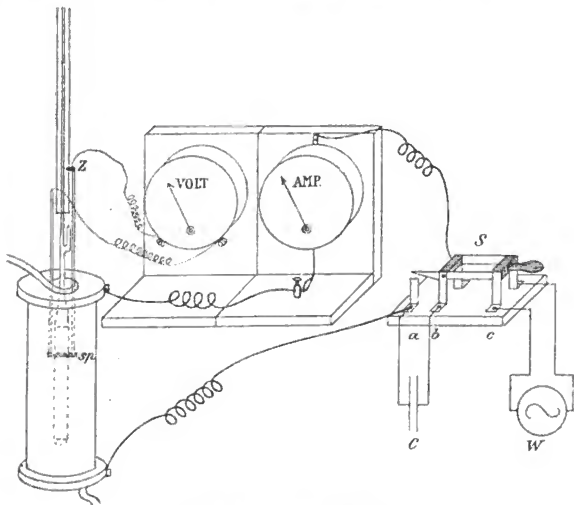


Fig. 4. $\frac{1}{10}$ nat. GröÙe.

Konstruktion des Schalters ergibt sich aus der Figur; wir sehen, daß durch das in die Höhe ziehen des Handgriffes zuerst $a-b$ verbunden und dann $b-c$ unterbrochen wurde.

Die kalorimetrischen Messungen wurden folgendermaßen ausgeführt. Die Skala erhielt bestimmt markierte Stellen im Abstand h und es wurde mit der Sekundenuhr die Zeit gemessen, die zum Passieren dieser Strecke nötig war. Nach dieser Messung wurde der Fall beobachtet, der durch die Wasserkühlung bedingt war, und der als Korrektur berücksichtigt werden mußte. Was schließlich die absolute Eichung der Xylolkalorimeter anbelangt, so wurde diese durch Heizung

Bündel A. + 475—525. × 395—415. ○ 50.

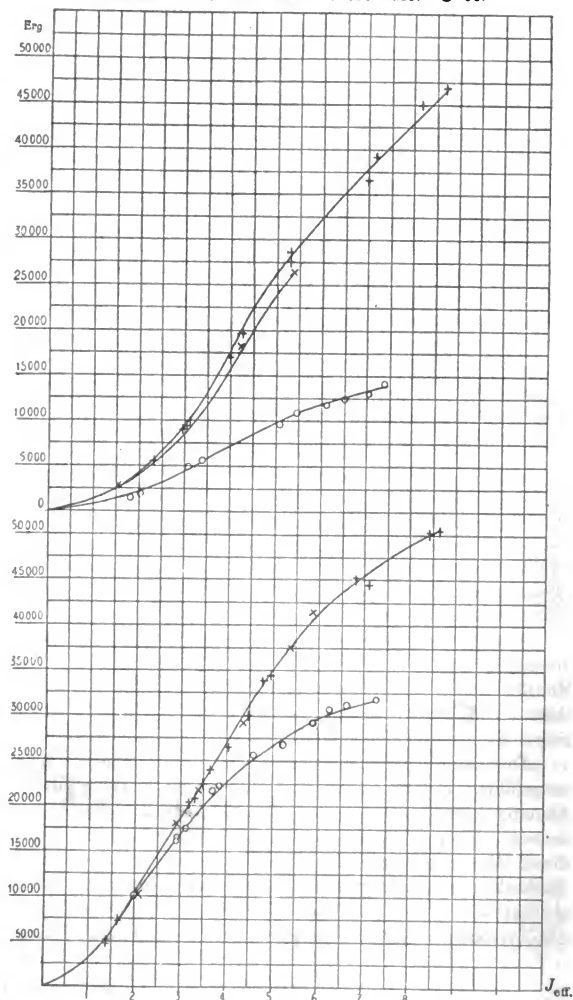


Fig. 5. Bündel B. + 460—510. × 395—410. ○ 50.

der Platinspirale mit Gleichstrom erzielt. Bei der Eichung war die Messung eine ganz analoge wie bei der Messung der durch Wechselstrommagnetisierung im Eisen erzeugten Wärme. Es wurden so je drei Meßreihen für die beiden Eisenbündel durchgeführt, deren Resultate aus den Kurven der Fig. 5 zu entnehmen sind; diese zeigen uns also die Abhängigkeit der Energieverluste von dem magnetisierenden Strom bei verschiedenen Frequenzen. Die Genauigkeit der Beobachtungen ist auf 2 Proz. anzusetzen, denn die einzelnen Messungen der Tourenzahl, der Zeit und der Ablesungen an der Skala sowie an den verschiedenen Strom- und Spannungsmessern lassen keinesfalls einen größeren Fehler zu.

§ 5. Bestimmung der maximalen Induktion.

Bei Kurven, wie den hier gefundenen, haben sich manche Forscher begnügt, ohne zu bedenken, daß man aus ihnen kein Resultat folgern kann, weil sie auf gleichen magnetisierenden Strom, nicht aber auf gleiche maximale Induktion bezogen sind. Auch auf gleiche maximale Feldstärke zu beziehen, ist unrichtig, denn es kann ja auch die Permeabilität von der Wechselzahl abhängen. Um nun die maximale Induktion kennen zu lernen, bedient sich Fleming¹⁾ eines einfachen Verfahrens. An den Enden einer flachen Probespule, die auf den Eisenkern aufgeschoben wird, beobachtet er die effektive sekundäre Spannung e in Volt. Aus dieser läßt sich die maximale Induktion berechnen, wenn wir die Form der Spannungs-kurve kennen. Definieren wir, als „Formfaktor der Spannung“ f = Effektivwert : Mittelwert, so ist nach Fleming:

$$10^8 e = 4 f n N (S \mathfrak{B}_{\max.} + S' \mathfrak{S}_{\max.})$$

und mithin

$$\mathfrak{B}_{\max.} = \frac{10^8}{4 f n S N} - \frac{S'}{S} \mathfrak{S}_{\max.},$$

wobei bedeutet N = Windungszahl der Probespule, S = Eisenquerschnitt der Probespule, S' = Luftquerschnitt der Probespule.

Um nun die Form der Spannungs-kurve zu erhalten, wurde dieselbe mittels der Braunschen Röhre photographisch aufgenommen. Da eine Röhre mit Glasdiaphragmen während

1) J. A. Fleming, Phil. Mag. 44. p. 262. 1897.

eines 5 Minuten langen Betriebes durch die auftreffenden Kathodenstrahlen am ersten Diaphragma so heiß wurde, daß sie sprang, wurden Aluminiumdiaphragmen genommen, die sich in der Tat gut bewährten. Was nun die Art und Weise des Photographierens anbelangt, so war die Schwierigkeit zu überwinden, daß bei der großen Frequenz ein einmaliger Lichteindruck auf einer bewegten Platte keine genügende Wirkung hinterließ. Es wurden deshalb die Photographien auf einem auf der Maschinenachse rotierenden Film aufgenommen; es war so die Möglichkeit gegeben, mehrere zeitlich hintereinander liegende Lichteindrücke örtlich auf dieselbe Stelle zu konzentrieren, so daß sich durch längeres Belichten mehrere tausend Eindrücke übereinander lagerten und so eine genügende Wirkung hervorriefen. Die Ablenkung der Kathodenstrahlen in der Braunschen Röhre geschah durch ein elektrostatisches Feld ¹⁾, indem die Spannung an einen Kondensator gelegt wurde. Letzterer bestand aus zwei Platten von $6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ im gegenseitigen Abstand von 4 cm.

Aus den Photographien wurde durch Ausmessung auf 1,5 Proz. genau der Formfaktor ermittelt, dessen Größe aus der Tab. 3 zu entnehmen ist.

Bei den Versuchen mit der Frequenz $n = 50$ konnte man zur Kurvenaufnahme eine Joubertsche Scheibe benutzen, da die Maschine nur vierpolig war und eine geringere Tourenzahl hatte. Es zeigte sich, daß die Wechselströme dieser Maschine sehr stark entstellt waren. Das veranlaßte mich, die Messungen bei der Frequenz 50 von der weiteren Betrachtung auszuschließen. Außerdem haben die Versuche bei dieser geringen Frequenz kaum ein Interesse, da sowohl der Hysteresisverlust, als auch die Permeabilität sich wohl kaum von den bei der Gleichstrommagnetisierung beobachteten Werten unterscheiden dürften.

In unserer Bestimmungsgleichung für $\mathfrak{B}$ ist jetzt nur noch die Sekundärspannung e unbekannt. Da nun, durch die Wirkung der Entmagnetisierung, der Kraftlinienfluß ungleichmäßig über die Länge des Eisenbündels hin verteilt ist, so müssen wir zuerst einen richtigen Mittelwert für die sekundäre Spannung suchen.

1) W. I. Milham, Dissert. Straßburg 1901.

Zu diesem Zwecke war die Probespule mit Hilfe zweier Glasröhren zum Verschieben über das Kalorimetergefäß hin eingerichtet. An dem Ende der einen Glasröhre war ein Zeiger Z angebracht, der die Stellung der Spule an einer Skala abzulesen gestattete. Die Dimensionen der benutzten Probespule waren folgende:

Mittlerer Durchmesser	= 46 mm
Höhe der Bewickelung	= 5 „
Stärke der Bewickelung	= 2,5 „
Windungszahl N	= 100.

An einem Hitzdrahtvoltmeter von Hartmann & Braun wurden nun die Spannungen bestimmt für verschiedene Stromstärken und für verschiedene Frequenzen bei der Verschiebung der Probespule vom Ende des Eisenbündels bis zur Mitte. Es ergab sich, daß die graphischen Mittelwerte dieser Spannungen mit einer Genauigkeit von 2 Proz. 4 cm vom Ende entfernt lagen. Da der Widerstand der Probespule ca. 11 Ohm, der des Hitzdrahtvoltmeters 760 Ohm war, so war eine Korrektion von +1,5 Proz. anzubringen. Die so ermittelten Werte haben in der Tab. 3 unter ϵ_{eff} Aufnahme gefunden. In derselben Tabelle finden wir $\mathfrak{S}_{\text{max.}}$, das wir zur Korrektion von $\mathfrak{B}_{\text{max.}}$ gebrauchen; es ergibt sich aus Fig. 1.

Rechnen wir nun nach dieser Methode unsere früheren Resultate auf gleiche maximale Induktion um, so ergibt sich ein ganz anderes Bild als früher. In der Fig. 6 sind die so erhaltenen Kurven gezeichnet. Sie zeigen uns, daß bei dem Bündel B die Hysteresis von der Periodenzahl unabhängig ist, sobald man für $\mathfrak{B}$ die ungefähre Grenze von 10000 nicht überschreitet. Oberhalb dieser Grenze wächst die Hysteresis mit der Frequenz. Zur Kontrolle habe ich noch zwei Hysteresisschleifen magnetostatisch aufgenommen in den Grenzen

$$\mathfrak{B} = \pm 10370 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \pm 6030;$$

ihre Auswertungen ergaben die Verluste von 20500 bez. 9000 Erg für den Kreisprozeß und das Kubikzentimeter. Diese Werte habe ich als Punkte eingezeichnet und zeigen sie mit den anderen Werten genügende Übereinstimmung.

Die Kurven für das Bündel A sind immer noch stark entstellt, weil wir die Wirbelströme nicht berücksichtigt haben; dies wollen wir im nächsten Paragraphen tun.

Bündel A. + 475—525. × 395—415.

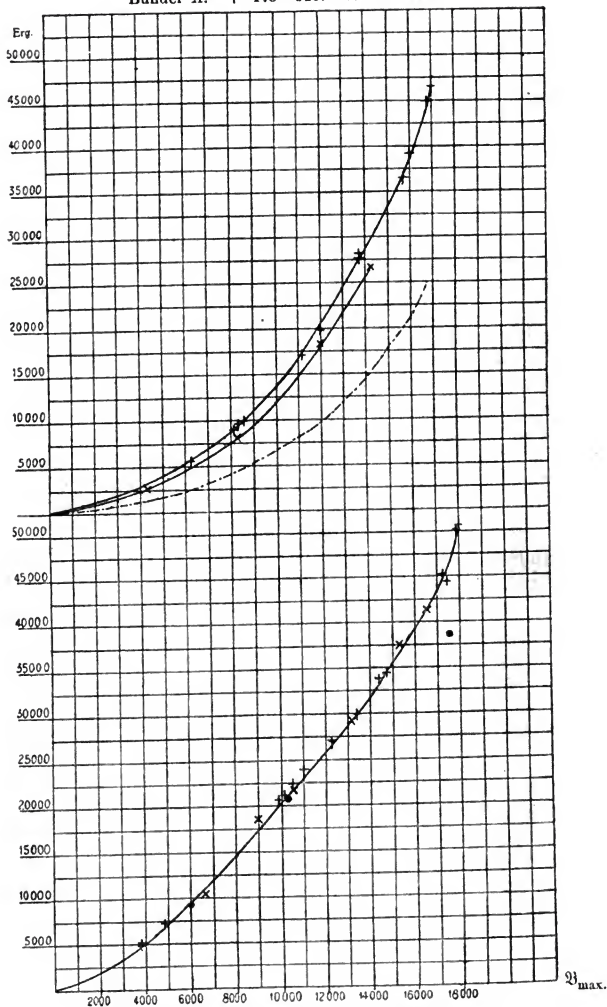


Fig. 6. Bündel B. + 460—510. × 395—410. • 0.

Tabelle III.

Bündel B.

$J_{\text{eff.}}$	n	$e_{\text{eff.}}$	f	$\mathfrak{S}_{\text{max.}}$	$\mathfrak{B}_{\text{max.}}$	Energieverlust in Erg pro ccm und pro Kreis- prozeß	μ
1,40	508	22	1,10	10	3800	5100	380
1,40	492	22	"	10	3800	4950	380
1,60	460	26	"	11	4850	7330	441
3,20	475	54	"	19	9900	20450	521
3,30	470	55	"	20	10100	20700	505
3,50	480	58	"	21	10500	22250	500
3,60	460	59	"	22	11000	23800	500
4,12	470	67	1,11	25	12200	26500	489
4,50	470	73	"	28	13400	30000	479
4,80	460	77	"	$30\frac{1}{2}$	14400	33800	472
5,00	468	80	"	32	14700	34400	460
6,80	490	100	1,12	56	17200	45200	307
7,10	495	104	1,13	63	17400	44600	276
8,40	505	115	1,16	110	17900	50200	163
8,60	510	117	1,17	140	18000	50600	129
2,05	395	30	1,10	$12\frac{1}{2}$	6650	10300	531
2,90	400	42	"	17	9000	18200	530
3,40	395	49	"	$20\frac{1}{2}$	10600	21700	517
4,38	405	61	1,11	27	13100	29200	485
5,40	410	$73\frac{1}{2}$	"	36	15400	37500	428
6,00	410	80	"	$43\frac{1}{2}$	16600	41300	382

$$W = 0.016 B^{1.42}$$

§ 6. Einfluß der Wirbelströme.

Da der Wirbelstromverlust experimentell nicht ermittelt werden konnte, weil der Effekt zu klein war, mußte ich mich einer analytischen Formel bedienen. Nach Arnold¹⁾ ist

$$W = \frac{4}{3} f^2 n^2 \mathfrak{B}^2 \Delta^2 10^{-4} \text{ erg,}$$

wenn wir den spezifischen Widerstand des Eisens gleich 10^{-5} voraussetzen. Hierbei ist W der Wirbelstromverlust pro Kubik-

1) Arnold, Wechselstromtechnik 2. p. 70.

zentimeter und pro Sekunde. Δ ist die Blechstärke in Zentimetern. Wenden wir die Formel auf unser Eisen vom Widerstand $1,34 \cdot 10^{-5}$ und auf einen einzigen Kreisprozeß an, so erhalten wir

$$W = 4 f^2 \frac{n}{3 \cdot 1,34} \mathfrak{B}^2 \Delta^2 10^{-4} \text{ erg.}$$

Hieraus berechnet sich für das Bündel B das Maximum der Wirbelstromverluste zu 240 erg. Dies ist nur $\frac{1}{2}$ Proz. vom Gesamtverlust und mithin zu vernachlässigen.

Bei dem dicken Blech hingegen bedingen die Wirbelstromverluste einen großen Teil der Energievergeudung. Durch die Wirkung der Streuung durchsetzen die Kraftlinien den Querschnitt des Blechs nicht mehr senkrecht, was ja in der theoretischen Ableitung der Formel angenommen wird, sondern schräge, und es ist mithin den Kraftlinien zum Hervorrufen von Wirbelströmen eine viel größere Fläche geboten. In solchen Fällen ergeben sich in der Praxis die Wirbelstromverluste nach Arnold 20–50 Proz. größer, als sie mit Hilfe der Formel zu berechnen sind. Vergrößern wir die berechneten Werte der Wirbelstromverluste um 40 Proz. und ziehen wir alsdann diesen Verlust von dem Gesamtverlust ab, so erhalten wir die strichpunktierte Kurve in Fig. 6. Sie zeigt uns das nämliche Resultat wie das dünne Eisen, nämlich, daß auch hier die Hysteresis von der Feldwechselzahl unabhängig ist, wenn man für $\mathfrak{B}$ die ungefähre Grenze von 10000 nicht überschreitet; von da an findet auch hier eine Zunahme der Hysteresis mit wachsender Periodenzahl statt.

§ 7. Abhängigkeit der Permeabilität von der Frequenz.

Wenn wir schließlich noch die Abhängigkeit der Permeabilität von der Frequenz kennen lernen wollen, so ist diese für $n = \text{ca. } 500$ und $\text{ca. } 400$ ohne weiteres aus der Tab. III zu folgern, denn unter Permeabilität versteht man bei Wechselstrommagnetisierung

$$\mu = \frac{\mathfrak{B}_{\text{max.}}}{\mathfrak{H}_{1 \text{ max.}}},$$

1) Arnold, Wechselstromtechnik 1. p. 343.

wobei $\mathfrak{H}_{1 \max.}$ die Maximalamplitude der Grundwelle der $\mathfrak{H}$ -Kurve bedeutet. Da nun bei unseren Resonanzversuchen fast reiner

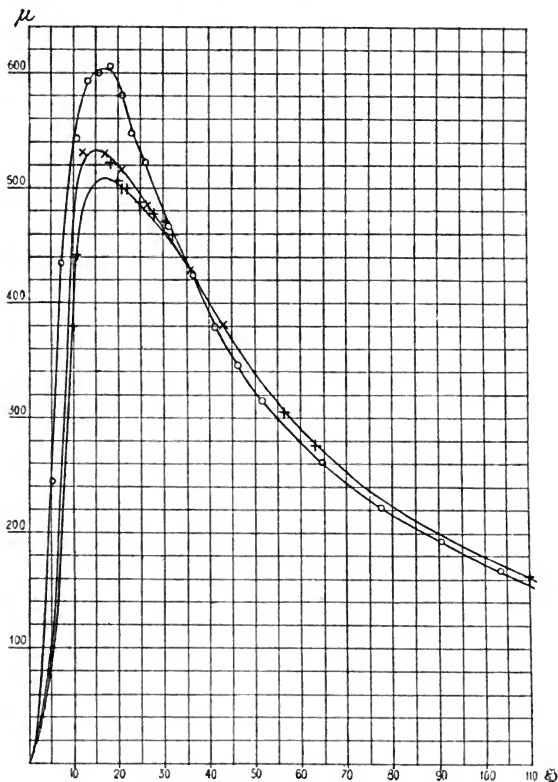


Fig. 7.

Sinusstrom zur Anwendung kam, so dürfen wir hier $\mathfrak{H}_{1 \max.} = \mathfrak{H}_{\max.}$ setzen. Es ergibt sich so die letzte Kolumne in Tab. III und die Fig. 7, in welcher die Permeabilitätswerte der ballistischen

Messung als Kreise $\circ$, und die Wechselstrompermeabilitäten als $+$ $\times$ eingezeichnet sind. Es zeigt sich, daß die Permeabilität mit wachsender Periodenzahl abnimmt, und zwar ist diese Abnahme am größten an der Stelle des Maximums der Permeabilität (15 Proz.). Bei weiterer Vergrößerung nähern sich die Kurven, durchschneiden und trennen sich dann um ca. 3 Proz. Diese Unregelmäßigkeit wird wohl durch Versuchsfehler bedingt sein, indem vielleicht die absoluten Werte bei den Wechselstromversuchen etwas zu groß, oder diejenigen bei den Gleichstromversuchen etwas zu klein sind.

§ 8. Zusammenfassung der Resultate und ihr Vergleich mit den von anderen Beobachtern gefundenen.

Es wurden in vorliegender Arbeit kalorimetrisch die Wechselstromhysteresisverluste ermittelt für die Frequenzen 50, 400 und 500; gleichzeitig wurde die maximale Induktion im Eisen bestimmt, indem man eine sekundäre Spannung maß und die Kurvenform dieser Spannung aufnahm.

Es ergaben sich folgende Resultate:

1. Bezieht man die Hysteresisverluste auf gleiche maximale Induktion, so ist der Verlust von der Periodenzahl unabhängig, wenn man für $\mathfrak{B}$ die ungefähre Grenze von 10000 nicht überschreitet; von da an wächst die Energievergeudung mit zunehmender Frequenz.

2. Die Entmagnetisierung ist im betrachteten Intervall unter unseren Versuchsbedingungen unabhängig von der Frequenz.

3. Die Permeabilität nimmt bei kleinen Feldstärken mit wachsender Frequenz ab und zwar am stärksten an der Stelle ihres Maximums; mit steigender Feldstärke strebt alsdann die Permeabilität bei den verschiedenen Frequenzen einem konstanten Wert zu, demselben, dem sie auch bei magneto-statischen Versuchen zustrebt.

Von dem angegebenen Gesichtspunkt betrachtet, erklärt sich manch scheinbarer Widerspruch in den Resultaten anderer Beobachter. Hopkinson, Maurain und Gray finden bei ihren Messungen gute Konstanz der Hysteresisfläche, da sie

aber maximal nur eine Frequenz von 100 und eine Induktion von 15000 erreichen, so ist es einleuchtend, daß sie Differenzen noch nicht konstatieren konnten. Guye und Herzfeld begehen den Fehler, auf gleichen erregenden Strom zu beziehen, anstatt auf gleiche maximale Induktion, und da sie über die Abhängigkeit der Permeabilität ihres Eisens von der Frequenz nichts aussagen, so ist es kaum zu erkennen, inwieweit ihr Resultat „Absolute Unabhängigkeit der Hysteresis von der Frequenz“ zu gebrauchen ist.

Steinmetz, Niethammer, Krogh u. Rikli und Dina scheinen die Wirbelstromverluste unterschätzt zu haben. Den Einfluß dieses wichtigen Faktors ganz außer acht gelassen haben Corbino und auch Madelung¹⁾, und da bei ihrem dicken Untersuchungsmaterial der Einfluß sehr beträchtlich ist, so kommen diese Arbeiten, die ganz andere Ziele verfolgen, hier nicht in Betracht. Das Resultat von M. Wien stimmt mit dem hier gefundenen überein. Das Resultat von Klemenčič erklärt sich ohne weiteres: bei weichem Eisen, wo er große Induktionen erreicht, findet er eine Zunahme der Hysteresis, bei Stahl und Nickel hingegen, wo, wie es in der Natur ihrer Permeabilität liegt, nur geringe Induktionen erreicht werden, findet er merkliche Konstanz.

Was die Abhängigkeit der Permeabilität von der Frequenz anbelangt, so findet M. Wien, daß die Permeabilität im Sinusfeld stets kleiner ist als im konstanten Feld. Die Differenzen sind am größten an der Stelle des Maximums der Permeabilität. Dies stimmt mit dem hier erhaltenen Resultat überein. Daß M. Wien nicht das Zusammenstreben der Kurven findet, liegt daran, daß er nur mit kleinen Feldstärken gearbeitet hat. Letztere betrugen maximal 29 C.G.S., während hier 140 C.G.S. erreicht wurden. Das Zusammenstreben der Permeabilitätskurven scheint auch Klemenčič erkannt zu haben, denn er sagt, daß die Kurve der Permeabilität sich mit steigender Frequenz immer mehr und mehr einer Geraden nähert und von Anfang an den kleinen Endwert beibehält, der bei statischen Versuchen erst bei großen Feldstärken erreicht wird.

1) E. Madelung, Diss. Göttingen 1905.

Vorliegende Arbeit wurde auf Veranlassung des Hrn. Geh. Hofrats Prof. Dr. W. Wien am physikalischen Institut der Universität Würzburg ausgeführt.

Es sei mir gestattet, Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. Wien für die Anregung zur Arbeit und für das rege Interesse, das er derselben stets entgegenbrachte, meinen innigsten Dank auszusprechen.

Auch Hrn. Privatdozenten Dr. Harms möchte ich an dieser Stelle für manchen guten Rat bestens danken.

(Eingegangen 15. Dezember 1906.)

**4. Über die van der Waals'sche Formel
und die Kontinuität der Aggregatzustände,
Erwiderung an K. Fuchs¹⁾;
von O. Lehmann.**

K. Fuchs gibt an, ich sei unzutrieden damit, daß man die Moleküle eines Stoffes für unveränderlich und in allen Aggregatzuständen gleich beschaffen annehme. Dies ist nicht richtig. Auch mir wäre angenehmer, wenn man jene einfache Annahme machen könnte, ich habe indes eine Reihe von *Tatsachen* aufgefunden, welche sich damit nicht in Übereinstimmung bringen lassen und beklage deshalb,²⁾ daß Lehrbücher und Zeitschriften fortfahren, die Identitäts(Kontinuitäts-)theorie als Grundlage ihrer Deduktionen zu benutzen, ohne jene Tatsachen zu berücksichtigen. Auch K. Fuchs widerlegt keinen der vorgebrachten Gründe, er versucht nur, meine Ansicht über die Natur des kritischen Zustandes³⁾ mit der Theorie von van der Waals zu kombinieren, was unmöglich ist. Bezüglich der letzteren wird gesagt, sie mache die Annahme: „Alle Moleküle eines gegebenen Stoffes sind *gleich* und *frei*, der Stoff ist also ein Gas. Die Moleküle und ihre Kräfte sind *unveränderlich*. Die Moleküle verhalten sich so, als wären sie elastische Kugeln, die Molekularkräfte aber verhalten sich wie *Zentralkräfte*, deren Wirkungsradius gegen den Radius der Moleküle und ihre mittlere Weglänge sehr *groß* ist.“ Diese Annahme sei nur die *allerbequemste*, man könne die van der Waals'schen Erwägungen aber sehr wohl *auch* unter der Annahme *veränderlicher* Moleküle weiter entwickeln, man gelange dann zu *allotropen Flüssigkeiten* und *Kristallisation durch Druck*, welche Erscheinungen allerdings experimentell noch nicht nach-

1) K. Fuchs, Ann. d. Phys. 21. p. 393 u. 814. 1906.

2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 20. p. 77. 1906.

3) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. p. 121. 1877; Molekularphysik 1. p. 139. 1888. (E. Mach, Zeitschr. f. physik. u. chem. Unterricht 2. p. 205. 1889, hebt „das Kapitel über die kritische Temperatur besonders hervor.)

gewiesen seien (!)¹⁾. „Wenn wir ein Gas so lange Gas nennen, als seine Moleküle und deren Kräfte unverändert bleiben, dann kann nach der van der Waalsschen Auffassung ein Gas als Dampf, als *flüssiges Gas* und als *Gaskristall* erscheinen.“ Da aber auch die Moleküle als veränderlich angenommen werden können, gäbe es naturgemäß auch *flüssige* und *feste Kristalle*, die Existenz flüssiger Kristalle bewiese also nicht das Geringste gegen die Kontinuitätstheorie.

Diese Ausführungen zeigen, daß das, was ich über den Widerspruch zwischen der Existenz flüssiger Kristalle und der Kontinuitätstheorie gesagt habe, vollkommen mißverstanden worden ist.

Ein *fester Körper* ist ein solcher, welcher Kohäsion (Zugfestigkeit) und Verschiebungselastizität (Elastizitätsgrenze) besitzt. Eine *Flüssigkeit* hat wohl Kohäsion, welche durch die Oberflächenspannung zum Ausdruck kommt, aber keine Verschiebungselastizität, ihre Elastizitätsgrenze ist Null. *Gase* besitzen auch keine Kohäsion, d. h. sie sind nicht im stande, einen negativen Druck auszuhalten, ihre Zugfestigkeit ist ebenfalls Null.

Von einem „flüssigen Gas“ zu sprechen hat nach diesen Definitionen, welche die Grundlage meiner Betrachtungen bilden, keinen Sinn, es wäre ein Widerspruch in sich selbst. Ob es flüssige und gasförmige „Kristalle“ geben kann, d. h. ob Flüssigkeiten und Gase anisotrop sein können, mit der Fähigkeit bei Überschreitung einer Umwandlungstemperatur (Sättigungstemperatur, Kondensationstemperatur) unter Erhaltung ihrer Anisotropie zu *wachsen*, ist eine Frage, welche aus den Definitionen nicht ohne weiteres beantwortet werden kann. Die Erfahrung hat gezeigt, daß flüssige Kristalle tatsächlich existieren und daß ihre Struktur bedingt ist durch die Struktur der Oberflächenschicht, welche hervorgebracht wird durch die Oberflächenspannung, falls die Kristalltropfen frei schweben. Ist keine Oberflächenspannung vorhanden, so ist anisotrope Beschaffenheit der Oberflächenhaut und damit anisotrope Struktur der (freischwebenden) Flüssigkeit unmöglich, *gasförmige Kristalle*

1) Vgl. O. Lehmann, Zeitschr. f. Krist. 1. p. 120. 1877; Zeitschr. f. physik. Chem. 56. p. 750. 1906; Molekularphysik 1. p. 820. 1888.

kann es also nicht geben, da Körper ohne Kohäsion auch keine Oberflächenspannung besitzen können. Diese Bedeutung der Oberflächenspannung für die Struktur der Kristalltropfen ist Hrn. Fuchs offenbar entgangen, denn er schreibt an anderer Stelle,¹⁾ indem er Bedenken äußert über meine Vorstellung, die polyedrische Form flüssiger Kristalle könne durch Anisotropie bezüglich der Expansivkraft bedingt sein: „Denken wir uns den fließenden Kristall in einem homogenen Medium, das die Form eines kugelförmigen Tropfens hat, und in dem der fließende Kristall *keine* Oberflächenspannung hat. Dann steht der anisotropen Expansivkraft ein in allen Punkten in jeder Richtung *gleicher* Kapillardruck entgegen, der von der Oberfläche des Tropfens stammt; die Exzesse der Expansivkraft in bestimmten Richtungen werden also *nicht* paralysiert. Was wird dann geschehen? Der Kristall müßte sich in diesen Richtungen fort und fort strecken, er müßte in einem Fadennetz auseinanderfahren, bis diese Strahlen sich gegen die Oberfläche des Tropfens stemmen und dort Protuberanzen erzeugen: erst dann wären die Exzesse der Expansivkraft paralysiert.“

Derartige ist natürlich nicht möglich, denn wenn die Oberflächenspannung Null ist, fehlt die Kraft, welche die anisotrope Struktur der Oberflächenschicht aufrecht erhält;²⁾ man könnte also nur schließen, daß in solchem Fall der Kristalltropfen seine Struktur verlieren würde. In Wirklichkeit kann aber der Fall gar nicht vorkommen, da zwei Flüssigkeiten, an deren Grenze die Oberflächenspannung Null herrscht, sich unbeschränkt mit einander mischen. Ein flüssiger Kristall mischt sich aber, ebenso wie ein fester, *unbeschränkt* nur mit einem *isomorphen* flüssigen Kristall, nicht mit einer isotropen Flüssigkeit. Im solchen Falle der Bildung eines flüssigen

1) K. Fuchs, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 4. p. 315. 1906.

2) Diese Wirkung der Oberflächenspannung ist nur zu verstehen unter der Annahme der Existenz von Molekülen, sie ist somit, wenn auch nicht im strengen Sinne, ein Beweis für dieselbe. Es wäre sehr erwünscht, wenn W. Ostwald, welcher die Molekularhypothese auch bei flüssigen Kristallen durch die Energetik ersetzt wissen will (vgl. Zeitschr. f. phys. Chem. 51. p. 750. 1905), sich darüber äußern wollte, wie die Struktur eines Kristalltropfens sich aus energetischen Prinzipien ableiten läßt.

Schichtkristalls aus zwei isomorphen Substanzen, an deren Grenze die Oberflächenspannung gleich Null ist, sind natürlich die Verhältnisse ganz die gleichen, wie wenn die Rindenschicht aus derselben Substanz bestände wie der Kern, den Exzessen der Expansivkraft von innen (im Kern) stehen ebenso große von außen entgegen, es findet somit keine Fadensternebildung statt.

Ob van der Waals, wie nach der Darlegung von Fuchs zu schließen wäre, irgendwo von „flüssigen Gasen“ gesprochen hat, ist mir nicht bekannt, jedenfalls gibt er aber die Existenz von „Gastropfen“ zu, d. h. von Gasmengen, die eine Oberflächenspannung haben, und er muß dies tun, da die Existenz solcher Gastropfen eine direkte Folgerung seiner Theorie ist. Er schreibt¹⁾ bezüglich der Oberflächenspannung: „Wir erinnern nur an die neuerdings durch Bosscha angestellten überraschenden Versuche, die das Vorhandensein dieser Spannung auch in Fällen dartun, wo man es früher nicht vermutete. Später werden wir sehen, daß sie nicht nur bei den Flüssigkeiten besteht, sondern auch bei allen sogenannten Gasen.“

Daß die Existenz von Gastropfen eine Konsequenz der Theorie von van der Waals ist, zeigt folgende Betrachtung, die ich bereits an anderer Stelle gegeben habe.²⁾ Von den **S**-förmigen Kurven, welche sich z. B. für Kohlensäure aus dieser Theorie ergeben, berührt eine (in der Fig. 2984 die zweitunterste) die Abszissenachse. Gehen wir dieser Isotherme von ihrem oberen Ende beginnend entlang, so stellt sie zunächst den Zustand flüssiger Kohlensäure dar, bis die sogenannte „Kurve konstanter Flüssigkeitsmenge“ erreicht wird, an dem Punkte, von welchem aus das horizontale, dem gesättigten Dampf entsprechende Stück der tatsächlichen Druckkurve ausgeht. Daß die **S**-förmige Kurve unter diesen Punkt hinunter sich fortsetzt, entspricht einem labilen Zustand der Flüssigkeit, einem Siedeverzug, der in einem sehr reinem Gefäß eintreten könnte, welches nur flüssige Kohlensäure enthält, wenn der Druck allmählich unter die der betreffenden Temperatur entsprechende Dampftension erniedrigt wird. Schreitet man der

1) Van der Waals, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, deutsch Leipzig 1881. p. 34.

2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 12. p. 340. 1903; Flüssige Kristalle p. 246; J. Frick, Phys. Technik, 7. Aufl. 1. (2) p. 1110.

Kurve entlang immer weiter, so gelangt man schließlich zum Berührungspunkt mit der Abszissenachse. Dort ist der Druck = 0.

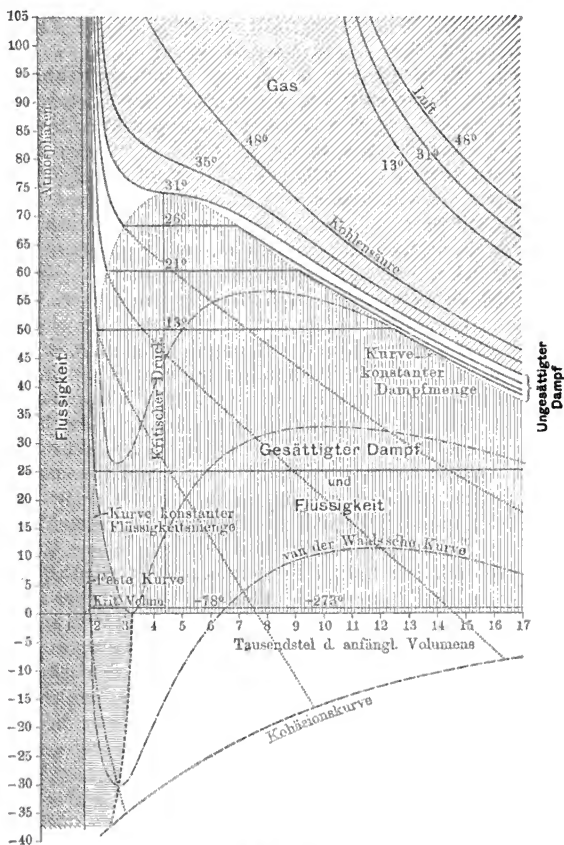


Fig. 2984

aus Frick, Physik. Technik 7. Aufl. Bd. I (2). p. 1110. Braunschweig,
Vieweg & Sohn, 1905.

Unter diesen Punkt hinunter führt die Kurve nicht, d. h. die Flüssigkeit ist nicht imstande, einen negativen Druck auszuhalten, ihre Kohäsion ist Null. Sie ist also tatsächlich keine Flüssigkeit, sondern nur ein stark komprimiertes Gas, das aber die Fähigkeit hat zu *sieden*, d. h. sich durch eine scharfe Grenze von minder dichtem Gas zu sondern. Beim Schnittpunkt der **S**-förmigen Kurve mit der „Kurve konstanter Dampfmenge“ ist das gesamte mit Oberflächenspannung begabte dichte Gas in das minderdichte übergegangen. Geht man von diesem Punkt rückwärts, so entspricht der Verlauf der **S**-förmigen Kurve einem Kondensationsverzug, der bei Abwesenheit von Kondensationskernen eintritt; das vom gleichen Punkt ausgehende horizontale Stück entspricht der Kondensation des minder dichten Gases zu *Tropfen von dichterem Gas*. Erst die unterhalb der betrachteten Isotherme liegenden Kurven, welche in ihrem **S**-förmigen Teil unter die Abszissenachse hinunterreichen, entsprechen wahrer (tropfbarer) Flüssigkeit, d. h. einem Zustand, der negativen Druck zu ertragen imstande ist.

Diese Betrachtung zeigt aber nicht nur, daß es nach der Theorie von van der Waals Gastropfen mit Oberflächenspannung geben muß, sondern sie läßt auch erkennen, daß die **S**-förmigen Kurven gar nicht die richtigen Zustandskurven sein können, die Theorie somit gar nicht berechtigt ist. Man stelle sich vor, an der Spitze eines Trichters hänge ein Tropfen flüssiger Kohlensäure. Dabei hält bekanntlich dem Gewicht des Tropfens die Oberflächenspannung das Gleichgewicht, welche den Zug $2\pi r \cdot a$ nach oben ausübt, wenn r der Radius der Öffnung der Trichterspitze und a die Oberflächenspannung pro Längeneinheit ist. Der Trichter muß sich natürlich, damit Gleichgewicht besteht, in einem gasförmige Kohlensäure von der der betreffenden Temperatur zugehörigen Tension enthaltenden Rezipienten befinden. Man erhöhe nun die Temperatur und lasse, falls der Tropfen verdunsten sollte, wieder neue flüssige Kohlensäure einfließen. Es wird stets gelingen, einen solchen hängenden Tropfen zu erzeugen, welcher von seiner Oberflächenspannung getragen wird, solange nicht die kritische Temperatur erreicht ist! Dann wird die Oberflächenspannung gleich Null und damit die Tropfenbildung unmöglich. Daß der Tropfen hängen kann, ist ein Beweis dafür,

daß die Oberflächenspannung eine *Zugkraft* ist. Demgemäß muß der Tropfen auch einen *negativen* Druck aushalten können, denn die Oberflächenspannung ist ja nur eine besondere Erscheinungsform der zwischen allen Molekülen tätigen Kräfte. Wäre ein einseitig geschlossenes Rohr mit der Flüssigkeit gefüllt und diese am offenen Ende durch einen leicht beweglichen und dichtschießenden Kolben abgegrenzt (z. B. eine ziehend wirkende Quecksilbersäule), und befände sich wieder der Apparat in einer Atmosphäre von gesättigtem Dampf, so wird es möglich sein, auf den Kolben einen bestimmten Zug auszuüben ehe die Flüssigkeit durchreißt, welcher, auf die Flächeneinheit berechnet, die Kohäsion darstellt. Sämtliche tiefer als die kritische Isotherme liegenden Isothermen müssen sich also bis unter die Abszissenachse fortsetzen, die aus der van der Waalsschen Formel sich ergebende S-Form kann nicht zutreffend sein. Sie *endigen*, wie die Figur zeigt unterhalb der Abszissenachse, an dem Punkt, welcher den größten negativen Druck darstellt, den die Flüssigkeit aushalten kann. Verbindet man alle diese Punkte, so erhält man die (ebenfalls in der Figur dargestellte) von der Reinheit abhängige „*Kohäsionskurve*“. Der Zusammenhang mit der dem Dampfzustand entsprechenden Zustandskurve, welchen van der Waals nachweisen wollte, besteht also in Wirklichkeit nicht.

„Die Bezeichnung *Kontinuität* des gasförmigen und flüssigen Zustandes“, sagt van der Waals in der Vorrede zu der zitierten Schrift, „dürfte wohl die geeignetste sein, weil den Betrachtungen der Gedanke hauptsächlich zugrunde liegt, daß man von dem einen Aggregatzustand in *ganz kontinuierlicher* Weise zu dem anderen gelangen kann; geometrisch gesprochen heißt das, beide Stücke der Isotherme gehören *einer* Kurve an, auch dann, wenn diese Stücke durch einen Teil verbunden werden, der nicht verwirklicht werden kann.“ Man sieht, dies trifft nicht zu, die Kohäsionskurve trennt die beiden Kurventeile.

Weiter sagt van der Waals: „Streng genommen habe ich noch mehr beweisen wollen, nämlich die *Identität* beider Aggregatzustände. Findet nämlich die schon zum Teil begründete Vermutung, daß auch im flüssigen Zustand die Moleküle nicht zusammenfallen, um größere Atomkomplexe zu bilden, ihre volle Bestätigung, so gibt es zwischen den beiden

Zuständen nur noch den Unterschied der größeren oder kleineren Dichte; mithin nur einen quantitativen Unterschied.“

Gewöhnlich wird angenommen, daß van der Waals dieser Nachweis der Identität von Flüssigkeits- und Gasmolekülen gelungen sei. In solchem Fall müßte aber der Formel entsprechend die Kontinuität der Kurve bestehen. Tatsächlich besteht diese, wie gezeigt, nicht, somit ist Identität ausgeschlossen, und nur die von mir (1877) angegebene Auffassung zulässig, nach welcher der kontinuierliche Übergang des Gases in die Flüssigkeit durch Auflösung von Flüssigkeit im Gase und vom Gas in der Flüssigkeit bedingt ist, ebenso wie der kontinuierliche Übergang bei der *kritischen Lösungstemperatur*¹⁾ zweier Flüssigkeiten (z. B. Phenol und Wasser). Von solcher Auflösung oder gegenseitiger Mischung könnte natürlich keine Rede sein, wenn, wie van der Waals beweisen wollte, die beiden Zustände der Beschaffenheit ihrer Moleküle nach (diese sämtlich gleich gedacht), identisch wären. Ich bin bekanntlich zur Annahme der Verschiedenheit auf anderem Wege gelangt, nämlich durch die Analogie zwischen Kondensations- und Sublimationserscheinungen einerseits und dem Schmelz- und Erstarrungsvorgang, sowie der polymorphen Umwandlung und der Dissoziation von Molekülverbindungen andererseits.²⁾ Das Nichtvorhandensein der von van der Waals vermuteten Kontinuität der Zustandskurve ist ein weiterer Beweis dafür. Aus der Annahme der Verschiedenheit der Gas- und Flüssigkeitsmoleküle *Kontinuität* der Zustandskurve ableiten, d. h. meine Annahme mit derjenigen von van der Waals vereinigen zu wollen, ist zwecklos, eben weil diese nicht besteht. Aus gleichem Grunde kann die van der Waalssche Kontinuitätsformel nicht gerettet werden durch die Annahme, die mir privatim von verschiedenen Seiten vorgeschlagen wurde, es möchte sich in einigen Fällen die Kondensation eines Gases unter Erhaltung der Moleküle vollziehen, in anderen unter

1) Dieser Ausdruck wurde von mir eingeführt, vgl. Frick-Lehmann, Phys. Technik, 6. Aufl. 1. p. 408. 1890.

2) Vgl. O. Lehmann, Ann. d. Phys. 20. p. 77. 1906; Physikal. Zeitschr. 7. p. 578 u. 722. 1906; Verhandl. d. Karlsr. nat. Vereins 19. p. 106. 1906.

Veränderung derselben. Nach meiner Ansicht muß man in *allen* Fällen von Kondensation eine Änderung der Beschaffenheit der Moleküle annehmen¹⁾, ebenso wie Erstarrung einer Flüssigkeit nur möglich ist, wenn die Natur der Moleküle sich ändert und damit die Wirkungsweise ihrer Kräfte.

K. Fuchs will auch letzteres nicht zugeben, er will auf Grund einer älteren Arbeit²⁾ „für die von O. Lehmann verworfene Raumgittertheorie sprechen“. Ich habe mich schon früher aus anderem Anlaß genötigt gesehen, zu erklären, daß ich gar nicht daran denke, die Raumgittertheorie zu verwerfen³⁾, ich verwerfe nur die Hypothese von der Identität der Moleküle der flüssigen und der festen Modifikation einer Substanz. Zu dieser Verneinung der Identität gelangte ich zuerst durch meine Beobachtungen über das Kristallwachstum bei Ammoniumnitrat.⁴⁾ Diese Substanz zeigt eine außerordentlich starke Zunahme der Löslichkeit mit der Temperatur, was wohl mit der Existenz von fünf festen Modifikationen⁵⁾ zusammenhängt. In der Nähe des Erstarrungspunktes genügen schon minimale Wasserzusätze, um die „Schmelze“ in eine „Lösung“ zu verwandeln, es besteht ein stetiger Übergang zwischen beiden. In beiden Fällen ist in gleicher Weise Skelettbildung der sich ausscheidenden Kristalle zu beobachten, welche meinen Untersuchungsergebnissen zufolge Diffusion des kristallisierenden Stoffes in einer fremden Flüssigkeit voraussetzt und daher ausbleibt, wo nur gleichartige Moleküle vorhanden sind, wie bei der Umwandlung einer festen Modifikation in eine andere. Hieraus zog ich den Schluß: „Auch die Erstarrung der Schmelze

1) Demgemäß ist auch die von K. Fuchs, Ann. d. Phys. 21. p. 825. 1906 dargelegte Rechnung nicht zutreffend.

2) K. Fuchs, Beitrag zur Theorie der Kristallisation, Exners Rep. 2. p. 199. 1888.

3) Vgl. O. Lehmann, Flüssige Kristalle 1904. p. 9. Anm. 1.

4) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallographie 1. p. 433. 1877.

5) Vgl. O. Lehmann, Ann. d. Phys. 21. p. 181. 1906. Es sei hier bemerkt, daß die provisorisch nach Messungen von Dr. Sieveking zu -4° bestimmte Umwandlungstemperatur zu hoch angenommen wurde, da sie der oberen Ausbiegung einer Kurve entspricht, die ich infolge eines Mißverständnisses als *Abkühlungskurve* betrachtet hatte, während sie in Wirklichkeit den Gang der Temperatur bei der *Erwärmung* darstellte, somit die untere, leider undeutliche Ausbiegung maßgebend ist.

ist nichts anderes als die Kristallisation aus einer Lösung, die feste Modifikation muß in der flüssigen gelöst sein, der Erstarrungspunkt ist der Sättigungspunkt dieser Lösung. Bei Substanzen, welche mehrere monotrope Modifikationen haben, die alle aus der Schmelze auskristallisieren können, muß angenommen werden, daß alle diese in einem von Temperatur und Druck abhängigen Mengenverhältnis in der Schmelze gelöst sind. Ist deren Zahl erheblich, so kann die Schmelze leicht überkühlt werden, und, da mit sinkender Temperatur das Gleichgewicht sich zugunsten der festen Modifikationen verschiebt, der Körper allmählich amorph erstarren. Ein amorpher Körper ist also nicht (wie gewöhnlich angenommen wird) ein regelloses Aggregat identischer Moleküle, sondern ein regelloses Aggregat *verschieden* beschaffener, den verschiedenen Modifikationen entsprechender Moleküle.“ Die Untersuchungen über die Umwandlung (Dissoziation) von wasserhaltigen Salzen und anderen Molekularverbindungen, sowie die der Umwandlung polymorpher Modifikationen führten sodann zu dem gleichen Ergebnis, vor allem aber die Untersuchungen über die Plastizität der Kristalle und über die Existenz und das Verhalten flüssiger Kristalle.

Wenn also K. Fuchs l. c. eine Schicht von Schrotkörnern in einer flachen Schale in Analogie bringt zu einem Kristall und sagt: „Wenn man allmählich immer stärker schüttelt, dann verwirrt sich ziemlich plötzlich gleichzeitig die ganze Ordnung und die Schicht wird ausgesprochen kreisrund: der Kristall ist geschmolzen und zu einer Flüssigkeit geworden“, so gibt er allerdings *der* Ansicht Ausdruck, welche zurzeit die herrschende ist, aber *ohne dieselbe zu beweisen*, oder die Gründe, die ich gegen dieselbe vorgebracht habe, zu *widerlegen*. Ich kann mich durchaus nicht zu dieser von K. Fuchs vertretenen Ansicht bekennen, daß der Kristallisationsprozeß darin besteht, daß *dieselben* Moleküle, welche zuvor die flüssige Masse gebildet haben, „sehr leicht in die Gitterordnung größter Arbeit *schnappen*, nach der sie *gravitieren*“. Ich halte vielmehr ein solches Einschnappen der Flüssigkeitsmoleküle für ausgeschlossen, nicht aber das Einschnappen überhaupt, doch erfolgt dieses erst dann, wenn Umwandlung von Flüssigkeitsmolekülen in solche der festen Modifikation mit solcher Ge-

schwindigkeit stattfindet, daß die Sättigungskonzentration erreicht wird.¹⁾

Wenn K. Fuchs bezüglich dieses Einschnappens darauf hinweist, daß er bereits 1888 sich dahin ausgesprochen habe, daß sich die Molekularkräfte so verhalten, „als säßen sie weder im Mittelpunkt noch in der großen Achse, sondern als gäbe es am Ellipsoid (Molekül) mehrere *regellos* verteilte *Attraktionspole*“, so möchte ich darauf hinweisen, daß ich bereits früher (zuerst in einem Vortrag im Dozentenverein in Aachen 1886) die in meiner Molekularphysik 2. p. 375 u. 393 flüchtig skizzierte Hypothese aufgestellt habe, die Moleküle verhielten sich so, wie wenn in ihnen *knotenförmig* gestaltete elektrische Ströme vorhanden wären — richtiger, als ob in ihnen Elektronen auf *knotenförmig* gestalteten Bahnen sich bewegten.²⁾ Derartige *Knotenströme* verhalten sich nämlich wie magnetische Doppelschichten, welche Vorsprünge besitzen, bei geeigneter Gestalt sogar solche von entgegengesetzter Magnetisierung, so daß sie wie Moleküle sich bewegend eine gegenseitige *Richtkraft* ausüben müssen, und wenn die genannten Vorsprünge einander hinreichend nahe kommen (wenn die Sättigungskonzentration erreicht ist), zu einem Raumgitter einschnappen. Die Hypothese, der ich übrigens, solange keine weiteren Beweise vorliegen, keine Bedeutung beilege, hat vor allem den Vorzug, daß sie erklärt, weshalb die Molekularkräfte mit der Entfernung zunächst *zunehmen* und dann plötzlich aufhören. Die eingeschnapten Knotenströme werden nämlich, wenn man sie auseinander zu zerren sucht, sich so deformieren, daß die wirklichen Vorsprünge größer werden, bis schließlich die Trennung stattfindet, worauf sie plötzlich auf die frühere Form zurück-schnellen. Von einem „Gravitieren“ der Moleküle, d. h. von einer *Abnahme* ihrer Anziehungskraft mit der Entfernung kann keine Rede sein, denn in diesem Fall wäre ein Gleichgewicht zwischen Expansivkraft und Binnendruck unmöglich. Auch bei

1) O. Lehmann, Zeitschr. für Kristallographie 1. p. 97. 1877; Molekularphysik 1. p. 682. 1888; Flüssige Kristalle p. 201. 1904.

2) Nachweis durch Einfluß eines äußeren elektrischen oder magnetischen Feldes ist wegen der Stärke der Kräfte zwischen den entgegengesetzten Elektronen unmöglich, man beobachtet nur die durch die Dielektrizitätskonstante und magnetische Permeabilität definierten Erscheinungen.

dem Gleichnis von K. Fuchs kommt dies zum Ausdruck, indem er die Schrottkörner in einer flachen konkaven Schale sich bewegen läßt. Dabei wird die zurücktreibende Kraft infolge der Gestalt der Schale um so *größer*, je *weiter* die Körner sich voneinander entfernen. Der entgegengesetzte Fall des labilen Zustandes liegt genau so, wie etwa bei der Mondbewegung. Der Mond bewegt sich im Kreise um die Erde, wenn die Geschwindigkeit seiner Bewegung genau der Gravitationskraft entspricht. Die geringste Abnahme derselben bewirkt, daß er in einer Spirale der Erde sich nähert, die geringste Zunahme, daß er in Spiralbahn in den Weltraum hinausstürzt. Ebenso müßte Dehnung eines elastischen Körpers Verflüchtigung desselben bewirken, Stauchung Zusammenschrumpfen bis zur Berührung der Moleküle, falls die Moleküle gegeneinander „gravitieren“ würden, stabile Existenz des Körpers unter Einfluß deformierender Kräfte wäre unmöglich.

Karlsruhe, 7. Dezember 1906.

(Eingegangen 10. Dezember 1906.)

5. Zur Theorie des Ferromagnetismus.
1. Mitteilung: Gibt es wahren Magnetismus?
von R. Gans.

—
Einleitung.

Über das Verhalten ferromagnetischer Materialien sind von elektrotechnischer und physikalischer Seite sehr viele wichtige Untersuchungen angestellt worden, aber so gut wie immer mit der ausgesprochenen Tendenz, die Bedürfnisse der Technik zu befriedigen. Daß die Fragen, die bei diesen zweifellos wichtigen Arbeiten sich aufwarfen, für die physikalische Klärung der Vorgänge in Eisen und Stahl nicht immer sehr geeignet waren, ist zu erwarten und ist auch der Fall gewesen. Nun ist es erstens für den Physiker interessant, auch eine Theorie der Ferromagnetika zu haben, um zu sehen, ob diese Körper sich der Maxwellschen Theorie einordnen, und wie sie es tun, und zwar ganz abgesehen von irgendwelcher technischen Anwendbarkeit der Resultate, zweitens aber steht es zu hoffen, daß, wenn die wahren Vorgänge beim Magnetisieren von Eisen und Stahl durch Fragestellungen und Versuchsanordnungen von rein physikalischem Interesse erkannt sind, auch die angewandte Physik, die Elektrotechnik, Vorteil davon haben wird.

Die einfachsten Resultate liegen wohl bei ganz weichem Eisen und ganz hartem Stahl vor, denn es zeigt sich, daß bei kleinen magnetischen Feldstärken ersteres überhaupt keine, bei kleinen Änderungen der Felder letzteres eine konstante Hysteresis (konstante Permanenz) aufweist, und diese Fälle der Hysteresis, welche der Hauptgrund für die Schwierigkeit des Problems ist, lassen sich noch am einfachsten übersehen.

Zunächst wandte ich mich dem Studium der permanenten Magnete zu, von denen die Erforschung der magnetischen Erscheinungen auch historisch ausging. Es ist auffallend, daß

bei der Wichtigkeit der permanenten Magnete für die absoluten Maßmethoden die Unsicherheit über das, was permanenter Magnetismus eigentlich ist, so groß ist. So sagt Lorentz¹⁾, es wird Fälle geben, in denen die Induktionslinienzahl bei irgendwelchen Veränderungen konstant bleibt, andere Fälle, in denen man die freie Magnetisierung (d. i. das Moment des freien Magnetismus, auf die Volumeinheit berechnet) als konstant anzusehen hat; dagegen nimmt Heaviside²⁾ Konstanz einer eingepprägten magnetomotorischen Kraft an, Cohn³⁾ Konstanz der wahren Magnetisierung, eine Annahme, die mit der Heavisideschen identisch ist, solange die Permeabilität als konstant angesehen werden kann. Abraham und Föppl⁴⁾ schließen sich der Annahme konstanter freier Magnetisierung an. Der Grund dieser Unsicherheit ist darin zu suchen, daß über diese Fragen fast keine Experimente angestellt worden sind, und zwar deshalb nicht, weil bei den klassischen Versuchen mit permanenten Magneten (Gauss) im Innern der Magnete im wesentlichen nur das Eigenfeld der überdies noch gesättigten Magnete vorhanden war, höchstens ganz wenig modifiziert durch das Feld der fremden zur Versuchsanordnung gehörenden Magnete. Hier ist die freie Magnetisierung so gut wie konstant, nur bei der äußersten Genauigkeit ist die Berücksichtigung einer Veränderung der induzierten Magnetisierung nötig. (Auch wenn nur ein einziger Magnet vorhanden ist, kommt es in diesem auf den freien Magnetismus an, nämlich den wahren und den durch das Eigenfeld auf ihm selbst induzierten; dieser induzierte Anteil bleibt aber konstant.) Da eine Korrektur wegen des induzierten Magnetismus von Kohlrausch⁵⁾, Sack⁶⁾, Dorn⁷⁾ tatsächlich angebracht worden ist, so haben diese Forscher sich damit für die Konstanz der wahren Magnetisierung ausgesprochen.

1) H. A. Lorentz, Mathem. Enzykl. V. 13. p. 101.

2) O. Heaviside, Electromagnetic Theory 1. p. 37. London 1894.

3) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 185 u. 299. Leipzig 1900.

4) M. Abraham u. A. Föppl, Theorie der Elektrizität 1. p. 374 u. 388. Leipzig 1904.

5) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 22. p. 411. 1884.

6) H. Sack, Wied. Ann. 29. p. 53. 1886.

7) E. Dorn, Wied. Ann. 35. p. 189, 270, 275. 1888.

Von viel bedeutenderem Einfluß ist die induzierte Magnetisierung bei einem permanent magnetischen Kreise mit kleinem äußeren Widerstand, und hier ist die Frage auch für die Technik von Wichtigkeit, da permanente Magnete zu Meßinstrumenten heutzutage vielfache Verwendung finden und eine Vorausberechnung der zu erwartenden Felder wünschenswert erscheinen lassen. So entspann sich denn auch eine lebhafte Diskussion¹⁾ über die Frage, was in einem permanenten Magneten konstant bleibt, wenn der äußere magnetische Widerstand der Anordnung geändert wird. Nachdem R. H. Weber und ich²⁾ das Problem theoretisch behandelt hatten, bestätigte R. H. Weber³⁾ und später in noch weiterem Umfange E. Kempken⁴⁾ das Resultat unserer Überlegungen, daß die magnetomotorische Kraft — und nicht die Kraftlinienzahl — eines permanenten Magneten konstant bleibt.

Bei den Untersuchungen des Hrn. Kempken fiel es mir auf, daß der innere magnetische Widerstand des magnetischen Kreises, der ja von der Permeabilität des Stahles abhängig ist, konstant bleibt, trotzdem die Feldstärken im Innern der Magnete bei den Veränderungen des äußeren Widerstandes stark geändert wurden, eine Beobachtung, die der Magnetisierungskurve der bekannten Stahlsorten widersprach. Ferner war man über die Größe der Feldstärke im Innern der Magnete stets im Zweifel, da die Streitfrage, ob es wahren Magnetismus gibt oder nicht, darauf hinauskommt, daß man sich uneinig ist, was man im Innern eines Magneten als Feldstärke zu bezeichnen hat.

Um über dieses Problem Aufschluß zu erhalten, muß man eine andere Versuchsanordnung wählen als die des Hrn. Kempken, da diese für die Entscheidung der Frage nicht geeignet ist, weil bei ihm der innere Widerstand gegen den

1) J. Busch, *Elektrotechn. Zeitschr.* 22. p. 234. 1901; 25. p. 118, 309. 1904; F. Emde, l. c. 24. p. 949. 1903; H. Weichsel, l. c. 25. p. 34. 1904; R. Hiecke, l. c. p. 35 u. 205. 1904; M. Korndörfer, l. c. p. 101. 1904; H. Eichel, Hallenser Dissertation 1903.

2) R. Gans u. R. H. Weber, *Ann. d. Phys.* 16. p. 172. 1905.

3) R. H. Weber, *Ann. d. Phys.* 16. p. 178. 1905.

4) E. Kempken, Tübinger Dissertation 1906 und *Ann. d. Phys.* 20. p. 1017. 1906.

äußeren zu klein ist, so daß eventuelle Variationen des inneren Widerstandes kaum von Einfluß auf den Gesamtwiderstand sein können.

Die folgende Untersuchung verfolgt zwei Zwecke, erstens die Permeabilität permanenter Magnete bei verschiedenen Magnetisierungen festzustellen, wodurch die Vorausberechnung eines permanenten Magneten erst möglich wird, und zweitens zu entscheiden, ob die Annahme, daß es wahren Magnetismus gibt, oder die entgegengesetzte Annahme die Erscheinungen einfacher beschreibt, d. h. unter welcher Annahme permanent und temporär magnetisierter Stahl sich nicht unterscheiden.

Die Experimente ergeben das Resultat: Die Permeabilität permanenter Magnete ist für alle praktischen Zwecke als konstant zu betrachten, gleichgültig ob der Stahl gar nicht, schwach oder bis zur Sättigung magnetisiert ist. Diese Tatsache spricht für die Existenz von wahren Magnetismus.

Die Frage, ob es wahren Magnetismus gibt, hat im Laufe der Zeit verschiedene Phasen erlebt. Als man magnetische Erscheinungen entdeckt hatte, nahm man natürlicherweise ein besonderes Agens „magnetische Menge“ als Ursache dieser Erscheinungen an; diesen Standpunkt hatte Coulomb inne und nach ihm auch Gauss, und zwar nennen diese Physiker magnetische Menge, was wir freie magnetische Menge nennen würden, denn es ist die wahre Menge jedes Magneten, vermehrt um die induzierte Menge, die ein Magnet auf sich selbst infolge seines Eigenfeldes hervorruft. Daß diese freien Mengen in Wahrheit nicht konstant sind, sobald noch andere Magneten sich im Felde befinden, war oben bereits erwähnt worden.

Daß überhaupt die Möglichkeit vorlag, dieses Agens Magnetismus zu leugnen, liegt daran, daß elektrische Ströme auch magnetische Wirkungen hervorrufen können, daß also die sogenannten Ampèreschen Molekularströme wahren Magnetismus äquivalent sind. Bestärkt wurde die Annahme, daß permanenter Magnetismus in Wahrheit nicht existiert, durch die experimentell beobachtbare Tatsache, daß in jedem Magneten gleichviel positiver und negativer Magnetismus vorhanden ist. Dies ergibt sich z. B. daraus, daß in einem gleichförmigen Felde niemals translatorische Kräfte, sondern immer nur Dreh-

momente auf einen Magneten wirken, oder auch aus der sehr genau geprüften Tatsache, daß die Fernwirkung eines sehr kurzen Magneten der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

In den technischen Darstellungen ist die Anschauung von der Nichtexistenz wahrer magnetischer Mengen ganz allgemein, sie findet sich ausgedrückt in der Annahme, daß der Vektor $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ (die sogenannte Kraftliniendichte) keine Anfangs- oder Endpunkte hat. Auch Drude¹⁾ teilt diese Ansicht, er glaubt sogar, den Beweis führen zu können, daß es keinen wahren Magnetismus gibt.

Dieser Standpunkt scheint augenblicklich recht verbreitet zu sein, wohl zum Teil durch die Erfolge der Lorentzschen Elektronentheorie, in der eine Unsymmetrie der Gleichungen darauf hinweist, daß es nur Elektronen gibt, aber keine Magnetonen. Allerdings erwähnt Lorentz²⁾, daß in der Maxwell'schen Theorie die ganze Frage Auffassungssache sei, indem es einzig darauf ankomme, was im Innern des Magneten als Kraftliniendichte definiert werde, wenn es sich darum handelt, ob diese Kraftlinien Endpunkte haben oder nicht.

Doch scheint der Lorentzsche Standpunkt ziemlich formal; Cohn³⁾ hat bereits vor ihm ganz präzise auf den springenden Punkt hingewiesen, daß die experimentell bekannten Kraftwirkungen und damit die magnetische Energie viel einheitlicher durch die Annahme von wahren Magnetismus dargestellt werden, als durch die entgegengesetzte Hypothese.

Ich möchte hinzufügen, daß jede Funktion der Feldstärke im Innern des Magneten über die Frage Aufschluß geben kann, nicht nur die von Cohn herangezogene magnetische Energie, sondern z. B. auch die Permeabilität.

Meine Messungen bestätigen nun den Cohnschen Standpunkt und sind in entschiedenem Widerspruch zum Drudeschen, sie sprechen also für die Theorie, die wahren Magnetismus annimmt, und gegen die Theorie der Molekularströme, selbstverständlich nur vom Gesichtspunkt einer einfachen und

1) P. Drude, Physik des Äthers p. 52. Stuttgart 1894.

2) H. A. Lorentz, Math. Encyclopädie V. 13. p. 101.

3) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 298. Leipzig 1900.

einheitlichen Darstellung aus; ein *Richtig* oder *Falsch* kann hier nicht in Frage kommen.

Erstere Theorie möchte ich kurz die Quellentheorie, letztere die Wirbeltheorie nennen, weil nach ersterer das Magnetfeld durch Quellpunkte der Kraftlinien, nach letzterer durch Wirbel der Feldstärke hervorgerufen gedacht wird.

Ich könnte dies Resultat meiner Untersuchung kurz in dem Satze zusammenfassen: „Es gibt Magnetonen“, doch hätte dieser Ausdruck nur den „Vorteil“, modern zu klingen; ich vermeide ihn absichtlich, weil er in sich die Hypothese der atomistischen Struktur des Magnetismus enthält, für die bis jetzt gar keine Gründe sprechen.

Theoretischer Teil.

Um die Fragestellung genau zu formulieren, gehen wir von den Maxwell'schen Gleichungen aus, die auf Grund der Quellentheorie für das Feld permanenter Magnete gelten:

$$(1) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{S} = 0,$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{S} = \varrho.$$

$\mathfrak{S}$ bedeutet die magnetische Feldstärke, μ die Permeabilität, ϱ die magnetische Dichte. Hierzu kommt noch die Bedingung, daß

$$(3) \quad \int \varrho \, dS = 0$$

ist, wenn man die Integration über den Raum S eines ganzen Magneten ausdehnt.

Gleichung (3) veranlaßt uns, ϱ in der Form

$$(4) \quad \varrho = -\operatorname{div} \mathfrak{M}^e$$

zu schreiben, wo $\mathfrak{M}^e$ nur *im* Magneten von Null verschieden ist und in der Grenzschicht des Magneten gegen seine Umgebung schnell, aber stetig und differenzierbar in Null übergeht. Sonst ist $\mathfrak{M}^e$ ein ganz willkürlich wählbarer Vektor. Das ist ein Vorzug dieser Größe vor ϱ , welches der Gleichung (3) zu genügen hat. $\mathfrak{M}^e$ heißt die (wahre) eingeprägte Magnetisierung.

Nun läßt sich aber auch ein Vektor $\mathfrak{S}'$ definieren, für

den $\operatorname{div} \mu \mathfrak{H}' = 0$ und $\operatorname{rot} \mathfrak{H}'$ gegeben ist. Setzt man nämlich (4) in (2) ein, und führt den neuen Vektor $\mathfrak{B}$ ein durch

$$(5) \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} + \mathfrak{M}^e$$

und setzt noch

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}', \\ \mathfrak{M}^e = \mu \mathfrak{H}_e', \end{cases}$$

so folgt aus (1) und (2)

$$(7) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H}' = \operatorname{rot} \mathfrak{H}_e',$$

$$(8) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} \mu \mathfrak{H}' = 0.$$

(7) und (8) beschreiben also denselben Zustand, aber auf Grund der Wirbeltheorie, weil hier die Kraftliniendichte $\mu \mathfrak{H}'$ ist und dieser Vektor wegen (8) keine Anfangs- oder Endpunkte besitzt.

Außerhalb permanenter Magnete stimmt $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}'$ überein, weil da $\mathfrak{M}^e = 0$ ist, im Innern der Magnete dagegen gilt wegen (5) und (6) die Beziehung

$$(9) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}' - \frac{\mathfrak{M}^e}{\mu}.$$

Das Feld stationärer Ströme wird nach der Quellentheorie beschrieben durch die Gleichungen

$$(10) \quad c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{J},$$

$$(11) \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0,$$

wo $\mathfrak{J}$ die Strömung bedeutet, und damit übereinstimmend nach der Wirbeltheorie durch

$$(12) \quad c \operatorname{rot} \mathfrak{H}' = \mathfrak{J},$$

$$(13) \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{H}' = 0.$$

Die Wirbeltheorie ist in Beschreibung des *Feldes* einheitlicher¹⁾, wie (7) und (8) einerseits, (12) und (13) andererseits zeigen. Denn gleichgültig, ob das Feld $\mathfrak{H}'$ von permanenten Magneten oder Strömen herrührt, gilt im ganzen Raum $\operatorname{div} \mu \mathfrak{H}' = 0$, d. h. die Kraftlinien laufen in geschlossenen Bahnen, und ferner ist außerhalb der Magnete bez. Stromleiter $\operatorname{rot} \mathfrak{H}' = 0$, d. h. es existiert ein magnetisches Potential, im Innern derselben ist $\operatorname{rot} \mathfrak{H}'$ gegebenen Größen gleich, nämlich gleich $\operatorname{rot} \mathfrak{H}_e'$ bez. $\mathfrak{J}$, die einander vollkommen äquivalent sind.

1) E. Cohn, l. c. p. 299.

Dagegen ergibt die Quellentheorie die Verschiedenheit, daß bei permanenten Magneten ((1) und (2)) der Vektor $\mu \mathfrak{S}$ Quellen hat, der Vektor $\mathfrak{S}$ wirbellos ist, dagegen bei Strömen ((10) und (11)) zwar keine Quellen von $\mu \mathfrak{S}$, aber Wirbel von $\mathfrak{S}$ vorhanden sind.

Dieser Vorzug der Einheitlichkeit der Wirbeltheorie vor der Quellentheorie geht aber bereits verloren, sobald wir die magnetische Energie W betrachten. Cohn hat gezeigt, daß nach der Quellentheorie auf jeden Fall

$$(14) \quad W = \int \frac{\mu}{2} \mathfrak{S}^2 dS$$

ist, einerlei, ob das Feld durch Magnete oder Ströme erzeugt ist, daß dagegen nach der Wirbeltheorie W die Form

$$(15_1) \quad W = - \int \frac{\mu}{2} \mathfrak{S}'^2 dS + \text{Konst.}$$

oder

$$(15_2) \quad W = + \int \frac{\mu}{2} \mathfrak{S}'^2 dS$$

annimmt, je nachdem man es mit Magneten oder Strömen zu tun hat. Nur dann berechnen sich die experimentell beobachtbaren Kräfte richtig.

Dieser Unterschied liegt darin begründet, daß ein System permanenter Magnete in energetischer Beziehung vollkommen ist, daß also die Kräfte bei einer virtuellen Verschiebung Arbeit leisten, die sich durch die *Abnahme* der Energie berechnen muß. Betrachten wir dagegen ein System dauernd konstant gehaltener Ströme, so ist dies kein vollständiges System im energetischen Sinne, wenn wir von der in Joulesche Wärme umgesetzten Energie absehen, und da zeigt es sich, daß die Arbeit sich durch die *Zunahme* der Energie darstellt.

Während also die Energie nach der Quellentheorie eine einheitliche Funktion der Feldstärke ist, ist dies nach der Wirbeltheorie nicht der Fall; die Größe $\mathfrak{S}$ beschreibt die Vorgänge und nicht $\mathfrak{S}'$.

Ebenso liegt die Sache bei der Magnetisierungskurve, wie wir zeigen werden. Aus der Fernwirkung eines permanenten Magneten ergibt sich die Induktion $\mathfrak{B}$ in seinem Innern, und daraus läßt sich sowohl $\mathfrak{S}$ nach der Quellentheorie, wie $\mathfrak{S}'$

nach der Wirbeltheorie berechnen und durch ein schwaches elektromagnetisch erzeugtes Zusatzfeld ballistisch die differentielle Permeabilität

$$d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H} = d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}'$$

für jeden Wert von $\mathfrak{H}$ bez. $\mathfrak{H}'$ bestimmen. Andererseits kann man für dieselbe Stahlsorte die differentielle Permeabilität als Funktion von $\mathfrak{H}$ festlegen, indem man das ursprüngliche Feld elektromagnetisch erzeugt. In diesem Falle ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$, wie aus (10), (11) und (12), (13) folgt; in diesem Falle ergibt sich also dieselbe Funktion $\mu = f(\mathfrak{H})$ nach der Quellentheorie, wie $\mu = f(\mathfrak{H}')$ nach der Wirbeltheorie.

Nun folgt aus meinen Experimenten, daß nach der Quellentheorie auch bei permanenten Magneten μ gleich $f(\mathfrak{H})$ ist, während hier nach der Wirbeltheorie μ gleich einer anderen Funktion $\varphi(\mathfrak{H}')$ gesetzt werden muß.

Während also nach der Quellentheorie die Permeabilität eine einheitliche Funktion der Feldstärke ist, ist dies nach der Wirbeltheorie nicht der Fall; die Größe $\mathfrak{H}$ beschreibt die Vorgänge und nicht $\mathfrak{H}'$.

Experimenteller Teil.

1. *Die Permeabilität permanenter Magnete.* Die Messungen der Permeabilität permanenter Magnete als Funktion der Feldstärke wurde nach folgendem Prinzip ausgeführt: Es wurde an permanenten Magneten gleichzeitig magnetometrisch die Induktion in ihrem Innern und ballistisch durch ein kleines Zusatzfeld die Permeabilität gemessen, und zwar bei verschieden starken permanenten Magnetisierungen.

Zu diesem Zwecke wurde ein verlängertes Rotationsellipsoid aus Stahl — es wurde erstens Silberstahl und zweitens „Remystahl“¹⁾ benutzt, der sich infolge seiner hohen Magnetisierbarkeit für Magnete ausgezeichnet eignet — in einer langen Stromspule permanent magnetisiert, und zwar in aufsteigender wie absteigender Kommutierungskurve, und das verschieden stark permanent magnetisierte Ellipsoid in die Mitte einer Spule von 72 cm Länge gebracht, deren mittlerer Radius $r = 0,741$ cm betrug. Die Spule bestand aus einer Kupferdrahtlage von $n = 8,368$ Windungen pro Zentimeter.

1) Der „Remystahl“ wurde von Heinr. Remy, Hagen i. W. bezogen.

In dem Teil dieser langen, dünnen Spule, in welchem die Magnete sich befanden, war das Feld als gleichförmig aufzufassen, denn der Magnet aus Silberstahl war 25,55 cm lang, der aus Remystahl 19,52 cm. In dieser Spule befanden sich die Magnete in erster Hauptlage eines Magnetometers, dessen Ausschläge mit Spiegel und Skale abgelesen werden konnten.

Aus den Dimensionen des Ellipsoids und dem Abstände R seines Zentrums vom Magnetometer, sowie aus der mit der Tangentenbussole gemessenen Horizontalintensität $H=0,200$ Gauss und den an der Skale abgelesenen Ausschlägen e des Magnetometers und dem Skalenabstand E ergibt sich die homogene Induktion $\mathfrak{B}$ im Innern des Magneten nach der Formel (vgl. unten)

$$(16) \quad \mathfrak{B} = \frac{H e R^3 \pi (1 - N)}{E V} \left(1 - \frac{5}{6} \frac{A^2}{R^2} \right).$$

In dieser Formel bedeutet N eine Größe, die nur von dem Verhältnis der großen zur kleinen Halbachse des Ellipsoids abhängt und für die von mir benutzten, sehr gestreckten Ellipsoide durch die Näherungsformel

$$(17) \quad N = \frac{B^2}{A^2} \left(\lg \frac{2A}{B} - 1 \right)$$

genügend genau dargestellt wird. V ist das Volumen des Ellipsoids; dies ergibt sich nach der Formel

$$V = \frac{4}{3} A B^2 \pi.$$

Beim Silberstahl war $A = 12,77$ cm, $B = 0,453$ cm; daraus folgt $V = 10,97$ cm³. Durch Wägung in Luft und Wasser fand ich $V = 10,96$ cm³, zwei Werte, die sehr gut miteinander übereinstimmen.

Formel (16) läßt sich folgendermaßen ableiten: Nach Gleichung (1) berechnet sich ξ aus einem Potential ψ , welches den Bedingungen zu genügen hat

$$(18) \quad \Delta \psi_i = 0,$$

$$(19) \quad \Delta \psi_a = 0.$$

Auf der Oberfläche des Ellipsoids

$$(20) \quad \psi_i = \psi_a$$

und

$$(21) \quad -\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial n} + 4\pi \mathfrak{M}_n^c = -\frac{\partial \psi_a}{\partial n}$$

wegen (5) und (8), wo $\mathfrak{M}_n^*$ die Projektion der konstanten Magnetisierung $\mathfrak{M}^*$ (die in Richtung der Rotationsachse des Ellipsoids verläuft) auf die Richtung der Oberflächennormalen bedeutet.

Im Unendlichen muß

$$(22) \quad \psi_a = 0$$

sein. Die Integration ergibt im Innern ein konstantes

$$(23) \quad \mathfrak{S} = - \frac{4 \pi \mathfrak{M}^*}{\mu} \frac{\mu \cdot N}{1 + (\mu - 1) N},$$

und wegen (9)

$$(24) \quad \mathfrak{S}' = \frac{4 \pi \mathfrak{M}^*}{\mu} \frac{1 - N}{1 + (\mu - 1) N},$$

so daß

$$(25) \quad \mathfrak{S} = - \mathfrak{S}' \frac{\mu N}{1 - N}$$

wird. Bei langgestreckten Formen ist N wegen (17) eine kleine Zahl, so daß das nach der Quellentheorie aus der Fernwirkung berechnete $\mathfrak{S}$ viel kleiner als das nach der Wirbeltheorie geltende $\mathfrak{S}'$ ausfällt. Das ist aber nur eine Folge der kleinen N , d. h. der sehr gestreckten Formen des verwendeten Ellipsoids.

Für Punkte auf der Verlängerung der Rotationsachse berechnet sich das Feld auch einfach (erste Hauptlage). Dann folgt, daß die konstante Induktion $\mathfrak{B}$ im Innern des Magneten sich aus der Formel (16) berechnet, oder es ist die Feldstärke im Innern des Magneten

$$(16') \quad |\mathfrak{S}| = \frac{H e R^3 \pi N}{E V} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{A^2}{R^2} \right).$$

Die Permeabilitätsmessungen wurden nach der ballistischen Methode ausgeführt. Die Mitte einer langen Primärspule, in welcher das Ellipsoid sich befand, wurde mit einer Sekundärspule aus 0,1 mm dickem Draht umgeben, und zwar mit so vielen Windungen, daß ihr Widerstand gerade gleich dem des astatischen Dubois-Rubensschen Galvanometers war (20 Ω), an welches die Sekundärspule geschaltet wurde. Das ballistische Galvanometer hatte 12 sec Schwingungsdauer, es wurde so justiert, daß die Ausschläge proportional den Stromimpulsen waren, wie die folgende Tabelle zeigt.

Tabelle 1.

W	e_1	e_2	e	$e W$
205,9	79,5	80,2	79,85	16441
105,9	154,9	155,2	155,0	16415
75,92	216,5	216,5	216,5	16432
55,92	293,5	294,0	293,8	16429
45,92	356,2	357,0	356,6	16375

Mittel: 16418

Die Proportionalitätseichung wurde so vorgenommen, daß in einem Primärkreis von W S.E. Widerstand der Strom eines Akkumulators kommutiert wurde. Dadurch erhielt man am Galvanometer die Ausschläge e_1 und e_2 nach wachsenden bez. abnehmenden Zahlen, deren Mittel e ist. Das Produkt $e W$ ist so gut wie konstant, ein Beweis für die Proportionalität der Ausschläge mit den Stromimpulsen, und zwar bei dem von mir benutzten Instrument (Skalenabstand 2,30 m) ohne Korrektion auf die Winkel, was für die praktische Benutzung sehr bequem ist.

Beobachtet wurde der Ausschlag α des ballistischen Galvanometers, wenn ein Strom in der Primärspule kommutiert wurde — und zwar nach der Multiplikationsmethode, da es mir darauf ankam, möglichst kleine Feldänderungen im Magneten vorzunehmen — ferner der Ausschlag α_0 , wenn der Magnet entfernt war; bei diesen beiden Messungen betrug der Widerstand der Primärleitung $W = 101,3$ S.E. Dann wurde der Widerstand verändert auf $w = 21,3$ S.E. und wiederum durch die Multiplikationsmethode der Ausschlag $\bar{\alpha}$ gemessen. Nun sei das Zusatzfeld, welches durch den Strom in der Primärspule erzeugt wird, $\Delta \mathfrak{H}_0 = 4 \pi i n$; bringt man das Ellipsoid in die Spule, so wird das wirkliche Feld infolge der Entmagnetisierung im Innern kleiner, nämlich

$$\Delta \mathfrak{H} = \frac{\Delta \mathfrak{H}_0}{1 + (\mu - 1) N}.$$

Hier bedeutet μ die Permeabilität des Stahles, N den oben erwähnten, von den Dimensionen des Ellipsoids abhängigen Faktor (Gleichung (17)).

$d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ berechnet sich auf Grund der Formel

$$(26) \quad \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} = \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}'} = \frac{\alpha - \alpha_0}{\bar{\alpha}} \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} \frac{Q_2}{Q_1} \frac{W}{w} \{1 + (\mu - 1)N\},$$

in der Q_2 bez. Q_1 den Querschnitt der Primärspule bez. den größten Querschnitt des Magneten senkrecht zu seiner Rotationsachse (Äquatorialschnitt) bedeuten.

Bei der Ableitung dieser Formel ist zu beachten, daß wenn die Primärspule nur lang genug ist, ein merkliches Magnetfeld nur innerhalb der Primärspule existiert, wenn das Ellipsoid nicht in der Spule ist; sobald man aber das Ellipsoid in die Spule steckt, wird beim Schließen des Stromes ein Feld erzeugt, welches auch außerhalb der Primärspule vorhanden ist. Dieser Teil des Feldes ergibt aber bei meiner Anordnung keinen merklichen Anteil an der Induktion in der Sekundärspule, wie ich mich durch Rechnung überzeugt habe.

Tabelle 2.

ϵ	α	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}'} \frac{1}{1 + (\mu - 1)N}$	$\frac{d\mathfrak{H}'}{d\mathfrak{B}} \{1 + (\mu - 1)N\} 10^3$
0,9 mm	193,6	51,77	0,198	34,58	2,892
26,10	195,0	1502	5,740	34,85	2,869
39,45	195,1	2269	8,676	34,86	2,868
64,95	192,9	3735	14,29	34,45	2,902
68,15	192,9	3918	14,98	34,45	2,902
85,6	191,4	4922	18,82	34,18	2,926
87,6	191,2	5037	19,26	34,14	2,929
92,15	190,5	5299	20,26	34,01	2,941

In Tab. 2 sind ϵ und α die Ausschläge des Magnetometers bez. Galvanometers. $\mathfrak{B}$ berechnet sich aus (16), $\mathfrak{H}$ aus (16') unter Benutzung folgender Zahlwerte

$$H = 0,200 \text{ Gauss}, \quad R = 121,5 \text{ cm}, \quad E = 1755 \text{ mm},$$

$$A = 12,77 \text{ cm}, \quad B = 0,453 \text{ cm};$$

Daraus folgt

$$V = 10,96 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad N = 0,00381$$

nach Formel (17),

$$\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}'} \frac{1}{(1 + (\mu - 1)N)}$$

bez. der reziproke Wert

$$\frac{d\mathfrak{H}'}{d\mathfrak{B}} \{1 + (\mu - 1)N\}$$

berechnet sich aus Formel (26) mit Benutzung der Zahlwerte

$$\alpha_0 = 14,0, \quad \bar{\alpha} = 68,0, \quad W = 101,3 \text{ S.E.}, \quad w = 21,3 \text{ S.E.},$$

$$Q_2 = 0,741^2 \pi, \quad Q_1 = 0,453^2 \pi.$$

Tabelle 3.

$\mathfrak{B}$	$\frac{d\mathfrak{H}'}{d\mathfrak{B}} \{1 + (\mu - 1)N\} 10^2$	$\mathfrak{H}' \{1 + (\mu - 1)N\}$	$\frac{\mu}{1 + (\mu - 1)N}$	μ	$\mathfrak{H}'$	$\mathfrak{H}$	$\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}}$
0	2,893	0	—	—	0	0	39,68
500	2,884	14,44	34,62	39,75	12,58	0,192	39,80
1000	2,875	28,84	34,67	39,80	25,13	3,83	39,92
1500	2,869						
2000	2,868	57,54	34,75	39,89	50,13	7,64	40,02
2500	2,872						
3000	2,881	86,26	34,77	39,92	75,15	11,45	39,84
3500	2,892						
4000	2,904	115,2	34,72	39,86	100,3	15,29	39,53
4500	2,916						
5000	2,929	144,3	34,65	39,77	125,7	19,15	39,19

In Tab. 3 sind die ersten beiden Kolumnen durch graphische Interpolation aus der dritten und letzten Kolumne von Tab. 2 entstanden, die dritte Kolumne durch Quadratur nach der Simpsonschen Regel, wobei der Faktor $1 + (\mu - 1)N$, der sich so gut wie gar nicht verändert, als konstant betrachtet ist, die vierte Kolumne durch Division der ersten durch die dritte. Aus $\mu / \{1 + (\mu - 1)N\}$ folgt μ und aus μ und der dritten Kolumne $\mathfrak{H}'$, aus μ und der zweiten $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}' = d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ und aus $\mathfrak{H}'$ und μ nach (25) $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{H}$ hätte man auch durch Interpolation aus Kolumne 4 der Tab. 2 entnehmen können.

2. Die Permeabilität im Schlußjoch. Dann wurde die Magnetisierungskurve derselben Silberstahlsorte durch ballistische Messungen im Schlußjoch aufgenommen, indem das Feld nicht, wie bis jetzt, durch permanente Magnetisierung, sondern auf elektromagnetische Weise erzeugt wurde.

Ich baute mir ein Ewingsches Schlußjoch¹⁾; die Joche *A* und *B* (Fig. 1) bestanden aus sehr weichem Schmiedeeisen, sie waren sorgfältig eben geschliffen. Zwischen dieselben wurden die beiden gleich langen gehärteten Stahlstäbe *C* und *D*, deren Endflächen einander parallel geschliffen waren, mit Hilfe einer hölzernen Schraubzwinge *S* festgeklemt. Die Stäbe waren von je einer Primärspule umgeben, von denen die eine aus 472, die andere aus 478 Windungen auf einem Glasrohr bestand. Diese wurden hintereinander geschaltet, so daß im ganzen 950 Windungen das Magnetfeld erzeugten.

Die Länge der Stahlstäbe betrug $l = 16,4$ cm, ihr Radius 0,450 cm.

Es wurde die sogenannte aufsteigende Kommutierungskurve aufgenommen, indem in der Primärspule ein Strom kommutiert wurde, der in einer den einen Stab umgebenden Sekundärspule einen Induktionsstoß und infolgedessen einen ballistischen Ausschlag am Galvanometer hervorrief.

Das Feld wurde einfach nach der Formel

$$\mathfrak{H} = \frac{4 \pi i N}{L}$$

berechnet, wo $N = 950$ die Zahl der Primärwindungen, L die Länge der beiden Stäbe zusammen bedeutet. Diese Felder werden zu groß, da Luftwiderstände beim Übergang von den Stäben zu den Jochen nicht zu vermeiden waren und der magnetische Widerstand der Backen ganz vernachlässigt ist. Von einer Korrektur durch Scherung ist abgesehen worden, da uns der genaue Verlauf der Kurve im folgenden gar nicht interessiert und nur ein qualitatives Bild der bekannten Kurvenform gegeben werden sollte. Der Einfluß der Scherung wäre der gewesen, daß das Maximum der Permeabilitätskurve höher und bei kleineren Werten von $\mathfrak{H}$ zu liegen käme.

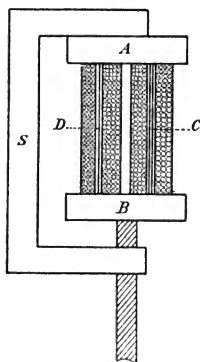


Fig. 1.

1) J. A. Ewing, Magnetische Induktion in Eisen und verwandten Metallen (Deutsche Ausgabe). Berlin und München 1892. p. 70.

In Fig. 2 stellt Kurve I diese Permeabilitätskurve (μ als Funktion von $\mathfrak{H}$) dar, während Kurve II die mit dem permanenten Magneten aufgenommene Permeabilitätskurve bedeutet. Kurve I hat mit dieser, gleichgültig ob wir $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{H}'$ als Abszisse wählen, gar nichts Gemeinsames. Das ist auch gar nicht zu erwarten, da bei den Kommutterungen sehr große Feldänderungen stattfinden, welche eine starke Änderung der Remanenz hervorrufen, so daß hier die Hysterisis im Gegensatz zu den permanent magnetischen Messungen von wesentlichem Einfluß ist.

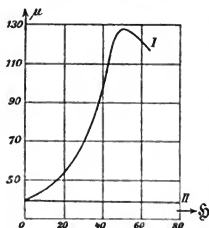


Fig. 2. Silberstahl.

Um nun eine Magnetisierungskurve aufzunehmen, welche der bei den permanent magnetischen Messungen beobachteten genau entsprach, wurden die Primärspulen des Joches noch je durch eine weitere Primärspule umgeben, welche ich die zweiten Primärspulen nennen will, diese hatten je 115, also hintereinander geschaltet 230 Windungen.

Die Messung geschah so, daß in die erste Primärspule ein Strom eingeschaltet wurde, der ein Feld $\mathfrak{H}$ im Stahl hervorrief; dieses Feld entspricht genau dem der permanenten Magnetisierung bei den Ellipsoidmessungen. Der ballistischen Messung der Permeabilität an den permanenten Magneten entspricht auch hier das ganz Analoge. Es wurde nämlich in der zweiten Primärspule ein schwacher Strom geschlossen bez. geöffnet, so daß eine Induktion in der Sekundärspule hervorgerufen wurde. Es wurde also ebenso, wie bei den permanenten Magneten $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ als Funktion von $\mathfrak{H}$ gemessen. Es ist aber zu beachten, daß das auf diese Weise gewonnene $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ ganz andere Werte hat, als wenn man $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ durch Konstruieren der Tangente an der gewöhnlichen Magnetisierungskurve $\mathfrak{B} = f(\mathfrak{H})$ bestimmt. Es ist eben von wesentlicher Bedeutung, daß bei unseren Messungen nur ganz kleine Feldänderungen vorgenommen wurden, durch die die Remanenz nicht verändert wird.

Die Resultate dieser Messungen sind in Tab. 4 wiedergegeben. Es zeigt sich, daß die Permeabilität anfangs konstant ist und für größere Felder schnell — und zwar ziemlich

linear — abnimmt. Wie ich nachträglich fand, hat Lord Rayleigh¹⁾ bereits 1887 ähnliche Messungen angestellt mit ganz entsprechenden Resultaten, aber er gibt keine genauen Zahlen an und enthält sich jeder theoretischen Deutung. Auch er findet, daß die sogenannte differentielle Permeabilität — so nennt man $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ — für kleine Werte von $\mathfrak{H}$ konstant ist und für größere Werte abnimmt, sich also ganz anders verhält als die Permeabilität der Kommutierungskurve I (Fig. 2).

Tabelle 4.

J Amp.	α	$\mathfrak{H}$	$\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}}$
0,00	116,6	0,00	39,31
0,10	116,8	3,64	39,39
0,40	118,1	14,56	39,82
0,70	117,0	25,47	39,45
1,00	109,5	36,39	36,93
1,50	93,0	54,59	31,35
2,00	79,9	72,78	26,94
1,50	93,0	54,59	31,35
1,00	108,6	36,39	36,62
0,80	114,1	29,11	38,47
0,60	118,0	21,83	39,78
0,30	118,8	10,92	40,05
0,00	118,8	0,00	40,05

Tabelle 5.

$\mathfrak{H}$	$\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}}$	$\mathfrak{B}_1$	μ
0	39,68	0	—
5	39,84	19,88	39,76
10	39,92	39,83	39,83
15	39,90		
20	39,85	79,72	39,86
25	39,50		
30	38,38	119,1	39,70
35	37,00		
40	35,70	156,1	39,02
45	34,33		
50	32,97	190,4	38,08
55	31,56		
60	30,19	222,0	37,00
65	28,80		
70	27,43	250,8	35,83

In Tab. 4 bedeutet J den Strom in der ersten Primärspule, $\mathfrak{H}$ die daraus berechnete Feldstärke, α den ballistischen Galvanometerausschlag, aus dem sich $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ ergibt. Als Anfangswert (für $\mathfrak{H} = 0$) ist der absolute Wert von $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ im Schlußjoch ebenso gewählt, wie der bei dem permanenten Magneten bestimmte. Das ist unbedenklich, da hier tatsächlich bei derselben Stahlsorte dieselbe Größe $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ für sehr kleine Felder gemessen ist.

Die ersten beiden Kolumnen von Tab. 5 sind durch graphische Interpolation aus den letzten beiden Kolumnen von Tab. 4 entstanden. Durch Quadratur nach der Simpsonschen Regel folgen die Zahlen der dritten Kolumne; diese sind $\mathfrak{B}_1$ genannt, weil hier nur ein Teil von $\mathfrak{B}$ in Rechnung gezogen ist, nämlich $\mu\mathfrak{H}$, welches bei konstanter Remanenz (sehr kleine Feldänderungen) induzierend wirkt. μ ist als $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{H}$ definiert. Es

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 23. p. 225. 1887.

ist also ein μ berechnet, welches in Betracht käme, wenn keine Hysteresis vorhanden wäre.

Am besten übersieht man die nach den verschiedenen Theorien geltenden Zahlen, wenn man sie graphisch darstellt.

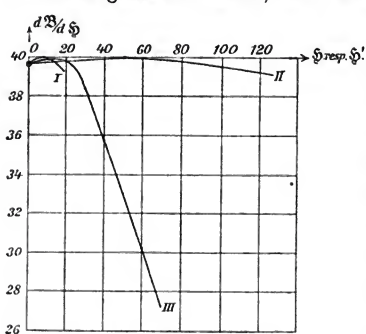


Fig. 3. Silberstahl.

magnetischen Messungen folgende Größe, und zwar nach der Quellentheorie (d. h. $\mathfrak{H}$ ist Abszisse), Kurve II ist dieselbe Größe nach der Wirbeltheorie (d. h. $\mathfrak{H}'$ ist Abszisse), Kurve III ist

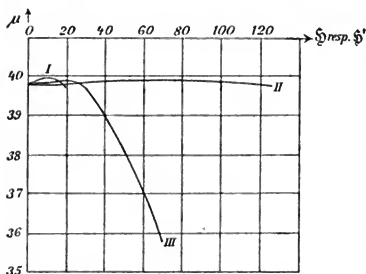


Fig. 4. Silberstahl.

elektromagnetisch im Schlußjoch aufgenommen; diese ist nach der Quellen- und nach der Wirbeltheorie dieselbe. Man sieht, daß in beiden Figuren bis auf verhältnismäßig kleine Abweichungen, Kurve I und III miteinander übereinstimmen, während Kurve II und III ganz verschiedenen Verlauf haben. Man hat zu gegebener Abszisse die Ordinate von I und III bez. von II und III zu vergleichen. Die Abweichungen zwischen Kurve I und III erklären sich vielleicht daraus, daß sämtliche $\mathfrak{H}$ -Werte in Kurve III etwas gefälscht sind.

In Fig. 3 ist $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ (und nicht μ) als Funktion von $\mathfrak{H}$ bez. $\mathfrak{H}'$ gewählt, weil $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ direkt beobachtet ist und auch in stärkerem Maße als μ sich verändert. In Fig. 4 ist dann auch das aus der differentiellen Permeabilität berechnete μ als Funktion von $\mathfrak{H}$ bez. $\mathfrak{H}'$ aufgetragen. In beiden Figuren ist Kurve I die aus den permanent

elektromagnetisch im Schlußjoch aufgenommen; diese ist nach der Quellen- und nach der Wirbeltheorie dieselbe.

Man sieht, daß in beiden Figuren bis auf verhältnismäßig kleine Abweichungen, Kurve I und III miteinander übereinstimmen, während Kurve II und III ganz verschiedenen Verlauf haben.

Die Korrekturen an den Werten können aber erst angebracht werden, wenn beide Kurven I und III nach genau derselben Meßmethode bestimmt sind; dann werden auch weitere wichtige Folgerungen für die Theorie der Magnetisierungsvorgänge gezogen werden können. Jetzt wollen wir von diesen theoretischen Deutungen absehen, die erst an der Hand eines umfassenderen Beobachtungsmateriales gewonnen werden können. Doch sind die Schlüsse über die Existenz des wahren Magnetismus bereits durch das hier gegebene Material begründet. Denn will man unabhängig von der Erzeugungsart (permanent oder elektromagnetisch) des Feldes die Permeabilität als einheitliche Funktion φ der Feldstärke darstellen, so muß man, wie Figg. 3 und 4 zeigen, die Quellentheorie und nicht die Wirbeltheorie wählen.

Es darf nicht auffallen, daß die Kurven I bereits bei so kleinen Feldern aufhören: der permanenten Sättigung des Stahles entspricht nach der Quellentheorie eben nur ein kleines Feld. Durch permanente Magnete kann also nur das Anfangsstadium (bis $\mathfrak{H} = 20$) der durch Tab. 5 dargestellten Permeabilitätskurve beobachtet werden.

3. *Messungen an Remystahl.* Die gleichen Messungen wie am Silberstahl wurden nun noch an Remystahl angestellt; im folgenden sollen diese Meßresultate, welche ganz ähnlich sind, mitgeteilt werden.

Tabelle 6.

e	α	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} \frac{1}{1 + (\mu - 1)N}$	$\frac{d\mathfrak{H}'}{d\mathfrak{B}} \{1 + (\mu - 1)N\} 10^8$
0,45	212,8	30,95	0,200	37,06	2,699
12,9	214,6	887,4	5,742	37,39	2,675
57,3	214,1	3942	25,51	37,29	2,681
84,0	213,8	5779	37,40	37,24	2,685
91,4	211,6	6287	40,68	36,84	2,714
82,4	214,0	5667	36,67	37,27	2,683
33,6	215,1	2311	14,96	37,47	2,669
1,0	213,6	68,79	0,445	37,20	2,687
0,4	212,7	27,52	0,178	37,03	2,701
11,0	214,4	756,7	4,897	37,36	2,677
40,7	213,7	2800	18,11	37,22	2,686
74,4	213,5	5118	33,12	37,18	2,689
87,1	212,6	5991	38,77	37,01	2,702
92,2	210,6	6342	41,04	36,66	2,728
82,0	213,0	5640	36,51	37,10	2,696
33,2	214,2	2283	14,73	37,31	2,680
1,0	212,6	68,79	0,445	37,01	2,702

Für das Ellipsoid aus Remystahl war $A = 9,76$ cm; $B = 0,4747$ cm; daraus folgt $V = 9,21$, während durch Wägung in Luft und Wasser 9,06 sich ergab. Das Mittel aus diesen beiden Werten ist in Formel (16) bez. (16') in Rechnung gezogen, es beträgt $V = 9,135$. Ferner ergibt sich nach Formel (17) $N = 0,00643$. Es war weiter $E = 1767$ mm; R wie früher 121,5 cm. Für $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{P}$ kommt ferner in Betracht

$$\alpha_0 = 13,2; \quad \alpha = 64,0; \quad W = 101,3 \text{ S.E.}; \quad w = 21,3 \text{ S.E.};$$

$$Q_2 = 0,741^2 \pi; \quad Q_1 = 0,475^2 \pi.$$

Tabelle 7.

$\mathfrak{B}$	$\frac{d\mathfrak{P}'}{d\mathfrak{B}} \{1 + (\mu - 1)N\} 10^3$	$\mathfrak{P}' \{1 + (\mu - 1)N\}$	$\frac{\mu}{1 + (\mu - 1)N}$	μ	$\mathfrak{P}'$	$\mathfrak{P}$	$\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{P}}$
0	2,700	0,00	—	—	0	0	48,35
500	2,683	13,46	37,15	48,51	10,30	3,24	48,66
1000	2,676	26,85	37,25	48,63	20,56	6,47	48,78
1500	2,675						
2000	2,675	53,60	37,31	48,71	41,06	12,92	48,81
2500	2,675						
3000	2,675	80,35	37,34	48,74	61,55	19,37	48,81
3500	2,677						
4000	2,679	107,1	37,36	48,76	82,04	25,82	48,73
4500	2,681						
5000	2,683	133,9	37,35	48,75	102,6	32,28	48,66
5500	2,688						
6000	2,699	160,8	37,33	48,73	123,1	38,77	48,37
6150	2,705						
6300	2,713	168,9	37,29	48,68	129,4	40,72	48,11

In Tab. 6 sind zwei Beobachtungsreihen, jede mit wachsenden und abnehmenden Magnetisierungen, dargestellt. Man sieht aus den Zahlen für ϵ und α , daß von Hysteresis nichts zu bemerken ist. Allerdings mußte man den ballistischen Primärstrom, wenn die permanente Magnetisierung geändert war, zunächst einige Male kommutieren, da die ersten Ausschläge tatsächlich unregelmäßig verlaufen, indem sich ein kräftiger Einfluß der Vorgeschichte des Materials bemerkbar macht. Nach diesen Kommutierungen ist aber von Unregelmäßigkeiten nichts mehr zu bemerken.

Zu Tabb. 6 und 7 ist wohl nichts weiteres zu bemerken; sie sind genau wie die entsprechenden Tabb. 2 und 3 für Silberstahl angelegt.

Die aufsteigende Kommutterungskurve des Remystahles im Schlußjoch ist durch Kurve I in Fig. 5 dargestellt. Diese Figur entspricht genau der Fig. 2 für Silberstahl; auch hier sehen wir, daß die durch permanent magnetische Messungen bestimmte Permeabilität Kurve II absolut keine Ähnlichkeit mit der Kommutterungskurve hat. Von letzterer gelten dieselben Bemerkungen wie die zu Fig. 2 gemachten.

Wie beim Silberstahl haben die Werte der differentiellen Permeabilität mit den am permanenten Magneten gemessenen viel mehr Ähnlichkeit; diese sind in Tabb. 8 und 9 zusammengestellt, entsprechend Tabb. 4 und 5.

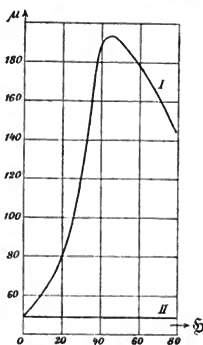


Fig. 5. Remystahl.

Tabelle 8.

J	α	Φ	$\frac{d\Phi}{dH}$
0,00	82,7	0,00	48,18
0,20	83,2	7,00	48,48
0,40	83,5	14,00	48,65
0,60	83,9	21,00	48,89
0,80	84,0	28,00	48,95
1,00	83,5	35,00	48,65
1,25	80,5	43,75	48,90
1,49	74,2	52,16	48,23
2,00	58,5	70,0	31,18
3,00	30,4	105,0	17,71
2,00	52,2	70,0	30,42
1,29	78,5	45,15	45,74
0,90	83,2	31,50	48,48
0,60	83,8	21,00	48,82
0,30	83,6	10,50	48,71
0,00	83,2	0,00	48,48

Tabelle 9.

Φ	$\frac{d\Phi}{dH}$	Φ_1	μ
0	48,33	0	—
5	48,4	24,18	48,36
10	48,7	48,44	48,44
15	48,8		
20	48,8	97,22	48,61
25	48,8		
30	48,8	146,0	48,7
35	48,5		
40	47,6	194,4	48,6
45	46,0		
50	43,7	240,3	48,1
55	40,5		
60	37,4	281,2	46,9
65	34,1		
70	30,8	314,9	45,0

Aus Figg. 6 und 7 ersieht man den Verlauf von $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ bez. $\mu = \mathfrak{B}_1/\mathfrak{H}$ als Funktion von $\mathfrak{H}$. Ebenso wie beim Silber-

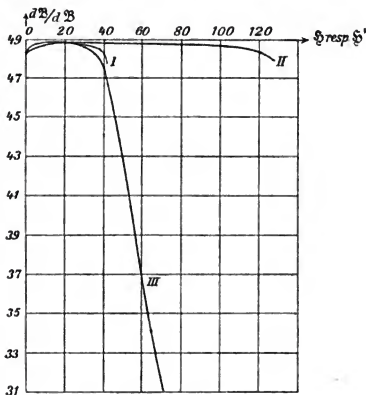


Fig. 6. Remystahl.

stahl ergibt sich beim Remystahl, daß es nach der Quellentheorie, aber nicht nach der Wirbeltheorie, gleichgültig ist,

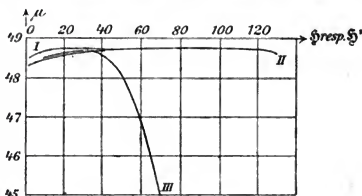


Fig. 7. Remystahl.

ob das ursprüngliche Feld permanent oder elektromagnetisch erzeugt ist. Diese Figuren sind den Figg. 3 und 4 analog.

4. Resultate und offene Fragen.

1. Die Permeabilität permanenter Magnete (μ in Tab. 3 und 7) ist auf Grund der vorliegenden Untersuchung als konstant anzusehen.

2. Die Versuche des Hrn. Kempken haben gezeigt, daß die wahre Magnetisierung bei permanenten Magneten konstant bleibt; also folgt, daß der Induktionsfluß sich bei permanenten Magneten in der Form

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} + \mathfrak{M}$$

darstellen läßt, wo μ und $\mathfrak{M}$ konstante Werte haben.

3. Hr. Kempken schließt aus seinen Versuchen (l. c. p. 1019), daß $\mathfrak{M}/\mu$, und nicht $\mathfrak{M}$, bei permanenten Magneten konstant ist; diesen Schluß zog er auf Grund der üblichen Permeabilitätskurve (vgl. z. B. Fig. 2 oder Fig. 5 der vorliegenden Abhandlung). Nun zeigt sich, daß das in richtiger Weise gemessene μ so gut wie konstant ist. Da ich für die Arbeit des Hrn. Kempken die Verantwortung trage, so nehme ich diesen Schluß des Hrn. Kempken zurück, er verliert jetzt auch an Bedeutung. An den Resultaten des Hrn. Kempken ändert sich dadurch aber nichts; auf Grund der damals vorliegenden Zahlenangaben mußte er den erwähnten Schluß ziehen.

4. Die an permanenten Magneten gemessene Permeabilitätskurve stimmt mit der an temporär magnetisiertem Stahl gemessenen überein, wenn man bei der elektromagnetischen Erzeugung der Felder die Permeabilität nicht aus der Kommutierungskurve, sondern aus der differentiellen Permeabilität berechnet.

5. Dabei ist es notwendig, daß die Felder $\mathfrak{H}$ im Innern des permanenten Magneten unter der Annahme berechnet werden, daß der Vektor $\mu \mathfrak{H}$ Anfangs- und Endpunkte hat, d. h. daß es wahren Magnetismus gibt.

6. Bei gleicher Fernwirkung (gleiches $\mathfrak{B}$ oder gleiches $\mathfrak{H}$) hat magnetisierter Stahl nicht immer die gleiche Permeabilität; diese hängt davon ab, ob die Fernwirkung durch permanenten oder temporären Magnetismus hervorgerufen wird.

7. Die differentielle Permeabilitätskurve ist anfangs der $\mathfrak{H}$ -Achse annähernd parallel und geht dann in eine ziemlich steil nach unten verlaufende Gerade über, sie setzt sich also bis auf einen kleinen Bereich genähert aus zwei geraden Linien zusammen.

8. In einer folgenden Arbeit soll untersucht werden, wie sich die differentielle Permeabilität verhält, wenn die Zusatz-

felder senkrecht zum ursprünglichen Feld erzeugt werden, d. h. ob magnetisierter Stahl in magnetischer Beziehung isotrop oder anisotrop ist.

9. Ferner sollen die hier veröffentlichten Messungen an sorgfältiger hergestellten Ellipsoiden alle nach der gleichen Methode wiederholt werden, während das bis jetzt mit verwendete Schlußjoch zunächst beiseite gelassen werden muß, da für größere Genauigkeit die Feldkorrekturen am Schlußjoch ohne geeignete Magnetisierungstheorie nicht angebracht werden können, und zwar sollen am selben Ellipsoid gleichzeitig $\mathfrak{B}$, $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ und die remanente Induktion $\mathfrak{B}_r$ gemessen werden. Diese Versuche sollen darüber entscheiden, ob man die Magnetisierungsvorgänge nicht vielleicht besser darstellen kann, wenn man jede Induktion $\mathfrak{B}$ in elektromagnetische Induktion $\mu\mathfrak{H}$ und remanente Induktion $\mathfrak{B}_r$ zerlegt, so daß auch bei Vorhandensein von Hysteresis über die Magnetisierungskurve etwas ausgesagt werden kann.

10. Nach Beendigung dieser Versuche soll auf Grund des Beobachtungsmaterials eine Theorie und Gleichung der Magnetisierungskurve aufgestellt werden; das ist das Endziel dieser Untersuchungen.

Tübingen, Physik. Institut, 17. Dezember 1906.

(Eingegangen 19. Dezember 1906.)

**6. Untersuchungen
am stromliefernden Daniellelement;
von Walter Block.**

(Auszug aus dem zweiten, bisher nicht veröffentlichten Teil der
Königsberger Inaugural-Dissertation.)

Die vorliegenden Untersuchungen sollen sich mit Fragen beschäftigen, die sich auf Erscheinungen in galvanischen Elementen beziehen, wenn diesen Strom entnommen wird. An anderer Stelle¹⁾ ist darauf eingegangen, nach welchen Methoden und unter welchen Bedingungen die Konstanten eines Elementes, innerer Widerstand und Spannung bestimmt werden können. Ich will daher an dieser Stelle nicht darauf eingehen. Ich wiederhole hier nur, daß die nachfolgenden Untersuchungen am Daniellelement in seiner reversibeln Form vorgenommen sind, an dem Element, das sich die längste Zeit als Normalelement erhalten hat und der Typus aller viergliedrigen Elemente mit flüssigem Depolarisator ist, ein Typus, der für unsere Zwecke nur in Frage kommt. Es ist nicht das Ziel der Arbeit, dieses Element als ideales stromlieferndes Normalelement — eine solche Ausdrucksweise widerspricht sich selbst — hinzustellen, sondern es soll nur untersucht werden, mit welcher Genauigkeit das Element als Spannungsnormal angesehen werden kann, wenn es durch bestimmte Widerstände — ich vermeide es absichtlich, die Stromstärke anzugeben — geschlossen wird. Eine Theorie der beobachteten Erscheinungen zu geben, liegt nicht im Rahmen dieser Arbeit.

I. Bemerkungen über die passende Konstruktion des Elementes.

Für unsere Zwecke kann von der Unzahl verschiedener Konstruktionen des Daniellelementes nur eine sehr beschränkte Zahl in Frage kommen. Zunächst können keine Elemente berücksichtigt werden, die verdünnte Elektrolyte benutzen,

1) Inaugural-Dissertation. Königsberg i. Pr. 1906.

da deren Zusammensetzung sich bei Stromentnahme zu sehr verändert; außerdem haben sie noch den Nachteil des großen inneren Widerstandes. Bei meinen ersten Versuchen, die sich speziell auf Widerstandsmessungen bezogen, ergab es sich als sicher, daß ein Versuch, Elemente mit gleichem inneren Widerstand zu bauen, aussichtslos war, abgesehen davon, daß dieser schon von der geometrischen Form des Elementes abhängig ist. Um den Einfluß dieses nun auf das kleinste Maß herabzudrücken, bleibt nur übrig, ein Element mit kleinem inneren Widerstand auszuwählen.

Als zweckmäßigste Form ergab sich demnach die ursprüngliche Zylinderform, mit einem Zinkkreuz. Die Dimensionen der im folgenden benutzten Elemente waren so gewählt, daß zwei Typen benutzt wurden, die in Gläsern von 80 und 95 mm Durchmesser und 150 bez. 180 mm Höhe untergebracht waren. Die Kupferelektroden hatten ca. 165 bez. 445 cm² Oberfläche, die Zinkkreuze ca. 175 bez. 420 cm².

Das Kupferblech wurde durch Einsetzen in ein Hilfselement und Kurzschließen dieses mit einer stets frischen Schicht elektrolytischen Kupfers überzogen, das Zink durch Eintauchen in HgNO₃ amalgamiert.

Die Elektrolyte, Kupfersulfat und Zinksulfat wurden stets konzentriert benutzt. Ein geringes Vermischen beider Flüssigkeiten ist praktisch ohne Belang. Die Konzentration des Kupfersulfates durch Kristalle künstlich zu erhalten, ist von geringerem Wert, denn einerseits wird, wenn man den ganzen zur Verfügung stehenden Raum mit Kristallen ausfüllt, der Widerstand in ganz unkontrollierbarer Weise vergrößert, andererseits halten Kristalle, die nur den Boden bedecken, auch nur die untersten Schichten konzentriert, wie durch quantitative Messungen festgestellt wurde.

Die Oberfläche des Kupfers bleibt bei Stromentnahme unverändert, während am Zink sich nach kurzer Zeit Zinkschwamm in größeren Mengen bildet, eine Tatsache, die für die physikalische Chemie nicht ohne Interesse ist.¹⁾ Von störendem Einfluß auf den Spannungsverlauf ist indessen ein Kupfer-

1) Vgl. z. B. W. Luther u. N. Schilow, Zeitschr. f. physik. Chem. 46. p. 803. 1903.

niederschlag auf dem Zink, der sich sehr leicht bildet und auf keine Weise verhindert werden kann.

II. Über den Spannungsverlauf der geschlossenen Elemente.

Die ersten Beobachtungen beziehen sich darauf, wie die Spannung der geschlossenen Elemente sich mit der Zeit verändert. Die Beobachtungen wurden so angestellt, daß die Klemmspannungen am Kompensationsapparat gemessen wurden. Im Zusammenhang damit wurde gleichzeitig die Frage behandelt, wie es zu erreichen ist, um möglichst schnell eine konstante Spannung, oder doch einen konstanten Gang derselben zu erzielen. Als zweckmäßigstes Mittel hierfür in manchen Fällen erwies sich ein Kurzschluß der Elemente gleich nach dem Zusammensetzen, der sich über 5—10 Min. erstreckte.

Es soll zunächst eine kleine Zahl von Beispielen gegeben werden, um zu zeigen, wie die Beobachtungen angestellt wurden, und wie sie übereinstimmten. Es sind Beobachtungsreihen mittlerer Übereinstimmung ausgewählt.

I.			II.		
Äußerer Widerstand 200 Ω			Äußerer Widerstand 20 Ω mit Kurzschluß zu Beginn		
Zeit	Element I	Element II	Zeit	Element I	Element II
0 ^h 0 ^m	Elemente angesetzt		0 ^h 0 ^m	Elemente angesetzt und kurz geschlossen	
25	1,0675 Volt	1,0693 Volt	10	durch 20 Ω geschlossen	
34	93	1,0729	20	1,0208 Volt	1,0288 Volt
45	97	44	30	07	86
1 1	1,06939	1,07497	45	09	84
9	917	494	1 5	11	83
23	886	465	20	1,02139	1,02830
45	829	332	45	169	860
2 35	642	1,06986	2 5	214	887
3 4	523	795	46	264	920
4 17	475	663	3 18	305	953
6 51	735	810	5 48	482	1,03070
9 33	950	940	23 51	1,02291	1,02730
24 40	1,06819	1,06837			

Die Zahlen sind so weit mitgeteilt, daß die letzte Stelle bis auf 1—2 Einheiten sicher ist. Um Raum zu sparen, sollen

nun nicht die ganzen Beobachtungsreihen mitgeteilt, sondern nur die Resultate zusammengefaßt werden:

Die Größe der Elemente hat auf den Spannungsverlauf keinen wesentlichen Einfluß. Die Spannung in den großen Elementen nimmt ein wenig schneller ab als in den kleinen, eine Tatsache, die wohl durch das Sinken der Konzentration in den oberen Schichten der Kupfersulfatlösung zu erklären ist.

Von Interesse sind vielleicht noch die Mitteilungen über den Einfluß eines Kurzschlusses von vielleicht 10 Min. Dauer auf den Verlauf der Spannung.

Bei offenen Elementen und bei großen äußeren Widerständen — etwa in den Grenzen von ∞ bis $500\ \Omega$ — ist er von unwesentlichem Einfluß auf den Verlauf der Spannung.

Bei mittleren Widerständen — etwa von $500\ \Omega$ bis $100\ \Omega$ — zeigt es sich, daß ein Kurzschluß schädlich wirkt; ohne diesen erreicht ein Element viel schneller eine gewisse Konstanz der Spannung.

Höchst eigentümlich ist das Verhalten der Elemente bei kleinen äußeren Widerständen — etwa $100\ \Omega$ bis $20\ \Omega$, und weiter herunter zu gehen, kann ich nach meinen Erfahrungen nicht empfehlen —, da die Elemente ohne Kurzschluß stundenlang einen beträchtlichen Anstieg der Spannung aufweisen, während diese nach dem Kurzschluß eine völlig genügende Konstanz nach vielleicht 30 Min. erhält.

Allgemein würde also die Regel aufzustellen sein, daß es nur dann ratsam ist, durch Kurzschluß die Spannung konstanter zu machen, wenn dem Element ein Strom von ca. 0,01 bis 0,05 Amp. entnommen werden soll.

Zu bemerken ist noch, daß nach Kurzschluß die Spannung etwas schneller abnimmt, als gewöhnlich, was wohl durch die starke Stromentnahme von ca. 0,5 Amp. während 10 Min. seine Erklärung findet.

Ähnliche Untersuchungen, wie oben mitgeteilt, bei Widerstandsmessungen anzustellen, ist von keinem großen Wert. Denn die Widerstände verschiedener Elemente sind so abweichend, daß man ein völlig klares Bild nicht erhält.

Der Widerstand der kleinen Elemente schwankt zwischen 0,9—1,4 Ω ; kleinere Werte habe ich nie, größere bisweilen erhalten. Von der Temperatur ist er ebenso abhängig, wie

der der Elektrolyte, d. h. er sinkt bei steigender Temperatur. Vom hindurchgehenden Strome — die Beobachtungen geschahen nach der modifizierten Lessschen Methode¹⁾ — ist er wenig abhängig, entsprechend der geringen Polarisation der Elemente. Eine zuverlässige Angabe, wie er mit wachsender Stromstärke steigt, konnte nicht erhalten werden. Zeitlich verändert er sich so, daß er sich gleich nach dem Ansetzen stark füllt, bis er in einer halben Stunde einen konstanten Wert erhält, der stundenlang andauert. Dann beginnt er langsam gleichzeitig mit der Bildung von Zinkschwamm zu steigen.

Der innere Widerstand der großen Elemente liegt in der Grenze von 0,6—1,0 Ω . Sonst gilt für diese das gleiche.

III. Bestimmung des Temperaturkoeffizienten der Spannung und seiner Abhängigkeit von der Stromstärke.

Während alle bisherigen Temperaturkoeffizientenbestimmungen sich darauf beschränken, diesen in stromlosem Zustand zu messen, soll im folgenden der Versuch gemacht werden, diesen bei Stromabgabe zu beobachten.

Die Beobachtungen wurden so angestellt, daß die Klemmspannungen von einer großen Zahl Elemente während ca. 24 Std. gemessen wurden, die in zwei Gruppen auf den Temperaturen von ca. 20° und 7° gehalten wurden. Die Temperatur wurde im Innern der Elemente gemessen. Widerstandsmessungen zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft wurden als überflüssig nicht angestellt, da deren Einfluß auf den Wert des Temperaturkoeffizienten sich nur bei stärkeren Strömen merkbar machte, aber noch innerhalb der tatsächlichen Fehlergrenze blieb.

Es wurden drei umfangreiche Messungsreihen gemacht, deren Resultate folgende waren:

	Äußerer Widerstand ∞	100 Ω	20 Ω
I	+1,6	+4,9	+24 · 10 ⁻⁴ Volt
II	2,2	5,5	33
III	2,3	4,7	27
Mittel:	+2	+5	+28 · 10 ⁻⁴ Volt

1) Vgl. Dissertation p. 19.

Es ergibt sich damit das überraschende Resultat, daß das Element in offenem und geschlossenem Zustande einen verschiedenen Temperaturkoeffizienten der Spannung besitzt, und zwar steigt dieser mit der Stromentnahme. Die Werte von $+2$ und $+5 \cdot 10^{-4}$ Volt können als ziemlich sicher angesehen werden, während der Wert von $+28 \cdot 10^{-4}$ Volt einen größeren Anspruch auf Genauigkeit nicht machen kann, trotz der relativ guten Übereinstimmung der Einzelwerte.

Jedenfalls steht aber damit die Tatsache fest, daß man bei geschlossenen Elementen durchaus nicht den Temperaturkoeffizienten der Spannung im offenen Zustand als den allgemein gültigen ansehen darf.

Zur genauen Definition der Lösungen, die ich benutzte, will ich noch bemerken, daß alle, sowohl in den Elementen, die bei der höheren Temperatur beobachtet wurden, wie bei den in der niedrigeren, stets konzentriert waren.

IV. Abhängigkeit der Spannung von Daniellelementen vom hindurchgehenden Strom.

Es soll endlich noch die Frage behandelt werden, wie groß in den von uns untersuchten Elementen die Spannung der Polarisierung ist. Ich will feststellen, wie groß die Polarisierung ist, die durch den eigenen Strom des Elementes hervorgerufen wird, d. h. ich will untersuchen, wie groß die Spannung des Elementes im offenen und wie groß sie bei gegebenem äußeren Widerstand ist. (Bemerken will ich noch, daß unter Spannung, die gesamte elektromotorische Kraft, nicht etwa Klemmspannung zu verstehen ist.) Die Differenz der so erhaltenen Werte gibt die Polarisierung, die einem gegebenen äußeren Widerstande entspricht.

Die Beobachtungen wurden stets an mehreren Elementen gleichzeitig nach der in meiner Dissertation p. 46 angegebenen Paalzowschen Methode angestellt. Es wurde der Verlauf der Klemmspannung gemessen, dann wurden die Elemente durch den doppelten Widerstand geschlossen, und dann der weitere Spannungsverlauf bei dem ersten äußeren Widerstande. Aus den erhaltenen Daten ergab sich dann die elektromotorische Kraft. Als Widerstand wurde der mittlere der zugleich beobachteten Elemente angesehen, als Spannung der mittlere beob-

achtete Wert, der Wert, der als der durchschnittliche angesehen werden konnte, wenn das Element seine größte Konstanz erreicht hatte.

Die äußeren Widerstände, bei denen beobachtet wurde, waren: ∞ , 4000, 400, 200, 100, 40 und 20 S.E.

Es wurden drei vollständige Reihen für die kleinen Elemente beobachtet. Es ergab sich dann als Mittelwert der Spannung der offenen Elemente, unter sorgfältiger Berücksichtigung aller Vorsichtsmaßregeln

1,0770 Volt.

Dieser Wert kann zugleich als der definitive von mir erhaltene Wert für das Element



angesehen werden.

Zwei einzelne Beobachtungssätze sollen hier (p. 512) mitgeteilt werden.

Die gesamten Resultate der drei Beobachtungsreihen sind folgende:

Äußerer Widerstand	∞	400	200	100	40	20 S.E.
I	1,07895	0717	0709	0700	0696	0674 Volt
II	71	21	11	03	94s	70 „
III	70	22	10	03s	98	65 „
Mittel	1,0770	0720	0710	0702	0696	0669 „
Polarisation	0	0,0050	0060	0068	0074	0101 „

Das Daniellelement ist also durchaus nicht als polarisationsfrei anzusehen; diese übersteigt aber bei einer durchschnittlichen Stromentnahme nicht den Wert von 0,01 Volt.

Gegen die mitgeteilten Zahlen kann nun der Einwand erhoben werden, daß sie zu speziell sind. Ich habe deswegen mehrere ähnliche Beobachtungen gemacht, um die allgemeine Gültigkeit nachzuweisen.

Zunächst bestimmte ich die Polarisation in den großen Elementen. Es ergab sich z. B. bei einem Beobachtungssatze bei 100 S.E. äußerem Widerstand 1,0712 Volt, als mittlere Spannung der offenen Elemente 1,0782 Volt, also als Polarisation 0,0070 Volt, ein Wert, der innerhalb der Fehlergrenze mit obigem übereinstimmt.

I.

Äußerer Widerstand 4000 S.E.

Element-Nr.

Zeit	I	II	III	IV
0^h 0^m	Elemente angesetzt			
1 0	1,07308	1,07442	1,07344	1,07319
30	364	445	417	369
2 0	386	561	453	386
5 15	462	655	711	541
25	468	664	721	552
	durch 8000 S.E. geschlossen			
35	0,53718	0,53870	0,53905	
45	722	876	911	
	durch 4000 S.E. geschlossen			
55	1,07489	1,07696	1,07759	582
6 5	492	699	764	586
22 30	365	886	681	1,08102

Spannung des offenen Elementes

1,0810 Volt

Mittlere Spannung der übrigen Elemente 1,0764 Volt

Widerstandsbestimmung

5^h 15^m	1,07609	Widerstand 2,60 S.E.
25	618	
35	0,53831	1,07633
45	886	0,53834
55	1,07648	Korrigierte Spannung
6 5	652	1,0769 Volt

II.

Äußerer Widerstand 40 S.E.

Element-Nr.

Zeit	I	II	III	IV
0^h 0^m	Elemente angesetzt			
42	1,03737	1,03844	1,03839	1,07461
1 18	772	910	856	529
2 3	788	965	876	584
5 6	878	1,04059	904	748
16	878	062	910	
	durch 80 S.E. geschlossen			
26	0,52707	0,52805	0,52764	
36	698	803	761	
	durch 40 S.E. geschlossen			
46	1,03877	1,04072	1,03915	
56	902	083	924	861
23 20	830	1,03923	685	745

Spannung des offenen Elementes

1,0775 Volt

Mittlere Spannung der übrigen Elemente 1,0388 Volt

Widerstandsbestimmung

5^h 6^m	1,03947	Widerstand 1,18, S.E.
16	950	
26	0,52759	1,03956
36	754	0,52757
46	1,03958	Korrigierte Spannung
56	970	1,0396 Volt

Weiterhin untersuchte ich die Polarisirung in den kleinen Elementen, wenn die Form dieser so verändert wurde, daß das Kupferblech fest um den Tonzylinder herumgelegt wurde. Es ergab sich hier bei ebenfalls 100 S.E. äußerem Widerstand z. B. als Spannung 1,0702 Volt, als Spannung der offenen Elemente 1,0770 Volt, also als Polarisirung 0,0068 Volt, wie oben. Ähnliche Reihen wurden mehrfach wiederholt und ergaben stets die gleichen Resultate.

Wir haben damit folgendes allgemeine Resultat:

Die Polarisirung ist in Elementen mit konzentrierter Lösung nur abhängig von der Stromstärke, ein Resultat, auf das z. B. schon F. Neumann in seinen Vorlesungen¹⁾ hinweist, allerdings noch ohne Hinweis auf die Konzentration der Lösungen.

Um die beobachteten Erscheinungen zu erläutern, und um einige Anhaltspunkte zur Erklärung zu finden, habe ich noch einige Versuche an Elementen mit verdünnten Lösungen angestellt, während die Elemente sonst die gleichen bleiben. Ich benutzte $\frac{1}{10}$ -Normallösungen. Den Anspruch auf gleiche Genauigkeit wie früher können diese Beobachtungen nicht machen, denn die Elemente erwiesen sich als höchst inkonstant. Wie stark diese waren, geht zur Genüge aus den mitgetheilten Zahlen hervor.

Polarisation in großen und kleinen Elementen bei $\frac{1}{10}$ -norm. Lösungen.
Äußerer Widerstand 100 S.E.

Element		Große Elemente		Kleine Elemente	
Zeit		I	II	III	IV
0 ^h 0 ^m		Elemente angesetzt			
	offen				
5 6		1,10301	1,10435	1,10362	1,10379
16		295	431	353	374
26		291	425	344	372
Äußerer Widerstand 200 S.E.					
46		0,53455	0,53777	0,52503	0,52305
56		382	684	689	216
6 6		344	606	830	196

1) F. Neumann, Vorlesungen über elektrische Ströme. Leipzig 1884. p. 70.

Äußerer Widerstand 100 S.E.				
Element	Große Elemente		Kleine Elemente	
Zeit	I	II	III	IV
26 ^m	1,05381	1,05031	1,04359	1,05244
36	406	4922	504	281
46	549	5024	664	326
56	665	194	753	349
Äußerer Widerstand 200 S.E.				
7 ^h 16 ^m	0,53648	0,53671	0,53306	0,53217
26	648	670	315	207
36	647	671	322	197
offen				
56	1,10363	1,10511	1,10422	1,10455
6	364	514	401	451
10	362	511	384	445
Spannung offen	1,10329	1,10455	1,10328	1,10413
Sp. bei 200 S.E.	0,53621	0,53680	0,52994	0,52723
Sp. bei 100 S.E.	1,05500	1,05043	1,05988	1,05446
Korr. Sp. } bei 100 S.E. }	1,0904	1,0978	1,0744	1,0662
Polarisation	0,0029	0,0068	0,0294	0,0379
Mittel:	0,0099 Volt		0,0337 Volt	

Wir erhalten also hieraus bei ebenfalls 100 S.E. äußerem Widerstand als Polarisation der großen Elemente 0,0099 Volt, als die der kleinen 0,0337. Wenn diese Zahlen auch nicht allzu genau sind, so geht aus ihnen doch hervor, daß bei verdünnten Lösungen die Verhältnisse ganz anders liegen. Es zeigt sich offenbar, daß die Polarisation abhängig von der Stromdichte ist, denn die beiden Zahlen verhalten sich annähernd umgekehrt wie die Oberfläche der Kupferbleche.

Ich will an dieser Stelle noch betonen, daß es nur auf die Größe des Kupfers, nicht des Zinks ankommt. Zink in Zinkvitriol bildet bekanntlich¹⁾ eine nur schwach polarisierbare Elektrode, denn von absolut unpolarisierbaren Elektroden kann man jedenfalls nicht sprechen. Ich habe deswegen nebenher einige Versuche angestellt. Eine Beobachtungsreihe will ich mitteilen.

1) E. du Bois-Reymond, Ber. d. Berl. Akad. 1859. p. 443; Patry, Arch. de Genève 33. p. 199. 1868; Pogg. Ann. 136. p. 495. 1869; A. Oberbeck, Pogg. Ann. 154. p. 445. 1875.

Zeit	Spannung	Äußerer Widerstand
0 ^h 0 ^m	1,0805	200 SE.
10	8065	

Zink wurde gereinigt

14	1,0810 _s
24	808
34	808 _s
50	807

Zink frisch amalgamiert. Während dieser Zeit war das Zink durch ein zweites Zinkkreuz ersetzt.

1 ^h 8 ^m	1,0807
20	806

Ein neues frisch amalgamiertes Zinkkreuz eingesetzt.

1 ^h 24 ^m	1,0811
44	806
56	804 _s
2 5	801 _s

Aus diesem und ähnlichem geht deutlich hervor, daß bei der Annahme, daß die Polarisation nicht plötzlich auftritt und verschwindet, diese am Zink nur wenige Einheiten der vierten Dezimale ausmacht. Am stichhaltigsten ist, meine ich, der Versuch, daß ein Frischamalgamieren des Zinks, wie aus den Zahlen hervorgeht, keinen Einfluß auf die Polarisation hat.

Zum Schluß will ich noch auf einige Versuchsreihen hinweisen, die ich auch in Beispielen mitteile.

So studierte ich den Einfluß vom Umrühren der CuSO_4 -Lösung auf den Spannungsverlauf. Es zeigt sich hier, daß bei konzentrierten Lösungen schon bei offenen Elementen ein Umrühren ein geringes Steigen der Spannung zur Folge hatte, das im Höchsthalle 0,0004 Volt betrug. Diese Steigerung der Spannung nimmt schnell ab. Bei Stromentnahme bleibt alles das gleiche, nur daß der Spannungsanstieg etwas schneller abläuft. Erschütterungen machen sich entsprechend bemerkbar. Einen wesentlichen Einfluß kann man also beidem nicht zuschreiben.

Bei verdünnten Lösungen, ich benutzte hierfür $\frac{1}{10}$ konzentrierte, liegen die Verhältnisse ähnlich, nur daß bei Stromentnahme ein Fallen der Spannung eintritt.

Einfluß des Umrührens der CaSO_4 -Lösung auf die Spannung.

Konzentrierte Lösungen.

I. Offenes Element.				II. Äußerer Widerst. 100 S.E.			
Zeit			Spannung	Zeit			Spannung
0 ^h	0 ^m	0 ^{sec}	El. angesetzt	0 ^h	0 ^m		El. angesetzt
7	8		1,07809	7	16		1,05637
	18		809		26		642
	22	30	umgerührt		36		645
	23	10	835		46		648
	24	0	837		59		655
	25	0	838			umgerührt	
	30	0	835 ₂		8 0		670
	34		833		1		660
	40		829		4		654
	57		824		16		655
8	12		820		36		665
	29		816				
	45		813				

 $\frac{1}{10}$ konzentrierte Lösungen.

I. Offenes Element			II. Äußerer Widerstand 100 S.E.			III. Äußerer Widerstand 100 S.E.					
Zeit		Spannung	Zeit		Spannung	Zeit		Spannung			
0 ^h	0 ^m	0 ^{sec}	El. angesetzt	0 ^h	0 ^m	El. angesetzt	0 ^h	0 ^m	El. angesetzt		
7	13		1,09536	7	15	1,02348	7	16	1,02770		
	32		527		33	343		34	758		
	42		523		44	354		44	766		
	45	30	521		8	5	371		8	10	779
umgerührt				umgerührt				umgerührt			
	46	30	560		6	290		12	683		
	48		578		7	285		13	689		
	50		583		8	291		23	710		
	59		577		23	324		36	714		
5	9		565		35	337		48	726		
	22		552		48	354					
	34		541								
	47		527								

Und nun noch einige Worte über die Theorie dieser Erscheinungen! Am fruchtbarsten dürfte wohl die jetzt fast allgemein angenommene Theorie der Polarisierung sein, die von der Annahme ausgeht, daß eine Polarisierung eines galvanischen Elementes weiter nichts bedeutet, als eine Verarmung der Lösung an Ionen in der Nähe der Elektroden. Daß diese Theorie sich als fruchtbringend erweist, zeigt eine Arbeit von Jaeger¹⁾, die sich speziell mit der Polarisierung von Elementen beschäftigt, deren Lösungen stets konzentriert sind. Abgesehen davon, daß diese Annahme, wie ich bereits an anderer Stelle erwähnte, für uns nicht zutrifft, dürfte die Anwendung der komplizierten Formeln wohl nur für schwache Polarisierungen möglich sein.

Vielleicht erläutern folgende Bemerkungen etwas die beobachteten Erscheinungen.

Da wir ganz allgemein bei offenen Elementen, sowohl mit konzentrierten wie mit verdünnten Lösungen ein Ansteigen der Spannung bei Umrühren wahrgenommen haben, so ist man beinahe zu der Annahme gedrängt, daß auch in jedem offenen Element eine gewisse Polarisierung vorhanden ist, daß also die Umgebung des Kupfers ein Verarmungsbereich an Ionen ist. Ein Umrühren würde also Teile normaler Ionenkonzentration mit diesen vermischen. Da nun bei konzentrierten Lösungen die Dissoziation keine völlige ist, so würde dieses eine spontane Neubildung von Ionen, d. h. ein Ansteigen der Spannung zur Folge haben. Bei vollständig dissoziierten, d. h. verdünnten Lösungen würde genau ebenso ein Fallen der Spannung zu erklären sein. Nach einiger Zeit wird sich natürlich der alte Zustand wieder herstellen. Ein plötzliches Hervorrufen und Unterdrücken der Polarisierung kann vielleicht als gleichbedeutend mit Erschütterungen des Elementes angesehen werden.

Daß bei verdünnten Lösungen die Polarisierung in engem Zusammenhang mit der Stromdichte steht, findet eine bemerkenswerte Analogie in den Polarisationserscheinungen in Vakuumröhren. Das Entsprechende für diese ist von G. C.

1) W. Jaeger, *Ann. d. Phys.* 14. p. 426. 1904.

Schmidt¹⁾ nachgewiesen. Weitere Analogien zwischen Elektrolyten, natürlich kann es sich nur um stark verdünnte Lösungen handeln, und Gasen liegen meines Wissens in der Literatur nicht vor.

Vorstehende Arbeit wurde im mathematisch-physikalischen Laboratorium der Universität Königsberg angefertigt. Ich will auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Dr. Volkmann meinen besten Dank für die liebenswürdige Anteilnahme aussprechen.

Berlin, Dezember 1906.

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 12. p. 622. 1903; 18. p. 869. 1905.

(Eingegangen 23. Dezember 1906.)

7. Volumen und Valenz. Atom und Elektron; von J. Traube.

1. Die Refraktionsstere.

In dem Jahrbuche der Radioaktivität und Elektronik habe ich vor kurzem¹⁾ eine zusammenfassende Darstellung meiner jahrelangen Arbeiten über Atomvolumina veröffentlicht, wesentlich in Hinsicht auf die mannigfachen Berührungspunkte, welche die ältere Volumtheorie und die moderne Elektronentheorie bieten. Es schien mir, daß die auf dem Gebiete der Elektronik tätigen Physiker nicht immer die Ergebnisse der Volumtheorie genügend beachtet haben, so beispielsweise nicht, wenn, wie dieses *mehrfach geschehen ist*, eine Metallplatte etwa mit einem breitmaschigen Netzwerke verglichen wird, denn die Volumtheorie führt zu dem Ergebnisse, daß die Zwischenräume zwischen den Metallatomen (Kovolumina) weitaus kleiner sind, als vielfach angenommen wird. Ich habe die Durchmesser der Kovolumina, welche auch in den modernen Theorien der Stromleitung eine Rolle spielen, für die meisten Elemente in jener Abhandlung berechnet.

Es ist mir nun neuerdings, wie ich glaube, gelungen, eine Brücke zu schlagen²⁾, welche die Volumtheorie und Elektronen-

1) J. Traube, Jahrb. d. Elektronik 3. p. 168. 1907.

2) Es ist gewiß sehr bemerkenswert, daß soeben im Journ. of Chem. Soc. 89. p. 1675. 1906 eine Abhandlung erschienen ist von W. Barlow und W. J. Pope: Development of the atomic theory, which correlates chemical and crystalline structure and leads to a demonstration of the nature of valency, in welcher die Verfasser hauptsächlich von kristallographischen Tatsachen ausgehend zu Auffassungen gelangen, über die Beziehungen von Valenz und Volumen der Atome, welche den hier entwickelten sehr nahe verwandt sind. Die Verfasser gelangen, wie ich, zu dem Fundamentalsatz, daß *zwischen Volumen und Valenz der Atome einfache proportionale Beziehungen bestehen*. Allerdings gehen in Einzelheiten unsere Theorien, wie ich an anderer Stelle zeigen werde, weit auseinander, aber es liegt hier gewiß eine um so bemerkenswertere Duplizität der Ereignisse vor, als die Tatsachen, von denen die englischen

theorie eng verbindet, und indem ich auf die oben zitierte Abhandlung verweise, möchte ich hier nur nochmals erwähnen, daß die folgenden drei Volumbegriffe von mir unterschieden wurden:

1. Das *molekulare Kovolumen*. Es ist der Raum für die fortschreitende Bewegung der Moleküle, der mit *freiem* Äther erfüllte Raum, die Größe $v - b$ in der Zustandsgleichung von van der Waals.

2. Die *Außenräume der Atome*. Es sind die Räume, welche die Atome im Moleküle einnehmen, vermehrt um die Hülle von *gebundenem* Äther, welche die Atome nach Clausius u. a. umgibt. Es ist die Größe b von van der Waals.

3. Die *Innenräume der Atome* (Kernvolumina). Es sind die Räume, welche von der Masse der Atome als solche eingenommen werden.

Außenraum minus Innenraum (das *atomare Kovolumen*) ist nun derjenige Raum, welcher nach den Annahmen der Elektronentheorie mit Elektronen erfüllt sein würde, es ist also der eigentliche *Elektronenraum*.

Während die Größen $v - b$ und b für alle drei Aggregatzustände mit Hilfe von van der Waals' Zustandsgleichung berechenbar sind, ist ein angenähertes Maß der Innenräume nach den Theorien von Clausius-Mossotti-Exner die Molekularrefraktion $\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} \frac{m}{d}$, wenn μ den Brechungsindex im sichtbaren Gebiete des Spektrums bedeutet.

Nach van der Waals Theorie ist die Größe b für Gase etwa 4 mal, für Flüssigkeiten etwa 3,5 mal so groß als das Innenvolumen der Atome; ich habe nun gezeigt, daß b in der Tat

Forscher sowie der Verf. dieser Abhandlung ausgehen, durchaus verschieden sind. Die Prioritätsfrage ist daher ziemlich gegenstandslos; ich möchte indessen darauf hinweisen, daß ich schon in meiner zusammenfassenden Mitteilung über den Raum der Atomie (F. W. Ahrens, Samml. chem. u. techn. Vorträge) im Jahre 1899 auf die engen Beziehungen von Valenz und Volumen hingewiesen habe und daß ich über den Inhalt der vorliegenden Abhandlung bereits im Juli 1906 in der Deutsch. Chem. Gesellschaft einen Vortrag hielt, ohne daß indessen bisher eine schriftliche Veröffentlichung erfolgte.

3,5 bis 4mal so groß ist als die Molekularrefraktion¹⁾ und damit einen weiteren Beweis erbracht, daß man gemäß der Annahmen der Theorien von Clausius-Mossotti-Exner den Lorenz-Lorentz'schen Refraktionswert als annäherndes Maß der Innenräume der Atome²⁾ betrachten darf.

In der folgenden Tabelle sind nun unter Benutzung der Zahlenwerte von Brühl u. a.³⁾ für eine Anzahl fast beliebiger sehr verschiedenartiger kohlenstoffhaltiger Verbindungen, bestehend aus Kohlenstoff, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Bor, Phosphor, Silicium, Fluor und Chlor die Molekularrefractionen M_a für Wasserstofflicht zusammengestellt. Ausgenommen wurden zunächst nur die Verbindungen mit sogenannten *Doppelbindungen* zwischen Kohlenstoff- und andererseits Kohlenstoff- und Stickstoffatomen, sowie die allereinfachsten Verbindungen und Elemente (vgl. weiter unten). In Kolumne 2 findet sich unter n die Anzahl der Valenzen. Es wurde Wasserstoff und Fluor einwertig gesetzt, Sauerstoff zweiwertig, Stickstoff und Phosphor drei- und fünfwertig, Bor dreiwertig, Kohlenstoff und Silicium vierwertig und Chlor entsprechend seiner Maximalvalenz in Sauerstoffverbindungen siebenwertig. In der letzten Kolumne finden sich die Quotienten M_a/n , welche als *Stere* bezeichnet wurden.

	M_a	n	Stere
Pentan C_5H_{12}	25,32	32	0,791
Hexan C_6H_{14}	27,70	38	0,782
Oktan C_8H_{18}	88,95	50	0,779
Hexamethylen C_6H_{12}	27,56	36	0,766
Methylalkohol CH_4O	8,16	10	0,816
Äthylalkohol C_2H_6O	12,71	16	0,794
i-Amylalkohol $C_5H_{12}O$	26,62	34	0,783
Trimethylcarbinol $C_4H_{10}O$	22,09	28	0,789
Propylaldehyd C_3H_6O	15,93	20	0,796

1) Ph. Guye hatte bereits vor mir auf die Proportionalität der Größe b und der Molekularrefraktion hingewiesen, aber den Proportionalitätsfaktor nicht weiter beachtet.

2) Diese Beziehung hat anscheinend nur eine beschränkte Gültigkeit für ein bestimmtes Strahlengebiet. Für die Dielektrizitätskonstante gilt die Beziehung nicht ohne weiteres.

3) J. W. Brühl, Zeitschr. f. physik. Chem. 7. p. 25 u. 140. 1891 u. 16. p. 214 u. 497. 1895, ferner A. Ghira, l. c. 12. p. 765. 1893; F. Zecchini, l. c. 16. p. 243. 1895; G. Abati, l. c. 25. p. 363. 1898.

	M_a	n	Stere
Önanthaldehyd $C_7H_{14}O$	34,20	44	0,778
Aceton C_3H_6O	16,05	20	0,802
Äthyläther $C_4H_{10}O$	22,31	28	0,797
Acetal $C_6H_{14}O_2$	32,88	42	0,783
Ameisensäure CH_2O_2	8,52	10	0,852
Essigsäure $C_2H_4O_2$	12,93	16	0,808
i-Valeriansäure $C_5H_{10}O_2$	26,72	34	0,786
Önanthsäure $C_7H_{14}O_2$	35,85	46	0,780
Äthylacetat $C_4H_8O_2$	22,14	28	0,791
Äthylbutyrat $C_6H_{12}O_2$	31,20	40	0,780
i-Amylisovalerat $C_{10}H_{20}O_2$	49,72	64	0,777
Äthylenalkohol $C_2H_6O_2$	14,33	18	0,796
Glyzerin $C_3H_8O_3$	20,41	26	0,785
Milchsäure $C_3H_6O_3$	19,09	24	0,795
Äthylloxalat $C_6H_{10}O_4$	33,39	42	0,795
Kohlensaures Äthyl $C_2H_5O_3$	28,22	36	0,784
Traubensaurer Diamylester $C_{14}H_{26}O_6$	73,28	94	0,779
Dimethylbernsteinsaurer Diamylester $C_{16}H_{30}O_4$	79,40	102	0,780
Propylamin C_3H_9N	19,31	24	0,804
i-Amylamin $C_5H_{13}N$	28,53	36	0,793
Diisoamylamin $C_{10}H_{23}N$	51,85	66	0,784
Triisobutylamin $C_{18}H_{37}N$	61,07	78	0,783
Acetonitril C_2H_3N	11,05	14	0,790
Milchsäurenitril C_3H_5ON	17,50	22	0,796
Cyannessigsäures Äthyl $C_2H_7O_2N$	26,67	34	0,785
Äthylencyanid $C_4H_5N_2$	20,31	26	0,781
Diisoamylecyanamid $C_{11}H_{23}N_2$	56,34	72	0,782
Piperidin $C_5H_{11}N$	26,52	34	0,780
ν -Äthylendipiperidin $C_{12}H_{24}N_2$	61,05	78	0,783
Nitroäthan $C_2H_5NO_2$	16,89	22	0,844
Nitrooktan $C_8H_{17}NO_2$	44,58	56	0,795
Äthylnitrat ¹⁾ $C_2H_5NO_3$	19,19	24	0,799
i-Amylnitrat $C_5H_{11}NO_3$	33,07	42	0,787
Propylnitrit $C_3H_7NO_2$	22,10	28	0,789
i-Amylnitrit $C_5H_{11}NO_2$	31,44	40	0,786
Chloressigsäures Äthyl $C_2H_5ClO_2$	26,79	34	0,788
Chlorbuttersäures Äthyl $C_4H_9ClO_2$	36,39	46	0,791
Dichlorpropionsäures Äthyl $C_3H_5Cl_2O_2$	36,56	46	0,795
Propionylchlorid C_3H_5ClO	21,18	26	0,815
Propylchlorid C_3H_7Cl	20,75	26	0,798
Äthylenchlorid $C_2H_4Cl_2$	20,92	26	0,805

1) In den vier letzten Stickstoffverbindungen ist der Stickstoff nach allgemeiner Annahme fünfwertig.

	M_a	n	Stere
Äthylidenchlorid $C_2H_4Cl_2$	21,08	26	0,811
Äthyltrichloracetat $C_4H_5Cl_3O_2$	37,08	46	0,806
Chloroform $CHCl_3$	21,31	26	0,819
Chlorkohlenstoff CCl_4	26,40	32	0,825
Chlorbromfluormethan ¹⁾ $CHClBrFl$	19,26	24	0,802
Dibromfluormethan $CHBr_2Fl$	22,13	28	0,790
Fluoressigsaures Methyl $C_2H_5O_2Fl$	17,83	22	0,810
Triäthylphosphit $P(C_2H_5O)_3$	38,12	48	0,794
Triäthylphosphat $PO(C_2H_5O)_3$	41,79	52	0,803
Triisobutylborat $B(OC_4H_9)_3$	66,01	84	0,785
Triisooamylborat $B(OC_5H_{11})_3$	79,50	102	0,788
Teträthylsilikat $Si(OC_2H_5)_4$	51,71	64	0,806
Hexapropyldisilikat $Si_2O(OC_3H_7)_6$	107,02	136	0,787

Die wenigen Werte, welche aus der letzten Kolumne herausgerückt wurden, beziehen sich auf stark assoziierte Verbindungen, d. h. solche Stoffe, welche im flüssigen Zustande, wie allgemein angenommen wird, teilweise aus Doppelmolekülen bestehen. Der etwas größere Wert der Stere ist danach nicht auffallend. Ebenso haben Ringverbindungen wie Hexamethylen etc. etwas zu kleine Steren. Auch sonst zeigen sich gewisse Schwankungen der Sterenwerte (wie beispielsweise die geringe Abnahme in homologen Reihen), welche sich gesetzmäßig feststellen lassen und auf welche hier nicht weiter eingegangen werden soll.²⁾ Aber man darf doch behaupten, daß im allgemeinen die Abweichungen des Quotienten M_a/n von dem aus einem noch wesentlich größeren Zahlenmaterial abgeleiteten mittleren Sterenwerte 0,787 nicht mehr als ± 1 Proz. betragen, und man kann den Satz aussprechen:

In den organischen Verbindungen, bestehend aus Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenstoff, ferner Fluor, Chlor, und teilweise auch Phosphor, Bor und Silicium, stehen die Atomrefraktionen in einfachen multiplen Verhältnissen. Dieselben verhalten sich annähernd wie die bezüglichen Wertigkeiten 1:2:3:4:5:7.

1) Diese und andere Fluorverbindungen vgl. Swarts Bull. Ak. Belg. (3) 34. p. 293. 1897. Die Refraktionswerte beziehen sich auf Natriumlicht. Für Brom wurde der Wert $n = 11$ gesetzt; vgl. weiter unten.

2) Vgl. hierüber meine demnächst in den Ber. d. Dtsch. chem. Ges. erscheinenden Mitteilungen, welche die hier vorliegende Abhandlung in einigen Punkten ergänzen.

Dieser Satz ist nur ein Grenzgesetz. Aber dieser Umstand vermindert doch nicht die Bedeutung des Satzes.

Zunächst zeigt sich, daß Verbindungen von gleicher Valenzzahl auch die gleiche Molekularrefraktion zukommt. Vergleiche beispielsweise die folgende Zusammenstellung:

	<i>M_a</i>
Propylalkohol C_3H_8O	17,42
Propionsäure $C_3H_6O_2$	17,42
Pentan C_5H_{12}	25,32
Isoamylaldehyd $C_5H_{10}O$	25,31
Butylaldehyd C_4H_8O	20,52
Glycerin $C_3H_8O_3$	20,41
Triisobutylamin $C_{12}H_{27}N$	61,07
Äthylendipiperidin $C_{12}H_{24}N_2$	61,05
Capronsäure $C_6H_{12}O_2$	31,22
Isoamylnitrit $C_5H_{11}NO_2$	31,44
Propylchlorid C_3H_7Cl	20,75
Äthylenchlorid $C_2H_4Cl_2$	20,92
Äthylencyanid $C_2H_5N_3$	20,31
Chloressigsaures Äthyl $C_2H_5O_2Cl$	26,79
Cyanessigsaures Äthyl $C_2H_5O_2N$	26,67
Essigsaures Methyl $C_2H_6O_2$	18,03
Fluoressigsaures Methyl $C_2FH_3O_2$	17,83

Cyan und *Chlor* sind hiernach deswegen so nahe miteinander verwandt, weil die Sterenzahl in beiden Fällen = 7 ist. In früheren Abhandlungen¹⁾ habe ich ja zur Genüge darauf hingewiesen, daß die Eigenschaften der Elemente und Verbindungen weit mehr durch die Atomräume als durch die Atomgewichte bedingt sind. Übrigens ist die Refraktionsstere des Chlors ein wenig größer als 7, wie dies namentlich die Verbindungen $CHCl_3$ und CCl_4 in der Tabelle p. 523 erkennen lassen.

Die moderne Physik nimmt an, daß an jeder Valenzstelle ein Elektron oder aber eine gewisse Summe von Elektronen wirksam ist. Die letztere Anschauung ist vorzuziehen, und ich möchte vorschlagen, jene Elektronensumme mit dem Namen *Valon* zu bezeichnen, wobei es für die folgenden Ausführungen gleichgültig ist, ob ein Valon größer oder gleich einem Elektron ist.

Denken wir nunmehr an die Bedeutung der Molekularrefraktion, so ergibt sich der Satz:

In den organischen Verbindungen, bestehend aus den Elementen C, H, O, N, Fl, Cl, sowie auch teilweise B, P und Si,

1) Vgl. insbesondere Zeitschr. f. anorg. Chem. 40. p. 372. 1904.

stehen die Innenräume der Atome in einfachen multiplen Verhältnissen. Ihre Größe ist proportional der Anzahl Valonen, welche die Atome umgeben.

Macht man mit J. J. Thomson die Annahme, daß die Atome selbst aus Elektronen oder Valonen aufgebaut sind, so folgt der Satz:

In den organischen Verbindungen, bestehend aus C, H, O, N, Fl, Cl, B, P und Si, ist der Raum, welchen ein Valon innerhalb der verschiedenen Atome einnimmt, stets gleich groß.

Es ist dies die bekannte Regel von Avogadro, auf das Innere des Atomes übertragen. Man begreift sogleich, daß es sich hier nur um ein Grenzgesetz handeln kann, denn nur, wenn der Valonendruck gleich groß ist, können die Valonenräume gleich groß sein. Valonendruck und Valonenraum würden durch eine Gleichung verbunden sein, welche mit der von van der Waals verbesserten Gasgleichung identisch wäre.

Indessen diese Betrachtungen sind zwar bestechend, aber doch einstweilen nicht notwendig. Es genügt, wenn der Sitz der Valonen in den Valonenraum (Außenraum minus Innenraum $b - M_a$) verlegt wird. Man erhält dann den Satz:

In den organischen Verbindungen, bestehend aus C, H, O, N, Fl, Cl, B, P und Si, ist der Valonenraum (im Einklang mit van der Waals Theorie) annähernd proportional dem Innenraume der Atome und es stehen die Atom- wie Valonenräume der verschiedenen Elemente in annähernd multiplen, durch die Wertigkeit der Atome gegebenen Verhältnissen. Die Valenz eines Atoms ist hiernach, wie ich schon früher¹⁾ hervorgehoben habe, eine einfache Funktion des Volumens.

Wasserstoff ist einwertig, weil sein Volumen = 1 Stere ist, Kohlenstoff ist vierwertig, weil sein Volumen = 4 Steren ist, und Stickstoff ist drei- bez. fünfwertig, je nach der Größe seines Volumens.

Von hohem Interesse ist das Verhalten des Chlors. Die Wertigkeit dieses Elementes gegenüber elektropositiven Elementen ist gleich 1, die Maximalvalenz gegenüber elektro-negativen Elementen gleich 7. Entsprechend dieser Maximal-

1) J. Traube, Raum der Atome, Ahrens' Samml. chem. u. techn. Vortr. 4. p. 16. 1899.

valenz ist der Raum des Chloratoms in den organischen Verbindungen angenähert gleich 7 Steren.¹⁾

Fassen wir nun die Valonen, wie dies gewöhnlich geschieht, als gesonderte Individuen auf, so wäre nur die Annahme möglich, daß das Chloratom stets von sieben Valonen umgeben sei, deren eines als *Hauptvalon* in den organischen Verbindungen in Wirksamkeit trete, während sechs *Nebenvalonen* ungesättigt sein würden. Diese Annahme wäre jedem Chemiker unsympathisch. Es bleibt nun noch eine zweite Annahme:

Es gibt überhaupt keine individualisierten Valonen am Atome, sondern nur einen gleichmäßig mit Äther erfüllten Valonenraum. Die Individualisierung findet erst statt nach der Lostrennung von Atome.

Chlor ist nicht deshalb (im Maximum) siebenwertig, weil sein Atom von 7 Valonen umgeben ist, sondern weil sein Raum gleich 7 Steren ist. Die Wertigkeit eines Atomes kann nie größer sein als die Sterenzahl des Valonenraumes.

Auf p. 521 dieser Abhandlung wurde erwähnt, daß in der Tabelle p. 521 die allereinfachsten Verbindungen und die entsprechenden Elemente, sowie ferner die Verbindungen mit Äthylen- und Acetylenbindung $C=C$ und $C\equiv C$ (ebenso $C=N$ und $C\equiv N$) fortgelassen wurden.

Die folgende Tabelle enthält zunächst die mit Hilfe des Mittelwertes der Stere gleich 0,787 berechneten *Atomräume in Steren* für die Elemente und einfachsten Verbindungen. Die Molekularrefraktionen beziehen sich meistens auf den Gaszustand.

	M_a	n	$\frac{M_a}{0,787}$
Wasserstoff H_2	2,09	2	2,6
Sauerstoff O_2	4,08	4	5,2
Stickstoff N_2	4,41	6	5,6
Wasser H_2O	3,82	4	4,8
Wasserstoffsuperoxyd flüssig H_2O_2	5,93	6	7,5
Ammoniak NH_3	5,63	6	7,2
Hydrazin flüssig N_2H_4	8,33	10	10,6

1) Barlow und Pope l. c. begehen nach meiner Ansicht den Fehler, den Raum der Halogenatome gleich 1 Stere zu setzen. Dieser Fehler führt zu eigenartigen Folgerungen, welche, wie diese Abhandlung zeigt, nicht notwendig sind. Vgl. übrigens meine etwas ausführlichere Besprechung jener Abhandlung in einem der nächsten Hefte der Ber. d. Dtsch. chem. Ges.

	M_a	n	$\frac{M_a}{0,787}$
Hydroxylamin flüssig NH_2O	7,19	8	9,1
Stickoxyd NO	4,46	5	5,7
Stickoxydul N_2O	7,58	8	9,6
Methan CH_4	6,61	8	8,4
Kohlenoxyd CO	5,03	6	6,4
Kohlensäure CO_2	6,71	8	8,5
Chlor Cl_2	11,54	14	14,6
Cyan C_2N_2	11,98	14	15,2
Chlorwasserstoff HCl	6,70	8	8,5
Cyanwasserstoff HCN	6,63	8	8,4

Man erkennt, daß mit Ausnahme des Stickstoffs die inneren Atomräume größer sind als die Zahl der Valenzen. Der Grund dieses Verhaltens wird sich weiter unten ergeben. Bemerkenswert ist das Verhalten des Kohlenoxyds. Obwohl der Kohlenstoff hier zweiwertig ist, scheint es doch, daß man wie beim Chlor die Maximalvalenz einsetzen muß.

Die folgende Tabelle enthält eine Anzahl Verbindungen mit Bindungen¹⁾ $\text{C}=\text{C}$ und $\text{C}\equiv\text{C}$. Unter z findet sich die Zahl jener Bindungen.

Verbindungen mit $\text{C}=\text{C}$ -Bindungen	z	M_a	n	$\frac{M_a}{0,787}$	$\frac{M_a}{0,787} - n$
Amylen C_5H_{10}	1	24,64	30	31,3	1,3
Oktylen C_8H_{16}	1	38,61	48	49,0	1,0
Äthylalkohol $\text{C}_2\text{H}_5\text{O}$	1	16,85	20	21,4	1,4
Äthylerytanat $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_4$	1	31,49	38	40,0	2,0
Valerylen C_6H_8	2	24,16	28	30,7	2,7
Pyrrol $\text{C}_4\text{H}_5\text{N}$	2	20,75	24	26,4	2,4
Benzol C_6H_6	3	25,93	30	33,0	3,0
m-Xylol C_8H_{10}	3	35,73	42	45,4	3,4
Phenol $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}$	3	27,75	32	35,3	3,3
Anilin $\text{C}_6\text{H}_7\text{N}$	3	30,27	34	38,5	4,5
Methylbenzoat $\text{C}_8\text{H}_8\text{O}_2$	3	37,55	44	47,7	3,7
Styrol C_8H_8	4	35,98	40	45,7	5,7
Zimtsaures Äthyl $\text{C}_{11}\text{H}_{12}\text{O}_2$	4	53,62	60	68,1	8,1
Chinolin $\text{C}_9\text{H}_7\text{N}$	5	41,38	46	52,6	6,6
Naphtalin C_{10}H_8	5	43,93	48	55,8	7,8
Methyldiphenylamin $\text{C}_{18}\text{H}_{15}\text{N}$	6	60,62	68	77,0	9,0

1) Ganz analog wie die obigen Verbindungen verhalten sich die Verbindungen mit der Bindung $\text{C}=\text{N}$ sowie $\text{N}\equiv\text{N}$.

Verbindungen mit C=C-Bindungen	x	M_a	n	$\frac{M_a}{0,787}$	$\frac{M_a}{0,787} - n$
Heptiden C_7H_{12}	1	32,46	40	41,2	1,2
Propargylalkohol C_3H_4O	1	14,83	18	18,9	0,9
Propargylacetat	1	24,57	30	31,2	1,2

Man erkennt, daß die Innenräume der Atome in Steren berechnet $M_a/0,787$ sämtlich größer sind als die Zahl der Valenzen, selbst wenn, wie dies bei der Berechnung von n geschehen ist, in diesen Verbindungen der Kohlenstoff vierwertig angenommen wurde. Die Differenz $M_a/0,787 - n$ wächst offenbar mit der Zahl der Äthylen- und Acetylenbindungen. Wird der Kohlenstoff dreiwertig angenommen, so wird jene Differenz noch größer. So auffallend das Verhalten dieser Verbindungen nun auch erscheint, so wird dasselbe im zweiten Teile dieser Arbeit eine einfache Deutung finden.

Wir sahen, daß die Elemente C, H, O, N, Fl, Cl, B, P und Si sich in organischen Verbindungen dem von uns aufgestellten Gesetze fügten, anders scheint dieses nun für die Elemente Br, J, S, Se und die Metalle in den organischen Verbindungen der Fall zu sein.

In der folgenden Tabelle ¹⁾ sind einige derartige Verbindungen zusammengestellt. Unter x findet sich das durch einen Vergleich der Werte $M_a/0,787$ und der Valenzzahl n der übrigen Elemente berechnete Innenvolumen des betreffenden Elementes in Steren.

	M_a	x
Äthylbromid C_2H_5Br	18,98	11,1
i-Amylbromid $C_5H_{11}Br$	33,01	11,0
Äthylenbromid $C_2H_4Br_2$	26,83	$2 \times 11,05$
Acetylidentetrabromid $C_2H_2Br_4$	42,41	$4 \times 11,0$
Bromoform $CHBr_3$	30,02	$3 \times 11,0$
Tetrabromfluoräthan $CBr_3-CHBrFl$	42,11	$4 \times 10,9$
Dibromfluormethan $CHBr_2Fl$	22,13	$2 \times 11,05$
Tribromdifluoräthan $CHBrFl-CBr_2Fl$	34,56	$3 \times 11,0$

1) Die Refraktionswerte sind entnommen: J. W. Brühl, l. c.; F. Swarts, Bull. Ak. Belg. (3) 34. p. 293. 1897; R. Nasini, Ber. d. D. chem. Ges. 15. p. 2889. 1882; ferner A. Ghira, Gazz. chim. Ital. 24. p. 324 und 309. 1894.

	M_a	x
Methyljodid CH_3J	19,25	17,4
Propyljodid $\text{C}_3\text{H}_7\text{J}$	28,73	17,5
Butyljodid $\text{C}_4\text{H}_9\text{J}$	33,25	17,3
Dimethylsulfid $\text{C}_2\text{H}_6\text{S}$	19,00	10,1
Diäthylsulfid $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{S}$	28,32	10,0
Diäthyldisulfid $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{S}_2$	36,33	$2 \times 10,1$
Isoamylmercaptan $\text{C}_5\text{H}_{12}\text{S}$	32,72	9,6
Methylsulfoeyanat $\text{C}_2\text{H}_5\text{NS}$	18,87	10,0
Methylisosulfoeyanat $\text{C}_3\text{H}_7\text{NS}$	20,27	9,8
Diäthylselenid $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{Se}$	31,24	13,7
Diäthyldiselenid $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{Se}_2$	43,78	$2 \times 14,8$
Zinkdimethyl $\text{Zn}(\text{CH}_3)_2$	19,09	10,2
Zinkdiäthyl $\text{Zn}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$	28,74	10,5
Quecksilberdimethyl $\text{Hg}(\text{CH}_3)_2$	23,96	16,4
Quecksilberdiäthyl $\text{Hg}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$	33,13	16,1
Zinntetraäthyl $\text{Sn}(\text{C}_2\text{H}_5)_4$	54,76	17,6
Bleitetraäthyl $\text{Pb}(\text{C}_2\text{H}_5)_4$	58,51	22,4
Antimontriphenyl ¹⁾ $\text{Sb}(\text{C}_6\text{H}_5)_3$	93,96	23,4
Antimondichlortriphenyl $\text{Sb}(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{Cl}_2$	103,40	21,4
Eisencarbonyl $\text{Fe}(\text{CO})_5$	40,65	21,6
Nickelcarbonyl $\text{Ni}(\text{CO})_4$	34,95	20,4

Während bei den bisher besprochenen Elementen Innenvolumen und Valenzzahl in einfacher Beziehung stehen, zeigen die Werte x , daß die Innenvolumina der Elemente Br, J, S, Se, Sb sowie der Metalle in den hier betrachteten organischen Verbindungen wesentlich größer sind, als selbst die Maximalvalenzen, zu deren Annahme, das chemische Verhalten dieser Elemente berechtigt. Brom- und Jodverbindungen, in denen das Brom und Jod 11 bez. 17 wertig auftritt, sind nie beobachtet worden. Indessen die verschiedene Fähigkeit der Halogene zur Bildung von Komplexverbindungen und manche andere Tatsache dürfte mit der verschiedenen Größe der Innenräume im Zusammenhange stehen. Wir werden übrigens im zweiten Teile unserer Arbeit erkennen, daß auch das Verhalten dieser Elemente mit dem Valenz- und Volumgesetz keineswegs in Widerspruch steht.

1) Für jede Doppelbindung wurde 1 Stere hinzugefügt.

2. Die Volumstere.

In dem ersten Teile dieser Mitteilung haben wir uns mit den Innenräumen der Atome beschäftigt. Außer diesen Räumen setzt sich indessen der Gesamtraum des Moleküls noch zusammen aus den eigentlichen Elektronenräumen (Außenraum minus Innenraum) und dem molekularen Kovolumen¹⁾ $v - b$. Von diesen Räumen interessiert uns zunächst der Elektronenraum; derselbe ist gleich $b - M_a$, d. h. gleich der Differenz von van der Waals Größe b und der Molekularrefraktion. Wäre die Proportionalität von b und M_a eine vollständige, so würde für den Elektronenraum das Sterengesetz genau ebenso gelten wie für den Innenraum. Indessen jene Proportionalität ist nicht allgemein vorhanden, und gerade dieser Umstand führt zu beachtenswerten Ergebnissen, wenn wir die gefundenen Beziehungen von Valenz und Volumen auf diese Räume $b - M_a$ sowie alsdann auch auf die Kovolumina $v - b$ ausdehnen. Da namentlich das Kovolumen mit der Temperatur stark veränderlich ist, so empfiehlt es sich, die Betrachtungen auf verschiedene charakteristische Temperaturen auszudehnen.

a) Das Volumen beim absoluten Nullpunkt.

Berthelot²⁾ und namentlich Guldberg³⁾ haben für eine große Reihe von Stoffen die Molekularvolumina für den absoluten Nullpunkt berechnet. Nach der allgemeinen Zustandsgleichung ist das Kovolumen für den Anfangspunkt der Temperaturzählung gleich Null, so daß $v = b$ wird.

In der folgenden Tabelle sind nun zunächst für eine Anzahl C, H, O und N-haltigen Stoffe, deren Moleküle einfach d. h. *nicht assoziiert* sind⁴⁾, die Räume b_0 , M_a und $b_0 - M_a$ zusammengestellt. n ist die Valenzzahl, und die letzten beiden

1) In der Abhandlung von Barlow und Pope werden die Moleküle als „close-packed“ Atomaggregate angesehen, und die „interstices“ d. h. die Kovolumina vernachlässigt. So gelangen die Verfasser zu dem nur in grober Annäherung zulässigen Schlusse, daß das Molekularvolumen gleich dem „valency volume“, d. h. gleich der Zahl der Valenzen ist.

2) M. Berthelot, Compt. rend. 130. p. 713. 1900; Refer. Zeitschr. f. physik. Chem. 35. p. 104. 1900.

3) C. M. Guldberg, Zeitschr. f. physik. Chem. 32. p. 116. 1900.

4) Vgl. J. Traube, Ber. d. Deutsch. chem. Ges. 30. p. 273. 1897.

Kolumnen enthalten den Wert der Stere für den Innenraum sowie den Elektronenraum:

	b_0	M_a	$b_0 - M_a$	n	$\frac{M_a}{n}$	$\frac{b_0 - M_a}{n}$
Pentan C_5H_{12}	80,2	25,82	54,88	32	0,791	1,72
Hexan C_6H_{14}	94,8	29,70	65,10	38	0,782	1,71
Oktan C_8H_{18}	123,5	38,95	84,55	50	0,779	1,67
Diallyl C_6H_{10}	86,8	28,77	58,03	34	0,846	1,71
Äthyläther $C_4H_{10}O$	72,2	22,81	49,89	28	0,797	1,78
Propylacetat $C_5H_{10}O_2$. . .	86,2	26,83	59,37	34	0,789	1,75
Methylisovalerat $C_6H_{12}O_2$.	99,4	31,46	67,94	40	0,789	1,69
Propylamin C_3H_9N	59,6	19,81	40,29	24	0,804	1,67
Diäthylamin $C_4H_{11}N$	74,0	24,07	49,93	30	0,802	1,66
Triäthylamin $C_6H_{15}N$	102,8	33,50	69,30	42	0,799	1,65

Die Zahlenwerte der letzten Kolumne zeigen, daß die Konstanz der Stere der Elektronenräume nicht so groß ist, wie diejenige der Innenräume, sofern man den Wert für Diallyl, einer Verbindung mit zwei Doppelbindungen (vgl. p. 527), ausschaltet. Der Mittelwert der Stere $b_0 - M_a/n$ ist 1,70. Bemerkenswert ist es, daß bei den Aminen die Refraktionsstere den Mittelwert 0,787 übersteigt, während die Volumstere kleiner ist als der Mittelwert. Ebenso ist bei den Verbindungen Diallyl und Propylacetat mit gleicher Valenzenzahl beim Diallyl die Refraktionsstere am größten, und die Volumstere am kleinsten.

Es wird sich sogleich weiter zeigen, daß im allgemeinen derselbe Einfluß, welcher die Volumstere verkleinert, eine Vergrößerung der Refraktionsstere herbeiführt.

Die folgende Tabelle enthält einige Werte für Halogene und deren Verbindungen.

	b_0	M_a	$b_0 - M_a$	x_1	x_2
Chlor Cl_2	33,7	11,54	22,16	$2 \times 7,3$	$2 \times 6,5$
Brom Br_2	39,1	16,91	22,19	$2 \times 10,7$	$2 \times 6,5$
Äthylidenchlorid $C_2H_4Cl_2$. .	62,0	21,08	40,92	$2 \times 7,4$	$2 \times 6,0$
Äthylidenbromid $C_2H_4Br_2$. .	68,0	27,31	40,69	$2 \times 11,3$	$2 \times 6,0$
Allylchlorid C_3H_5Cl	59,6	20,32	39,28	$1 \times 7,8$	$1 \times 6,1$
Chloroform $CHCl_3$	59,4	21,34	38,06	$3 \times 7,4$	$3 \times 5,8$
Chloral C_2HCl_3O	75,9	26,37	49,53	$3 \times 7,5$	$3 \times 6,0$
Chlorkohlenstoff CCl_4	72,2	26,44	45,76	$4 \times 7,4$	$4 \times 5,75$
Äthylbromid C_2H_5Br	55,1	18,98	36,12	$1 \times 11,1$	$1 \times 8,2$
Äthyljodid C_2H_5J	60,5	24,09	36,41	$1 \times 17,6$	$1 \times 8,4$
Propyljodid C_3H_7J	75,0	28,73	46,27	$1 \times 17,5$	$1 \times 8,2$

Die Werte x_1 und x_2 sind die in Steren berechneten Volumina der Elemente Cl, Br und J. x_1 ist das mit Hilfe des mittleren Sterenwertes 0,787 berechnete *Innenvolumen* jener Elemente, x_2 ist das mittels des mittleren Sterenwertes 1,70 berechnete *Volumen des Elektronenraumes* derselben.

Während in entsprechenden Verbindungen von Chlor, Brom und Jod die Innenräume sich etwa verhalten wie 7 : 11 : 17, sind die Elektronenräume derselben in entsprechenden Verbindungen gleich groß und von der Maximalvalenz nur wenig verschieden.

Im einzelnen sei bemerkt, daß für Chlor der Innenraum etwas größer ist als die Maximalvalenz 7, der Elektronenraum dagegen um etwa eine Einheit kleiner. Brom und namentlich Jod haben einen wesentlich größeren Innenraum als 7, dahingegen schwanken die Werte für die Elektronenräume je nach der Natur der Verbindungen zwischen 6 und 8,6. Der etwas größere Elektronenraum des Jods steht ganz mit dem etwas abseits vom Chlor und Brom befindlichen Verhalten dieses Elementes im Einklang. Möglicherweise ist auch die Maximalvalenz des Jods größer als 7. Wie die Halogene so verhalten sich auch die Elemente Schwefel, Phosphor, Arsen, Silicium, Zinn. Während in Verbindungen wie CS_2 , $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$, PCl_3 , AsCl_3 etc. die Innenräume größer sind, als die Maximalvalenz, sind die Elektronenräume kleiner. Es muß also auch hier ein kausaler Zusammenhang bestehen zwischen der Verkleinerung des Elektronenraumes und Vergrößerung des Innenraumes der Atome. Am auffallendsten zeigt sich diese reziproke Beziehung der beiden Räume bei den *Ringverbindungen*.

	b_0	M_a	$b_0 - M_a$	x_1	x_2
Benzol C_6H_6	66,4	25,93	40,47	+ 3,0	- 6,2
Äthylbenzol C_8H_{10}	96,0	35,44	60,56	+ 3,0	- 6,4
Phenol $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}$	70,3	27,75	42,55	+ 3,3	- 7,0
Anilin $\text{C}_6\text{H}_7\text{N}$	72,6	30,27	42,33	+ 4,5	- 9,1
Nitrobenzol $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$. .	82,0	32,35	49,65	+ 5,1	- 6,8
Chlorbenzol ¹⁾ $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$. .	78,5	30,90	47,60	+ 3,2	- 7,0
Brombenzol ¹⁾ $\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$. .	82,2	33,76	48,44	+ 2,9	- 6,5
Naphtalin C_{10}H_8	102,3	43,9	58,4	+ 2 $\times$ 3,9	- 2 $\times$ 6,8

1) Die Refraktionsstere für Cl und Br wurde gleich 7 bez. 11, die Stere für den Elektronenraum für beide Elemente gleich 6,0 gesetzt.

In der vorstehenden Tabelle ist für einige derartige Verbindungen unter x_1 das *Inkrement* für den Innenraum und unter x_2 das *Dekrement* für den Elektronenraum enthalten. Die Werte wurden auch hier mit Hilfe der mittleren Sterenwerte 0,787 bez. 1,70 berechnet.

Während somit der Innenraum (wenn man vom Anilin und dem — assoziierten — Nitrobenzol absieht) im allgemeinen um etwa 3 Steren größer ist, als der nach dem Sterengesetz berechnete Raum, ist der Elektronenraum für jeden Ring (vgl. Naphtalin) um etwa 6 Steren kleiner. Der Expansion des Innenraumes um 3 Steren entspricht somit eine Kontraktion des Elektronenraumes um 6 Steren. Das Sterengesetz wäre somit in bezug auf den Elektronenraum erfüllt, wenn man im Benzolring den Kohlenstoff als dreiwertig annehme. Indessen steht dieser einfachen Deutung der Umstand entgegen, daß das Hexamethylen (vgl. weiter unten) sich ebenso verhält, so daß der Ringschluß und nicht die Doppelbindungen als die Ursache der Kontraktion des Elektronenraumes anzusehen sind. Bemerkenswert ist noch, daß der größeren Kontraktion des Elektronenraumes beim Anilin auch eine größere Expansion der Innenräume entspricht. An der Reziprozität dieser Raumbeziehungen ist demnach nicht zu zweifeln. Worauf beruht dieselbe nun? Mir scheint, die Ursache ist leicht zu finden.

Dem äußeren Affinitätsdrucke, welcher die Atome verbindet, und eine Kontraktion der Elektronenräume herbeiführt, wirkt ein vom Innern der Atome nach außen wirkender Atomdruck entgegen, welcher eine Ausdehnung des Atominnern zur Folge hat.

Es ist also ein ganz bekanntes Prinzip, welches auf diese verschiedenartigen Beziehungen von Innenraum und Elektronenraum und, wie wir weiter unten sehen werden, auch vom Kovolumen in einfachster Weise Anwendung findet.

In der folgenden Tabelle sind nun einige — assoziierte — Stoffe zusammengestellt, sowie die Elemente N, O und die einfachen Verbindungen CO_2 und NH_3 . Unter n_i und n_e finden sich die die Werte $\frac{M_a}{0,787}$ und $\frac{b_0 - M_a}{1,70}$, während n die Zahl der Valenzen angibt, wenn Sauerstoff in den betreffenden Verbindungen zweiwertig angenommen wurde. A ist der nur in

sehr roher Weise berechenbare¹⁾ Assoziationsfaktor der Verbindung.

	b_0	M_a	$b_0 - M_a$	n	n_i	n_e	A
Methylalkohol CH_3O . . .	29,8	8,16	21,64	10	10,4	12,7	2,5
Äthylalkohol $\text{C}_2\text{H}_5\text{O}$. . .	44,9	12,71	32,19	16	16,2	18,9	1,8
Isoamylalkohol $\text{C}_5\text{H}_{11}\text{O}$. . .	85,6	26,62	58,98	34	33,8	34,7	1,5
Ameisensäure CH_2O_2 . . .	28,9	8,52	20,38	10	10,8	12,0	2,0
Essigsäure $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$. . .	43,8	12,93	30,87	16	16,4	18,2	1,6
Isovaleriansäure $\text{C}_5\text{H}_{10}\text{O}_2$. . .	85,8	26,72	59,08	34	34,0	34,7	1,2
Aceton $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$	53,2	16,05	37,15	20	20,4	21,9	1,4
Äthylformiat $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$. . .	58,4	17,93	40,47	22	22,7	23,8	1,3
Sauerstoff O_2	12,8	4,08	8,72	4	5,2	5,1	—
Stickstoff N_2	25,0	4,41	20,59	6	5,6	12,1	—
Kohlensäure CO_2 . . .	25,5	6,71	18,79	8	8,5	11,1	—
Ammoniak NH_3	18,0	5,63	12,37	6	7,2	7,3	—

Die assoziierten Verbindungen haben ein größeres physikalisches Interesse, namentlich deshalb, weil insbesondere diese Stoffe infolge von Absorption elektrischer Energie eine anormal vergrößerte Dielektrizitätskonstante aufweisen.

Wie es kommt, daß gerade derartige Stoffe mit Hydroxylgruppen etc. befähigt sind, elektrische Wellen von großer Wellenlänge zu absorbieren, ist noch unbekannt. Unter diesen Umständen verdienen die abweichenden Volumverhältnisse dieser Verbindungen Beachtung, welchen auch ein hohes chemisches Interesse zukommt, insofern dieselben eine Entscheidung der Frage zulassen, ob assoziierte Stoffe zu den atomistischen Verbindungen gehören, oder ob der Zusammenhang der Moleküle nicht durch Elektronen vermittelt wird.

Wie die Werte n_e im Vergleich mit n zeigen, sind die Elektronenräume stark vergrößert. Die Differenz $n_e - n$ geht den Assoziationsfaktoren einigermaßen parallel, und wenn man nur diese Werte beachtet, so wäre man geneigt, den Sauerstoff in diese Verbindungen vierwertig zu setzen und die Verbindungen als Verbindungen im Sinne der Valenztheorie aufzufassen. Indessen diese Auffassung halte ich für falsch, denn die Refraktionsstere (vgl. die Werte n_i und in Tabelle p. 522 Glycerin, Milchsäure etc.) wird bei diesen Verbindungen entweder gar nicht oder meist sehr wenig vergrößert. Wenn man

¹⁾ J. Traube, Ber. d. Dtsch. chem. Ges. 30. p. 273. 1897; P. Walden, Ztschr. f. physik. Chem. 46. p. 103. 1903; 54. p. 129. 1906; 55. p. 207. 1906.

beispielsweise beim Methylalkohol unter Berücksichtigung des Assoziationsfaktors den Sauerstoff vierwertig annehmen würde, so erhielte man an Stelle des mittleren Sterenwertes 0,787 den ganz anormalen Wert ca. 0,69. Weiter unten komme ich auf die assoziierten Verbindungen zurück.

Die Elemente O_2 , N_2 sowie die Verbindung CO_2 und NH_3 verhalten sich wie die assoziierten Stoffe, ob wir indessen be-
rechtigt sind, hier auch dieselbe Ursache für dieses Verhalten an-
zunehmen, läßt sich einstweilen nicht mit Sicherheit entscheiden.

b) Das Volumen bei der kritischen Temperatur.

Der Quotient aus den kritischen Volumen v_k und dem Volumen v_0 beim absoluten Nullpunkt ist bekanntlich sehr angenähert konstant.¹⁾ Auch assoziierte Verbindungen machen keine Ausnahmen. Unter diesen Umständen sind die Ergebnisse bei der kritischen Temperatur dieselben wie beim absoluten Nullpunkte. Wird nach van der Waals $b_k = \frac{1}{3} v_k$ gesetzt, so berechnet man²⁾ für die folgenden nicht assoziierten Ver-
bindungen die unter $b_k - M_a/n$ enthaltenen Steren für den Elektronenraum.

	b_k	M_a	$b_k - M_a$	n	$\frac{b_k - M_a}{n}$	
n-Pentan C_5H_{12}	103,3	25,32	77,98	32	2,44	
i-Pentan C_5H_{12}	102,2	25,32	76,88	32	2,40	
Hexan C_6H_{14}	122,1	29,70	92,40	38	2,43	
Oktan C_8H_{18}	163,0	38,95	124,05	50	2,48	
Hexamethylen C_6H_{12}	102,2	27,56	74,64	(30)	2,48	
Benzol C_6H_6	85,4	25,93	59,47	(24)	2,48	
Chlorbenzol C_6H_5Cl	102,1	30,90	71,20	(29)	2,45	Cl = 6,0
Brombenzol C_6H_5Br	107,5	33,76	73,40	(30)	2,45	Br = 7,0
Äthyläther $C_4H_{10}O$	93,6	22,31	71,29	28	2,54	
Methylpropionat $C_4H_8O_2$	94,0	22,41	71,59	28	2,56	
Propylalkohol C_3H_8O	72,5	17,42	55,08	22	2,50	

Der Elektronenraum für 1 Chloratom ist, wie Chlorbenzol und weitere Verbindungen zeigen, bei der kritischen Tem-
peratur gleich 5,5—6 Steren wie beim absoluten Nullpunkte, für
Brom ist der Raum gleich 7 Steren, und für Fluor gleich 1 Stere.

1) Vgl. J. Traube, Ann. d. Phys. 5. p. 552. 1901.

2) Die Zahlenwerte b_k sind meiner Arbeit Ann. d. Phys. 5. p. 552. 1901 entlehnt.

Besonders bemerkenswert ist das analoge Verhalten von Hexamethylen und Benzol. Die Verkleinerung des Elektronenraumes beim Benzol ist danach, wie ich bereits in meinen früheren Abhandlungen annahm, auf die Ringbildung nicht aber auf die sogenannte Doppelbindung zurückzuführen. Diese Verkleinerung entspricht sowohl bei Hexamethylen wie Benzol etwa 6 Steren. Im charakteristischen Gegensatz zu dem Verhalten beider Verbindungen in bezug auf den Elektronenraum, steht ihr Verhalten in bezug auf den Innenraum, oder die Refraktionsstere. Für Hexamethylen war (für $n = 36$) $M_a/n = 0,766$, dagegen für Benzol (für $n = 30$) $M_a/n = 0,864$. Man ersieht hieraus, welche Wirkung die Addition der sechs Wasserstoffatome an das Benzolmolekül zur Folge hat.

Die assoziierten Verbindungen verhalten sich wie beim absoluten Nullpunkte. Wird Sauerstoff zweiwertig angenommen, so berechnet man $b_k - M_a/n$ für Methylalkohol gleich 3,11, Äthylalkohol gleich 2,68, Äthylformiat gleich 2,66 und Essigsäure gleich 2,74.

Bei der kritischen Temperatur ist $v_k p_k = R T_k$. An Stelle von v_k kann man daher auch den kritischen Koeffizienten T_k/p_k setzen. Da diese Koeffizienten für eine weitaus größere Anzahl von Stoffen bekannt sind, als die kritischen Volumina, so habe ich mit Hilfe der in Landolt-Börnsteins Tabellen angegebenen Werte die Quotienten $T_k/p_k : n$ für eine große Anzahl von Stoffen berechnet. Ein kleiner Auszug dieser Berechnungen findet sich in folgender Tabelle:

	$\frac{T_k}{p_k}$	n	$\frac{T_k}{p_k} : n$
Methan CH_4	3,55	8	0,444
Äthylen C_2H_4	5,50	12	0,458
Cyan C_2N_2	6,44	14	0,460
Benzol C_6H_6	11,41	24	0,475
Äthyläther $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$	12,63	28	0,451
Äthylacetat $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$	13,08	28	0,467
Isoamylen C_5H_{10}	13,70	30	0,457
Hexan C_6H_{12}	13,90	30	0,463
Äthylpropionat $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_2$	16,20	34	0,476
Äthylbutyrat $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_2$	18,92	40	0,473
Cymol C_{10}H_8	22,78	48	0,474
Dekan $\text{C}_{10}\text{H}_{22}$	28,33	62	0,457

	$\frac{T_k}{p_k}$	n	$\frac{T_k}{p_k} : n$
Wasserstoff H_2	1,55	2	0,775
Wasser H_2O	3,18	4	0,795
Sauerstoff O_2	3,06	4	0,765
Stickstoff N_2	3,74	6	0,623
Kohlenoxyd CO	3,72	6	0,620
Ammoniak NH_3	3,54	6	0,590
Kohlensäure CO_2	4,08	8	0,510
Stickoxydul N_2O	4,12	8	0,515
Äthylalkohol C_2H_6O	8,10	16	0,506
Methylformiat $C_2H_4O_2$	10,41	16	0,650
Essigsäure $C_2H_4O_2$	8,60	16	0,538

Der erste Teil der Tabelle enthält nicht assoziierte Stoffe. Der Quotient $T_k/p_k : n$ ist annähernd konstant. Für jeden Benzolring (und ebenso Hexamethylenring) mußte indessen (vgl. p. 532) n um 6 Valenzen verkleinert werden.

Der zweite Teil der Tabelle enthält assoziierte Verbindungen und einige Elemente sowie sehr einfache zusammengesetzte Stoffe. Hier ist der Wert $T_k/p_k : n$ größer als der normale Wert. Ob wir aber deshalb die Zahl der Valenzen größer annehmen dürfen, erscheint mir zweifelhaft.

Wenn wir mit Hilfe des mittleren normalen Wertes für $T_k/p_k : n = 0,465$ aus nicht assoziierten Verbindungen der Halogene, des Schwefels, Selen etc. die Volumina dieser Elemente berechnen, so erhalten wir $Fl = 1$, $Cl = 5,5$, $Br = 7$, $S = 6$, $Se = 7$, ferner Sn bez. Ge (aus den Chloriden) = 12 bez. 8, $Kr = 8$, $X = 10$ etc. Diese Werte sind somit, soweit als vergleichbar, annähernd dieselben wie beim absoluten Nullpunkte.

Bemerkenswert ist in dem zweiten Teile obiger Tabelle, daß bei gleicher Zahl der Valenzen beispielsweise für H_2O und O_2 , ferner N_2 , CO , NH_3 sowie CO_2 und N_2O die Quotienten $T_k/p_k : n$ nur wenig verschieden sind.

c) Das Volumen beim normalen Siedepunkte.

In der folgenden Tabelle sind für eine Anzahl von Stoffen¹⁾ die Werte v_T , M_a , b_T , $b_T - M_a$, $v - b$ und n , sowie ferner

1) J. Traube, Ann. d. Phys. 8. p. 300. 1902.

die Quotienten $v - b/n$, M_α/n und $b_T - M_\alpha/n$ zusammen-
gestellt.

	v_T	M_α	b_T	$b_T - M_\alpha$	$v_T - b$	n	$\frac{M_\alpha}{n}$	$\frac{b_T - M_\alpha}{n}$	$\frac{v - b}{n}$
i-Pentan C_5H_{12} . . .	117,9	25,32	87,3	61,98	30,6	32	0,791	1,94	0,96
n-Hexan C_6H_{14} . . .	139,8	29,70	104,1	74,40	35,7	38	0,787	1,96	0,94
n-Oktan C_8H_{18} . . .	186,9	38,95	135,0	96,05	51,9	50	0,779	1,92	1,04
Äthyläther $C_4H_{10}O$. .	106,4	22,31	79,3	56,99	27,1	28	0,796	2,03	0,97
Äthylacetat $C_4H_8O_2$. .	106,0	22,14	78,7	56,56	27,3	28	0,791	2,02	0,97
Benzol C_6H_6	96,2	25,93	72,1	46,17	24,1	(24)	—	1,92	1,00
Methylformiat $C_2H_4O_2$. .	62,7	—	47,6	—	15,1	16	—	—	0,94
Methylalkohol CH_4O . .	42,8	8,16	32,8	24,64	10,0	10	0,816	2,46	1,00
Essigsäure $C_2H_4O_2$. .	63,8	12,93	48,0	35,07	15,8	16	0,808	2,19	0,99
Wasser H_2O	18,9	3,82	15,5	11,68	3,4	4	0,955	2,92	(0,85)
Quecksilber Hg . . .	15,72	—	14,2	—	1,5	2	—	—	(0,75)

Die Tabelle lehrt, daß die Werte n und $v - b$ sehr angenähert gleich groß sind. Bei Ringverbindungen des Sechsrings (vgl. Benzol, ebenso Hexamethylen) müssen wir wie beim absoluten Nullpunkt und der kritischen Temperatur die Zahl der Valonen n um sechs verringern. Bemerkenswert ist es, daß auch für die assoziierten Stoffe (vgl. Methylformiat, Methylalkohol, Essigsäure, Wasser) die Werte $v - b$ nicht größer sind, als die Zahl der Valonen, welche unter der Annahme bestimmt wurden, daß der Sauerstoff zweiwertig ist. Wir werden sehen, daß bei gleicher Temperatur ($0^\circ C.$) gerade diese Verbindungen sich durch ein geringeres Kovolumen auszeichnen. Bekanntlich wird bei diesen Verbindungen der Siedepunkt erhöht, und es scheint allgemein der Satz gültig zu sein, daß eine Flüssigkeit siedet, wenn die Kovolumina sich verhalten, wie die Zahl der Valenzen. Während die Quotienten $v - b/n$ für assoziierte und nicht assoziierte Stoffe gleich groß sind, ist dieses nicht der Fall für die Innenräume der Atome M_α sowie die Elektronenräume $b_T - M_\alpha$. Die Quotienten M_α/n und $b_T - M_\alpha/n$ zeigen, daß hier ebenso wie beim absoluten Nullpunkt und der kritischen Temperatur namentlich für die Elektronenräume jene Quotienten bei den assoziierten Flüssig-

keiten größer sind als bei den normalen Verbindungen. Ich bin aber (vgl. weiter unten) nicht geneigt, hieraus zu schließen, daß wir aus diesem Grunde das Sauerstoffatom in diesen Verbindungen vierwertig annehmen müßten.

Beim normalen Siedepunkt ist¹⁾ (selbst für assoziierte Flüssigkeiten) angenähert $v/v - b = 3,75$. Daraus folgt, daß das Molekularvolumen beim Siedepunkte das 3,75fache Produkt der Valenzzahl ist. Das große hier vorliegende Material²⁾ zeigt, daß dies auch allgemein zutrifft. Bei den Ringverbindungen gilt indessen die Gleichung $v = 3,75 n$ nur, wenn n für jeden Ring um eine bestimmte Größe (vgl. weiter oben) verkleinert wird; dieser Umstand ermöglicht es dem Chemiker, die Zahl der Ringe zu bestimmen, eine Tatsache, welche für die Feststellung der Konstitution von Stoffen nicht ohne Bedeutung ist. Der Satz $v = 3,75 n$ gilt für die Halogenderivate, wenn man (vgl. weiter oben) für Cl den Volumenwert 6, für Br = 7 und für J = 9 setzt. Ebenso erhält man S = 6, P = 7, ebenso As = 7 und Sb = 8 (aus den Trichloriden), während die Tetrachloride von Kohlenstoff, Silicium, Titan, Germanium und Zinn zu den Werten führen C = 4, Si = 8, Ti = 9, Ge = 8 und Sn³⁾ = 11 (12).

Aus van der Waals Zustandsgleichung in Verbindung mit Troutons Regel folgt, daß die molekulare Verdampfungswärme beim Siedepunkt gleich $a/v = \text{konst.}$ ist, wenn a die bekannte Kohäsionsgröße ist. Setzen wir $v = \text{konst. } n$, so ergibt sich, daß die molekulare Verdampfungsarbeit der Größe a direkt, der Zahl der Valonen umgekehrt proportional ist.

d) Das Volumen bei gleicher Temperatur (bei 0° C.).

Die Tabelle p. 540 enthält für eine Anzahl von Verbindungen unter v_0 und v_{273} die Molekularvolumina beim absoluten Nullpunkte bez. bei 0° C., unter b_{273} die von mir⁴⁾

1) Vgl. meinen Grundriß der Physik. Chem. 1905. p. 156.

2) Vgl. Landolt-Graham-Ottos Lehrb. d. Chem. I. 1.

3) Die Werte Ge = 8 und Sn = 12 wurden aus den kritischen Koeffizienten T_k/p_k der Chloride abgeleitet, ebenso folgt aus denselben Se = 7.

4) J. Traube, Ann. d. Phys. 5. p. 552. 1901.

	ν	ν_{vrs}	b_{vrs}	M_a	$(b - M_a)_{\text{vrs}}$	$(\nu - b)_{\text{vrs}}$	$\frac{a}{\nu_{\text{vrs}}^2}$	Atm.	$\frac{b_{\text{vrs}}}{\nu_0}$	$\frac{\nu_{\text{vrs}}}{b_{\text{vrs}}}$	$\frac{\nu}{b_{\text{vrs}}}$
Pentan C_5H_{12}	80,5	112,4	86,9	25,32	61,58	25,5	880	1,08	1,29	1,29	1,35
i-Pentan C_5H_{12}	81,3	112,8	87,5	25,32	62,18	25,3	890	1,08	1,29	—	—
Hexan C_6H_{14}	94,8	127,1	101,1	29,70	71,40	26,0	860	1,07	1,36	1,38	1,38
Okta C_8H_{18}	123,5	158,3	128,1	38,95	89,15	30,2	740	1,04	1,24	1,24	1,45
Hexamethylen C_6H_{14}	—	105,2	84,8	27,56	57,24	20,4	1100	—	1,24	—	—
Benzol C_6H_6	66,4	86,5	70,3	25,93	44,37	16,2	1390	1,06	1,23	1,23	1,37
Fluorbenzol $\text{C}_6\text{H}_5\text{F}$	70,6	91,5	74,1	—	—	17,4	1290	1,05	1,23	—	—
Chlorbenzol $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$	79,0	99,5	82,8	30,90	51,90	16,7	1340	1,05	1,20	1,38	1,38
Brombenzol $\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$	82,2	102,9	87,1	33,76	53,34	15,8	1420	1,06	1,18	—	—
Jodbenzol $\text{C}_6\text{H}_5\text{J}$	89,8	109,3	93,5	—	—	15,8	1420	1,04	1,17	—	—
Chlorkohlenstoff CCl_4	72,5	94,0	75,7	26,40	49,30	18,3	1230	1,04	1,24	—	—
Zinnchlorid SnCl_4	87,4	113,8	91,8	—	—	22,0	1020	1,05	1,24	—	—
Äthyläther $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$	72,2	100,6	78,1	22,31	55,81	22,5	990	1,08	1,29	1,29	1,36
Methylformiat $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$	45,3	60,5	47,4	—	—	13,1	1720	1,05	1,28	1,28	1,32
Methylacetat $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$	57,8	77,4	61,3	18,03	43,27	16,1	1390	1,06	1,26	1,26	1,36
Äthylformiat $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$	58,4	78,4	61,9	17,93	43,97	16,5	1330	1,06	1,27	1,27	1,37
Äthylacetat $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$	72,8	96,4	76,8	22,14	54,66	19,6	1140	1,05	1,26	1,26	1,38
Methylalkohol CH_3O	29,8	39,5	33,0	8,16	24,84	6,5	3450	1,11	1,20	1,20	1,29
Äthylalkohol $\text{C}_2\text{H}_5\text{O}$	44,9	57,1	46,7	12,71	33,99	10,4	2160	1,04	1,22	1,22	1,34
Propylalkohol $\text{C}_3\text{H}_7\text{O}$	58,1	73,3	60,8	17,42	43,38	12,5	1800	1,04	1,21	1,21	1,33
Eisigsäure $\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2$	43,8	56,1	46,4	12,93	33,47	9,7	2310	1,06	1,21	1,21	1,38

1,36

berechneten Werte b , sodann die Werte M_a , $b - M_a$ und $(v - b)_{273}$, unter a/v^2 die inneren Drucke, sowie endlich die Werte b_{273}/b_0 , b_{273}/v_0 , v_{273}/b_{273} und v_T/b_{273} , welche für eine spätere Abhandlung von Bedeutung sind.

Während für die Volumenwerte der Ringverbindungen und der Halogene ganz dasselbe gilt, wie für die Siedepunkte, kritische Temperaturen und den absoluten Nullpunkt, interessieren hier besonders die assoziierten Verbindungen (die Alkohole, Essigsäure, Methylformiat).

Dividieren wir die Elektronenräume $b - M_a$ durch die Zahl der Valenzen n , so wird (für Sauerstoff $n = 2$) wie für die übrigen Temperaturen der Quotient $b - M_a/n$ für die assoziierten Stoffe größer als für die normalen Verbindungen (beispielsweise für Methylalkohol gleich 2,48, für die Kohlenwasserstoffe im Mittel gleich 1,8). Dahingegen sind die Kovolumina für die assoziierten Verbindungen besonders klein, und demgemäß die mit Hilfe des Quotienten $22420^1)/(v - b)_{273}$ berechneten inneren Drucke a/v^2 besonders groß.

Beim Siedepunkte haben beispielsweise isomere Verbindungen, wie Äthyläther und Butylalkohol, gleiches Kovolumen. Die assoziierte Verbindung, in diesem Falle der Butylalkohol, hat aber einen ganz wesentlich höheren Siedepunkt, daraus folgt schon, daß bei gleicher Temperatur das Kovolumen des Butylalkohols (vgl. die Alkohole) wesentlich kleiner ist. Ebenso hat die assoziierte Essigsäure ein kleineres Kovolumen als das isomere Methylformiat.

Die assoziierten Stoffe sind hiernach keine atomistischen Verbindungen, sondern es sind Stoffe, deren Moleküle unter einem besonders großen inneren Drucke stehen. Der Assoziationsgrad ist diesem inneren Drucke proportional. Der größere innere Druck führt eine entsprechende Verkleinerung des Kovolumens herbei, und es macht sich nun (vgl. p. 533) ein entsprechender Gegendruck geltend, welcher eine geringe Vergrößerung der Innenräume und eine erhebliche Vergrößerung der Elektronenräume zur Folge hat. Diese Auffassung der assoziierten

1) 22420^a ist das mittlere Molekularvolumen im Gaszustande bei 0° und 1 Atm.

Stoffe ist namentlich in chemischer, vielleicht aber auch in physikalischer Hinsicht recht beachtenswert. Es ist mir hier- nach zweifelhaft, ob wir in homogenen assoziierten Stoffen ein Gleichgewicht verschieden großer Molekeln anzunehmen berechtigt sind.¹⁾

Charlottenburg, Technische Hochschule.

1) Ich werde über diese Verbindungen in den Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. noch Näheres veröffentlichen.

(Eingegangen 8. Januar 1907.)

8. *Spannungsgefälle an Aluminiumanoden; von Günther Schulze.*

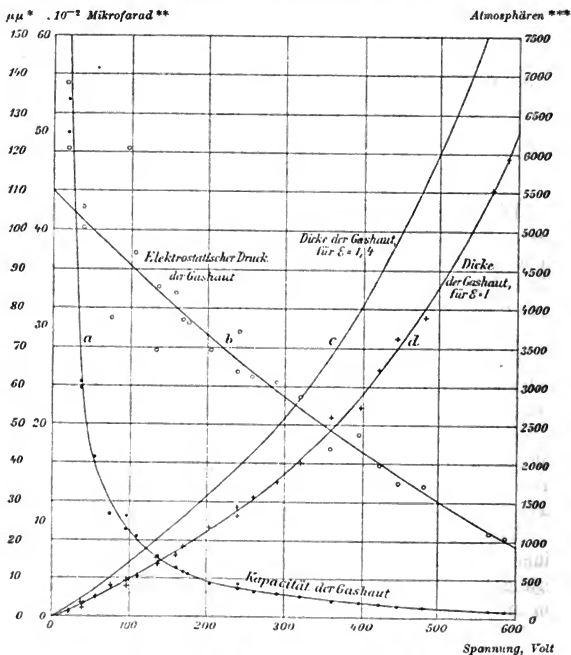
(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Die vorliegende Arbeit bildet eine Fortsetzung der in diesen Annalen Bd. 21. p. 929. 1906 erschienenen Untersuchungen über das Verhalten von Aluminiumanoden. In denselben war die Annahme begründet, daß der hohe Spannungsverlust an Aluminiumanoden durch eine sehr dünne Gashaut (Sauerstoff) verursacht wird, welche sich unter dem Einfluß des Stromes unmittelbar an der Oberfläche des Aluminiums ausbildet, zugleich mit einer sehr viel dickeren festen, porösen Haut, und zwar wahrscheinlich in den Poren derselben und durch dieselbe gestützt. Bezüglich der einzelnen Versuche, welche zu dieser Annahme führten, sowie bezüglich der benutzten Apparate und Schaltungen sei auf die erwähnte Arbeit verwiesen.

Um ein Urteil über die Dicke der Gasschicht zu gewinnen, war die Kapazität derselben als Funktion der vorhergegangenen Spannungsbelastung nach der absoluten Methode von Maxwell-Thomson mit Hilfe eines rotierenden Unterbrechers gemessen. Es ergab sich, daß die Beziehung zwischen der Kapazität der Gasschicht und der maximalen Spannung, welche sie vorher bei sehr geringer Stromdichte ausgehalten hatte (bis zu welcher sie „formiert“ war), für alle untersuchten Elektrolyte gemeinsam galt, und von der Dauer der vorhergehenden Einschaltung ganz unabhängig war, sofern nur die Zelle vollständig formiert war.

Die Kurve, welche diese Beziehung darstellt, findet sich in nachstehender Fig. 1. In der erwähnten ersten Arbeit war nicht diese Beziehung zwischen Kapazität und Spannung der Gashaut, sondern der größeren Anschaulichkeit wegen die Beziehung zwischen Dicke und Spannung der Gashaut angegeben,

wobei die Dicken aus den Kapazitäten unter Annahme einer Dielektrizitätskonstanten $\epsilon = 1$ berechnet waren.



* In Kurve c und d. ** In Kurve a. *** In Kurve b.

Fig. 1.

Diese letztere Beziehung, welche ebenfalls als Kurve in Fig. 1 wiedergegeben ist, zeigt, daß die Dicke der Gashaut anfänglich ungefähr proportional der ausgehaltenen Spannung, später schneller wächst.

Die Dielektrizitätskonstante 1 wurde gewählt, weil es sich vielmehr um relative als um absolute Werte handelte.

Da bei der Fortführung der Untersuchung absolute Werte wenigstens der Größenordnung nach gebraucht werden, soll

noch eine andere Annahme entwickelt werden, die vielleicht wahrscheinlicher ist.

I. Voruntersuchungen über die Dielektrizitätskonstante und die Dichte der Gashaut.

1. Prüfung der Annahme $\epsilon = 1$.

Die Dielektrizitätskonstante des Sauerstoffs, aus dem die Gashaut besteht, ist experimentell noch nicht bestimmt. Nun hat sich aber für die Gase, deren Dielektrizitätskonstante genau bestimmt wurde, die Forderung des Maxwellschen Gesetzes:

$$\epsilon = n^2 \text{ (} n \text{ Brechungsindex)}$$

gut bestätigt gezeigt. Diese Gleichung ergibt für Sauerstoff von 760 mm Druck und 0° C.

$$\epsilon = n^2 = 1,000546.$$

Ferner ist $\epsilon - 1$ proportional der Dichte, und zwar gilt für Sauerstoff

$$\epsilon - 1 = \frac{0,000546}{v},$$

wenn für den Druck von 760 mm das relative Volumen $v = 1$ gesetzt wird.

Wenn also die Gashaut eine große Dichte besitzen sollte, so müßte ihr eine von 1 wesentlich abweichende Dielektrizitätskonstante zukommen.

2. Die elektrostatischen Drucke.

Sobald nun die Gashaut an Spannung liegt, steht sie unter einem elektrostatischen Drucke, dessen Größe sich leicht ermitteln läßt. Da für den Kondensator, dessen Dielektrikum die Gashaut ist, der Abstand der beiden Belegungen (Aluminium-Elektrolyt) gegenüber ihrer Fläche verschwindet, so gilt für die gegenseitige elektrostatische Anziehungskraft die Formel

$$(1) \quad k = \frac{\epsilon V^2 \cdot f}{8 \pi \cdot a^2} \text{ Dynen,}$$

wo ϵ die Dielektrizitätskonstante, V die Potentialdifferenz in elektrostatischen Einheiten, f die Fläche (qcm), a der Abstand (cm) ist.

Ferner ist in elektrostatischem Maß die Kapazität eines solchen Kondensators

$$(2) \quad C = \frac{f \epsilon}{4 \pi a},$$

daraus in Verbindung mit (1):

$$k = \frac{C^2 \cdot V^2 \cdot 2 \pi}{\epsilon \cdot f} \text{ Dynen.}$$

Durch Umrechnung auf elektromagnetische Einheiten ergibt sich für 1 qcm Fläche

$$K = \frac{C^2 \cdot V^2 \cdot 57,7}{\epsilon} \text{ Atm.,}$$

wenn V in Volt, C in Mikrofarad eingesetzt wird.

Die in Fig. 1 für $\epsilon = 1$ eingetragene Kurve der maximalen elektrostatischen Drucke als Funktion der Maximalspannungen oder der (vorläufig nur relativ bekannten) Dicken der Gashaut zeigt, daß die Gashaut unter hohen Drucken steht, welche bei sehr geringen Hautdicken ungefähr 5500 Atm. betragen und bei einer Maximalspannung von 500 Volt auf 1500 Atm. gesunken sind, falls $\epsilon = 1$ ist.

3. Verhalten der Gashaut bei Spannungsänderungen.

Bei Wegnahme dieser Drucke sollte man eine lebhafte Expansion der Gashaut erwarten. Denn wenn z. B. die Spannung einer bis 400 Volt formierten Zelle von 400 Volt auf 4 Volt erniedrigt wird, so sinkt der elektrostatische Druck von 2100 Atm. auf 0,21 Atm. Dem entspricht bei 760 mm Luftdruck eine Volumen- und Dickenzunahme auf das 470fache.

Eine solche Expansion der Gashaut bei Verringerung des elektrostatischen Druckes läßt sich dadurch ermitteln, daß die Kapazität der Gashaut gemessen wird, einmal, wenn sie mit der Maximalspannung, dann wenn sie mit einer möglichst geringen Spannung belastet ist.

Solche Versuche wurden zunächst nach der absoluten Methode von Maxwell-Thomson ausgeführt, indem als Meßspannung einmal die Maximalspannung der Zelle, dann eine Spannung von 2 Volt benutzt wurde. Als Mittel aus mehreren Messungen an einer bis 80 Volt formierten Zelle mit $(\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$ ergab sich:

Meßspannung	Widerstand	Kapazität
80 Volt	840 000 Ohm	$6,04 \cdot 10^{-7}$ Farad
2 „	2 800 000 „	$5,88 \cdot 10^{-7}$ „

Da scheint also wirklich bei Verringerung der Spannung die Kapazität abzunehmen, die Gashaut also dicker zu werden. Aber diese Dickenzunahme ist kaum merklich, und von einer Expansion auf das Mehrhundertfache kann gar keine Rede sein. Ferner scheint der Widerstand der Gashaut von der Spannung abhängig zu sein. (Die durch ihn bedingte Korrektur wurde natürlich in beiden Fällen angebracht.)

Nun wird aber bei dieser Methode der Kondensator während jeder Periode kurz geschlossen, und das erscheint höchst unzuweckmäßig, wenn es darauf ankommt, sein Verhalten unter Spannung zu ermitteln.

Deshalb wurde auch die Methode des Vergleiches zweier Kondensatoren in der Brücke mit Wechselstrom mit einer geringen Änderung benutzt.

In den einen Kapazitätszweig wurde außer der zu messenden Zelle noch ein Umschalter U eingefügt, mittels dessen die Zelle sowohl an die Maximalspannung E als auch an eine geringe Spannung e gelegt werden konnte.

Es wurde Sorge getragen, daß e stets wesentlich höher als die benutzte Wechselspannung (ca. 2 Volt) war. Zur Formierung wurde s geschlossen, während der Messung geöffnet, so daß dann der Reststrom der

Zelle von der Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-5} Amp. durch das Vibrationsgalvanometer V floß.

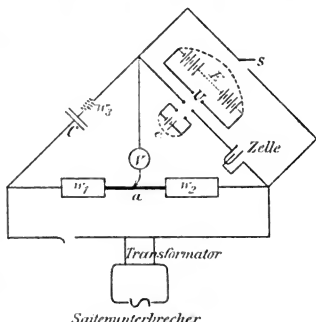


Fig. 2.

Da die Zelle kein reiner Kondensator ist, mußte der bekannten Kapazität C ein Widerstand w_3 vorgeschaltet werden, um ein scharfes Minimum zu erhalten.

w_1, w_2 sind zwei Meßwiderstände, verbunden durch einen Schleifdraht a , um eine kontinuierliche Widerstandsänderung zu ermöglichen.

Die Messungen wurden mit einer Zelle ausgeführt, welche $(\text{NH}_4)_2\text{HBO}_3$ enthielt, und ergaben folgendes:

Spannung, bis zu welcher formiert wurde	Vorschalt- wider- stand w_3	Kapazität bei Formierungs- spannung	Kapazität bei 4 Volt Spannung	Nach der abso- luten Methode gemessene Kapazität
41 Volt	40 Ω	$19,6 \cdot 10^{-2} \frac{\text{M.F.}}{\text{qcm}}$	$20,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{M.F.}}{\text{qcm}}$	$23,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{M.F.}}{\text{qcm}}$
82	40	9,88	10,1	11,0
205	100	3,23	3,37	3,8
325	130	1,79	1,84	2,1

Die Periodenzahl bei den Messungen betrug 435 in der Sekunde. Mit den angegebenen Vorschaltwiderständen ließ sich im Vibrationsgalvanometer ein scharfes, gut einstellbares Minimum erzielen. Nach jeder Messung wurde die Zelle durch einen bekannten Glimmerkondensator ähnlicher Kapazität ersetzt. Die für denselben ermittelten Werte wichen um einige Promille von den richtigen ab, und es ergab sich bei der Spannung e eine um einige Promille größere Kapazität als bei der Spannung E .

Die Zelle verhält sich also gegen Wellenstrom, d. i. ein Strom, bei dem sich nur die Intensität, nicht die Richtung periodisch ändert, wie ein Kondensator mit vorgeschaltetem Widerstande.

Ferner zeigt sich, daß die Kapazität bei Verringerung der Spannung nicht nur nicht abnimmt, sondern vielmehr um geringe Beträge wächst.

Endlich ergeben sich nach der absoluten Methode höhere Kapazitäten als nach der Methode des Vergleiches mit einer bekannten Kapazität mit Wellenstrom. Jedoch erscheinen die Einwände gegen die absolute Methode für den vorliegenden

Fall geringer als gegen die relative, so daß die nach der ersteren erhaltenen Werte als die zuverlässigeren angesehen werden können.

Aus dem Ergebnis der vorstehenden, zur Orientierung angestellten Versuche, daß nämlich die Gashaut bei Verringerung der Spannung nicht expandiert, wird man sich am einfachsten die Vorstellung bilden, daß die poröse feste Haut die Gashaut in einem stark verdichteten Zustande bindet, ähnlich wie z. B. die poröse Holzkohle verschiedene Gase in stark verdichtetem Zustande zu binden fähig ist. Es leuchtet ein, daß das Hinzufügen oder Wegnehmen von einigen Tausend Atmosphären elektrostatischen Druckes die Dichte eines Gases nicht wesentlich ändern kann, wenn dasselbe von vornherein eine Dichte besitzt, die einem Drucke von mehreren Tausend Atmosphären entspricht.

4. Ermittlung von ϵ .

Mit Hilfe dieser Vorstellung lassen sich ungefähre Werte der Dielektrizitätskonstanten ϵ ermitteln. Die Verbindung der Gleichung

$$\epsilon - 1 = \frac{0,000546}{v}$$

mit den von Amagat¹⁾ gefundenen Werten des relativen Volumens des Sauerstoffs bei hohen Drucken ergibt folgendes:

Druck in Atm.	Relatives Volumen bei 15° C.	ϵ
1	1	1,000546
1000	0,001800	1,303
2000	0,001444	1,378
3000	0,001296	1,422

Zum Vergleich sei erwähnt, daß ϵ für flüssigen Sauerstoff zu 1,465²⁾ bestimmt wurde.

ϵ ändert sich demnach bei hohen Drucken nur wenig. Für die Berechnung der Dicke der Gashaut aus der Kapazität soll in den folgenden nur der Größenordnung nach gebrauchten

1) E. H. Amagat, Compt. rend. 111. p. 871. 1890; Ann. de chim. et phys. (6) 29. p. 68. 1893.

2) F. Hasenöhr, Comm. Phys. Lab. Leiden Nr. 52. 1899.

Zahlenangaben $\epsilon = 1,4$ gesetzt werden. Zum Vergleich sind außerdem die Werte hinzugefügt, die sich unter der Annahme $\epsilon = 1$ ergeben. Wird $\epsilon = 1,4$ angenommen, so sind die angegebenen elektrostatischen Drucke durch 1,4 zu teilen.

II. Spannungsgefälle in der Gashaut in wirksamer Richtung.

Mit Hilfe dieser Annahme läßt sich nun die absolute Dicke der Gashaut ermitteln. Sie ist in Fig. 1 als Funktion der Maximalspannung angegeben.

Die Kurven zeigen, daß die Dicken der Gashaut sehr gering sind und demgemäß ein sehr hohes Spannungsgefälle in ihr herrscht. Dasselbe beträgt anfangs 8200 Volt/ μ (8,2 Millionen Volt pro Millimeter) für $\epsilon = 1,4$ bez. 11500 Volt/ μ für $\epsilon = 1$ und bei einer Dicke von 100 $\mu\mu$ noch 4500 bez. 6300 Volt/ μ .

Hier ist es nun von Interesse, zum Vergleiche die Versuche heranzuziehen, welche von Earhardt¹⁾, Shaw²⁾, Hobbs³⁾ zur Ermittlung der Beziehung zwischen Funkenspannung und Elektrodenabstand für sehr geringe Elektrodenabstände an- gestellt wurden.

Diese Versuche ergaben übereinstimmend, daß bei sehr geringen Elektrodenabständen (die Beobachtungen erstrecken sich bis hinunter zu 500 $\mu\mu$) die Funkenspannung dem Elektrodenabstande direkt proportional und von der zwischen den Elektroden befindlichen Gasart und dem Druck derselben unabhängig, und daß kein Entladeverzug vorhanden ist. Dagegen erwies sich das Spannungsgefälle abhängig von dem Elektrodenmaterial.

Die geradlinige Beziehung gilt für Aluminium bis zu einem Elektrodenabstande von 3,2 μ bei einem Spannungsgefälle von 105 Volt/ μ , für Platin bis 1,8 μ bei einem Spannungsgefälle von 195 Volt/ μ . Die anderen untersuchten Metalle liegen zwischen diesen Werten. Hobbs schließt aus den Beobachtungen, daß bei diesen geringen Elektrodenabständen der

1) R. F. Earhardt, Phil. Mag. (6) 1. p. 147 1901.

2) P. E. Shaw, El. London p. 978. 1906.

3) G. M. Hobbs, Phil. Mag. (6) 10. p. 617. 1905.

Elektrizitätstransport durch Ionen der Elektroden bewirkt würde.

Diese Ionen können nun wohl nur negative Elektronen sein, denn nur diese sind in Metallen frei vorhanden. Nach allen bisherigen Beobachtungen schien es jedoch unmöglich, diese Elektronen allein durch Spannungsgefälle aus Metallen in ein Gas austreten zu lassen. Es erscheint aber durchaus nicht undenkbar, negative Elektronen aus einem Metall in ein anderes, in einem äußerst geringen Abstände befindliches, zu überführen. Zu einer solchen Annahme des Elektronenüberganges zwingen eigentlich schon die alltäglichen Erscheinungen an Metallkontakten, durch die starke Ströme bei verschwindender Potentialdifferenz fließen können, während eine tatsächliche unmittelbare metallische Berührung doch nur an sehr wenigen Punkten stattfindet.

Bei dem von Hobbs beobachteten Spannungsgefälle von 105 Volt/ μ zwischen Aluminiumelektroden erreichen die negativen Elektronen eine solche Geschwindigkeit, daß sie ionisierend auf das Gas wirken können. In der Gashaut auf Aluminiumanoden im Elektrolyten sind, wie sich gezeigt hat, bei 100 $\mu\mu$ Hautdicke 4500 Volt/ μ bez. 6300 Volt/ μ erforderlich, um Funken zu bewirken, also ungefähr das 43 fache bez. 60 fache. Das scheint ein Widerspruch zu sein. Derselbe läßt sich jedoch mit der Annahme des Überganges negativer Elektronen leicht lösen. Die negativen Elektronen gehen von der Kathode zur Anode. Die Kathode der Gashaut ist der Elektrolyt. In Elektrolyten sind negative Elektronen nicht frei vorhanden. Der Übergang ist also hier unmöglich.

Dagegen sind im Elektrolyten negative Ionen vorhanden. Diese müssen den Elektrizitätstransport durch die Gashaut übernehmen. Da sie aber eine sehr viel größere Masse als die Elektronen besitzen, bedürfen sie auch eines viel höheren Spannungsgefälles, um ionisierend wirken zu können, nämlich des Spannungsgefälles von 4500 bez. 6300 Volt/ μ statt 105 Volt/ μ , dessen die negativen Elektronen bedürfen.

III. Spannungsgefälle in der Gashaut in unwirksamer Richtung.

Die erste Probe auf die Annahme sei die Umkehrung der Stromrichtung in der Zelle. In diesem Falle ist Aluminium

Kathode, der Elektrolyt Anode. Die Kathode enthält jetzt freie negative Elektronen. Es müssen also jetzt an der Gashaut Spannungsgefälle auftreten von der Größenordnung der von Hobbs und Earhardt gefundenen Werte.

Bei dieser Gelegenheit mögen die Verhältnisse bei Umkehrung der Stromrichtung kurz erörtert werden. Zur Erklärung des geringen Spannungsverlustes in der Zelle in unwirksamer Richtung wird in vielen Veröffentlichungen angegeben, die wirksame Schicht (einerlei ob Gashaut, ob feste „Oxydhaut“) werde durch den in dieser Richtung am Aluminium entwickelten Wasserstoff reduziert. Nun wird die Gashaut bei vielen Elektrolyten durch das Ausschalten gar nicht, bei anderen nur langsam geändert. Also könnte bei plötzlichem Umschalten im ersten Augenblick in der unwirksamen Richtung nur ein ebenso geringer Strom fließen wie der Reststrom der wirksamen Richtung, und die Spannung müßte im ersten Augenblick dieselbe sein wie bei wirksamer Stromrichtung. Bei $100\ \mu\mu$ Dicke und dem relativen Volumen 0,0015 enthält 1 qcm Gashaut $6,7 \cdot 10^{-8}$ ccm Sauerstoff von 760 mm Druck und 0°C . Um diese Menge zu reduzieren oder neu zu entwickeln sind 0,111 Amp.sec oder 25 sec bei 0,005 Amp./qcm erforderlich, während der Reststrom z. B. bei $(\text{NH}_4)_2\text{HBO}_3$ nur ca. 0,0001 Amp./qcm beträgt. Dieser Reststrom müßte also sogar 1250 Sek. fließen.

Ein Blick auf das Verhalten der Zelle beim Umschalten ergibt, daß die Änderung von Strom und Spannung eine momentane ist, also nicht durch Reduktion oder Neubildung der wirksamen Schicht verursacht sein kann.

Zur größeren Sicherheit wurde der Einfluß des Umkehrens der Stromrichtung auf die Dicke der Gashaut direkt durch Kapazitätsmessungen bestimmt, indem die Stromrichtung einer bis zu 406 Volt formierten, mit $\text{Na}_2\text{B}_2\text{O}_4$ beschickten Zelle bei der konstanten Stromdichte von 0,002 Amp./qcm eine bestimmte Zeit lang umgekehrt und dann die Kapazität der Gashaut ermittelt wurde. Diese Kapazitätsmessung fand in wirksamer Richtung mit 2 Volt statt. Wäre die Haut durch das Umkehren verschwunden, so könnte sie sich jetzt nur zu einer 2 Volt entsprechenden Dicke, nämlich $0,18\ \mu\mu$ formieren.

Es ergab sich aber folgendes:

Dauer der Umschaltung mit 0,002 Amp./qcm	Dicke der wirksamen Schicht
0 sec	87 $\mu\mu$
15	85,7
30	81,6
60	68,7
180	60,5
360	57,1
540	55,1
720	54,1
1800	53,0
7200	53,0

Diese Messung zeigt also deutlich, daß die Dicke der Gashaut in unwirksamer Richtung zwar abnimmt, aber durchaus nicht schnell und auch nicht Null wird, sondern sich einem konstanten Werte nähert, der bei 0,002 Amp./qcm ungefähr das 0,6 fache des ursprünglichen beträgt.

Die Grundtatsache, von der jede Erklärung des Verhaltens der Zelle in unwirksamer Richtung auszugehen hat, ist also die, daß die wirksame Schicht in unwirksamer Richtung zunächst gerade so vorhanden ist wie in wirksamer Richtung.

Kehren wir nun zu dem Vergleich mit den Werten von Earhardt und Hobbs zurück. Wir hatten schon gesehen, daß in unwirksamer Richtung der Spannungsverlust in der Gashaut mit den von Earhardt und Hobbs angegebenen Werten übereinstimmen muß.

Zum Vergleich diene zunächst folgende, zum Teil schon in der erwähnten ersten Arbeit enthaltene Tabelle.

Elektrolyt	Dicke der Gashaut in $\mu\mu$		Maximal- spannung der Zelle in wirk- samer Richtung	Gesamtspannung der Zelle in unwirk- samer Richtung bei 0,005 Amp./qcm		Spannung der Gashaut, berechnet nach Hobbs	
	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1,4$		im ersten Moment	dauernd	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1,4$
$(\text{NH}_4)_2\text{HBO}_3$	85,8	120,2	500 Volt	25 Volt	10 Volt	9,0 Volt	12,6 Volt
H_3AsO_4	71,0	99,5	450	75	18,5	7,5	10,4
$\text{Na}_2\text{B}_2\text{O}_4$	64,4	90,2	425	25	10	6,8	9,5
$(\text{NH}_4)_2\text{HAsO}_4$	58,0	81,2	400	20	5	6,1	8,5
$(\text{NH}_4)_2\text{HPO}_4$	48,6	68,0	360	10	5	5,1	7,1
$(\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$	40,7	57,0	320	16	10	4,3	6,0
KH_2PO_4	30,7	43,0	260	5	4	3,2	4,5

Es zeigt sich, daß die Werte der Größenordnung nach stimmen, besonders wenn berücksichtigt wird, daß von der angegebenen Gesamtspannung der Zelle ja der Spannungsverlust am Pt und im Elektrolyten abzuziehen ist, und daß die für den ersten Moment des Umschaltens angegebenen Werte durch den kapazitiven Entlade- und Ladestrom vergrößert sind.

Es wurde versucht, die Spannungen an der Gashaut in unwirksamer Richtung genauer zu ermitteln. Zunächst wurde der Spannungsverlust der Zelle in unwirksamer Richtung gemessen, ehe sie formiert war, und daraus der Spannungsverlust am Pt und im Elektrolyten ermittelt. Dann wurde die Messung wiederholt, nachdem die Zelle zu den gewünschten Spannungen formiert war. Aus den beiden Messungen ließ sich dann der Spannungsverlust in der Gashaut annähernd berechnen.

Eine mit $(\text{NH}_4)_2\text{HBO}_3$ formierte Zelle ergab folgendes:

Spannung, bis zu welcher formiert wurde	Dicke der Gashaut		Spannung der Gashaut in unwirksamer Richtung bei 0,005 Amp./qcm	Spannung der Gashaut, berechnet nach Hobbs	
	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 1,4$		$\epsilon = 1$	$\epsilon = 1,4$
330 Volt	42,7 $\mu\mu$	59,8 $\mu\mu$	ungef. 5,0 Volt	4,5 Volt	6,3 Volt
408	60,2	84,3	„ 7,9	6,3	8,9
470	76,5	107,2	„ 10,0	8,0	11,3

Diese Übereinstimmung erscheint hinreichend in Anbetracht der beiderseitigen Schwierigkeiten der Messung. Die Annahme, daß die Erscheinungen an Aluminiumanoden durch das Fehlen von Elektronen im Elektrolyten gegenüber dem Vorhandensein von Elektronen im Aluminium bedingt seien, erklärt also:

1. weshalb die Spannungsverluste in beiden Richtungen so sehr verschieden sind,

2. warum das Spannungsgefälle in wirksamer Richtung so sehr viel größer ist als die von Earhardt und Hobbs beobachteten Werte,

3. weshalb das Spannungsgefälle in unwirksamer Richtung mit den von Earhardt und Hobbs erhaltenen Werten übereinstimmt.

IV. Durchschlagsversuche.

Diese Annahme läßt sich nun noch durch folgende Überlegungen und Versuche stützen: Wenn der hohe Spannungsverlust in wirksamer Richtung durch das Fehlen von negativen Elektronen im Elektrolyten bedingt ist, so muß er verschwinden, wenn negative Elektronen in den Elektrolyten in die Nähe der Gashaut gebracht werden. Also wenn ein beliebiges Metall in den Elektrolyten getaucht wird, so daß es dessen Potential annimmt, nach außen aber isoliert ist, und nun in die unmittelbare Nähe der Aluminiumanode gebracht wird, so muß der Strom aus dem Elektrolyten in das Metall und vom Metall mit Hilfe der negativen Elektronen zum Aluminium übergehen, und der hohe Spannungsverlust verschwinden. Der Versuch bestätigt das. Sowie das Metall (Platin) in unmittelbare Nähe des Aluminiums gebracht wurde, trat lebhafter Funkenübergang ein¹⁾, und die Spannung fiel auf wenige Volt. Sobald das Metall entfernt wurde, war wieder der hohe Spannungsabfall vorhanden. Von einer mechanischen Verletzung der Gashaut durch das Metall kann das nicht herrühren, denn dieselbe ist ja durch die dickere feste Haut geschützt. In der Tat konnte man mit einem Glasstabe ziemlich lebhaft auf die Aluminiumanode klopfen, ohne daß die Spannung sank.

Gegen den Versuch läßt sich einwenden, daß die Stromverteilung im Elektrolyten durch den Metallstab geändert wurde. Der Versuch gelingt zwar auch mit einem ganz kleinen, auf eine Siegellackstange geklebten Metallstückchen, läßt sich aber auf andere Weise einwandsfreier gestalten.

Eine Zelle wird bis zu einer bestimmten Spannung formiert, und zwar eine Zelle, welche durch Ausschalten des Stromes nicht geändert wird.

Nachdem sie formiert ist, wird ausgeschaltet und Quecksilber eingefüllt, so daß es den Elektrolyten durch sein größeres spezifisches Gewicht verdrängt und die ganze Zelle erfüllt. Dann muß beim Wiedereinschalten die Stromverteilung in der Zelle dieselbe sein wie zuvor.

Wird nun zunächst eine geringe Spannung an die Zelle gelegt und dieselbe gesteigert, so erfolgt plötzlich unter einem

1) Vgl. auch K. E. Guthe, Phys. Rev. 15. p. 327. 1903.

klaren Ton das Durchschlagen der Zelle bei einer Spannung, die wesentlich geringer ist als die, bis zu welcher formiert war, also welche die Zelle unmittelbar vorher noch ausgehalten hatte.

Und zwar erfolgte das Durchschlagen der Strecke b in nebenstehender Fig. 3, also direkt vom Quecksilber zum Aluminium, durch die feste Haut hindurch, trotzdem dieselbe gut leitet, während vorher, ehe Quecksilber eingefüllt wurde, die Strecke a die viel höhere Spannung ausgehalten hatte.

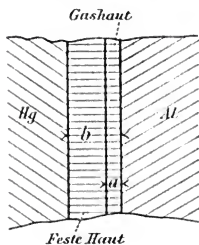


Fig. 3.

Daß die Strecke b durchschlagen wurde, geht aus folgendem hervor:

1. Nach dem Durchschlagen war die Spannung Null, also Quecksilber und Aluminium berührten sich unmittelbar.
2. Die zum Durchschlagen erforderliche Spannung war bei gleicher Formierungsspannung um so höher, je längere Zeit die Formierung fortgesetzt war. Wie früher nachgewiesen, nimmt aber die Dicke der festen Haut, also die Strecke b , mit der Dauer der Formierung dauernd zu, während a konstant bleibt. Bei sehr langdauernder Formierung wird b so groß, daß die Durchschlagsspannung größer wird als die Spannung, welche a aushält. Dann findet Durchschlagen erst statt, wenn sich durch Überschreitung der Maximalspannung in a ein Funke bildet.

Elektrolyt	KH_2PO_4	$(\text{NH}_4)_2\text{HBO}_3$	$(\text{NH}_4)_2\text{HBO}_3$ (andere Zelle)	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$
Spannung, bis zu welcher formiert wurde	165 Volt	450 Volt	408 Volt	408 Volt
Durchschlagsspannung bei Formierungsdauer von				
15 Min.	—	—	162 Volt	—
50	—	—	—	—
60	88 Volt	125 Volt	—	230 Volt
80	120	150	185	—
150	112	180	185	—
1500	—	—	200	—
3000	über 165	über 450	—	—

In vorstehender Tabelle sind die Ergebnisse solcher Durchschlagsversuche zusammengestellt.

Es finden sich in der Tabelle die Unregelmäßigkeiten, welche bei Durchschlagsversuchen stets vorkommen. Doch läßt sich das Anwachsen der Durchschlagsspannung mit der Dauer der Einschaltung deutlich erkennen. Die Entladung erstreckt sich also tatsächlich über die Strecke *b*. Das ist ja auch zu erwarten, denn die freien negativen Elektronen können den Elektrolyten nur in Form einer Entladung, nicht in Form elektrolytischer Leitung durchwandern.

Diese Versuche stützen die Annahme, daß die ganzen Erscheinungen an Aluminiumanoden in letzter Linie durch das Fehlen von freien negativen Elektronen bedingt sind.

V. Zusammenfassung.

1. Die an Aluminiumanoden auftretende wirksame Schicht ist eine sehr dünne Sauerstoffhaut und läßt sich hohen elektrostatischen Drucken von mehreren Tausend Atmosphären unterwerfen (I.).

2. Die Dielektrizitätskonstante der wirksamen Schicht wird zu ungefähr 1,4 angenommen (I.).

3. Damit lassen sich die absoluten Dicken der Gashaut berechnen (II.).

4. Die maximalen Spannungsgefälle in der Gashaut betragen in wirksamer Richtung bei sehr geringen Dicken 8200 Volt/ μ , bei einer Hautdicke von 100 $\mu\mu$ noch 4500 Volt/ μ (II.).

5. Die Spannungsgefälle in unwirksamer Richtung befinden sich in Übereinstimmung mit den durch Earhardt und Hobbs gefundenen Werten von Entladungspotentialen bei sehr geringen Elektrodenabständen. Dieselben fanden ein Spannungsgefälle von 105 Volt/ μ (III.).

6. Das abnorm hohe Spannungsgefälle in wirksamer Richtung und das normale Spannungsgefälle in unwirksamer Richtung lassen sich daraus erklären, daß der Elektrizitäts-transport durch sehr dünne Gasschichten hindurch mit Hilfe freier negativer Elektronen stattfindet, daß das hier aber in wirksamer Richtung unmöglich ist, weil der Elektrolyt (Kathode) keine freien negativen Elektronen enthält, so daß die elektro-

lytischen negativen Ionen an die Stelle der Elektronen treten müssen. Sie brauchen aber ein viel höheres Spannungsgefälle zum Durchdringen der Gasschicht als die freien negativen Elektronen. In unwirksamer Richtung dagegen stehen freie negative Elektronen von Aluminium (Kathode) her zur Verfügung, so daß das normale Spannungsgefälle (wie bei Earhardt und Hobbs) vorhanden ist (III.).

7. Diese Annahme läßt sich stützen durch Durchschlagsversuche an Zellen, in denen nach der Formierung der Elektrolyt durch Quecksilber ersetzt wurde (IV.).

(Eingegangen 12. Januar 1907.)

**9. Über Beseitigung der ungleichmäßigen Stromverteilung in Wechselstromleitern;
von F. Dolezalek und H. G. Möller.**

In einem von Wechselstrom durchflossenen dicken Leiter — Starkstromkabel — werden die Stromlinien nach der Oberfläche hin gedrängt und dadurch der Widerstand des Leiters erhöht. Diese Widerstandserhöhung ist ziemlich beträchtlich. Der erhöhte Widerstand w' berechnet sich nach Stefan¹⁾ zu

$$w' = w \left(1 + \frac{c^2}{12} - \frac{c^4}{180} + \frac{11 c^6}{26880} - \dots \right),$$

wobei w der Gleichstromwiderstand des Leiters und

$$c = \frac{2 \pi \text{ Periodenzahl. Querschnitt}}{\text{Spezifischen Widerstand (für Kupfer 1650)}}$$

bedeutet. Für einen Kupferquerschnitt von 1,5 cm Radius und bei nur 100 Perioden wird der Widerstand des Seiles bereits auf das 1,6 fache gesteigert. Die Beseitigung des Skin-effektes bedeutet mithin in diesem Falle eine Ersparnis von ca. 40 Proz. Kupfer.

Diese ungleichmäßige Stromverteilung hat bekanntlich ihre Ursache in Induktionswirkungen. Die inneren Drähte sind von mehr Magnetkraftlinien umschlossen wie die äußeren, daher bildet sich in ihnen schon bei geringerer Stromstärke dieselbe elektromotorische Gegenkraft aus wie in den äußeren.

Will man die gleichmäßige, das aufgewandte Kupfer am besten ausnutzende Stromverteilung erzwingen, so muß man entweder die einzelnen Drähte derartig führen, daß sie bei Betrachtung eines längeren Stückes alle von derselben Kraftlinienzahl umschlossen werden, oder man muß die elektromotorische

1) J. Stefan, Wiener Ber. 95. II A. p. 917. 1887.

Gegenkraft der äußeren Drähte durch Zuschalten von Selbstinduktion erhöhen. Und zwar wird allein Zuschalten von Selbstinduktion genügen. Denn der vom Ohmschen Widerstand herrührende Anteil der elektromotorischen Gegenkraft ist bereits gleich. Eine Erhöhung des energiefressenden Teiles des Wechselstromwiderstandes durch die Kompensation auf die zweite Art ist also nicht nötig.

Auf dem ersten Gedanken beruht das deutsche Patent der Firma Siemens & Halske A.-G. (Dr. Adolf Franke); durch geeignetes Verdrallen wird jeder Draht abwechselnd nach innen und nach außen geführt. Alle Drähte sind dann bezüglich ihrer Lage und gegenseitigen Induktion einander gleichartig, so daß keine Ursache für ungleichmäßige Stromverteilung mehr vorhanden ist. Die Versuche haben dieses Resultat auch vollauf bestätigt. Ein derartig verflochtenes Seil besitzt jedoch einen größeren Gesamtquerschnitt wie ein konzentrisch verseilter Leiter von gleichem Kupferquerschnitt. Dadurch werden wieder die Kosten an Isolationsmaterial und Armierung vermehrt. Es ist daher ein für die Fortleitung von Wechselströmen wichtiges Problem, den Skineffekt ohne wesentliche Verdickung des Leiters, d. h. bei konzentrischer Verseilung zu beseitigen.

Das läßt sich nach dem zweiten angegebenen Gedanken dadurch erreichen, daß in die einzelnen Lagen¹⁾ Selbstinduktionen eingeschaltet werden, deren Größe so bemessen ist, daß bei gleichmäßiger Stromverteilung in den so vervollständigten Leiterzweigen die gleiche elektromotorische Gegenkraft ausgebildet wird.

Diese Selbstinduktion könnte man kontinuierlich verteilen, d. h. durch geeignetes spiralisches Verdrallen hervorrufen oder diskontinuierlich in Form von Spulen einschalten. Da nach hier nicht mitzuteilenden Berechnungen der zur Kompensation des Skineffektes nötige Drall so stark würde, daß die Länge der einzelnen Drähte und damit der Widerstand und die Dicke des ganzen Leiters wesentlich vergrößert würden und man außerdem die für Festigkeit und Biegsamkeit günstigste Art der Verdrallung beibehalten möchte, ist das Einschalten von

1) Über Zusammenfassen der Drähte der zylindrischen Lagen des Kabels wegen Rotationssymmetrie vgl. unten.

Spulen die einzig technisch brauchbare Art der Kompensation.¹⁾

Ist der Leiter, wie gewöhnlich ein Seil aus konzentrischen Lagen von Kupferdraht, so wird das Problem wesentlich durch Vorhandensein von Rotationssymmetrie vereinfacht. Es lassen sich dann die gleichwertigen Drähte einer ganzen Lage zusammenfassen und mit einer Spule kompensieren. Die Rotationssymmetrie erscheint auf den ersten Blick zwar durch den Einfluß der Rückleitung gestört. Die Berücksichtigung des Umstandes aber, daß jeder Draht infolge des Dralles ebensolange auf der der Rückleitung zugewandten Seite hinläuft wie auf der abgewandten, lehrt, daß sie tatsächlich streng vorhanden ist.

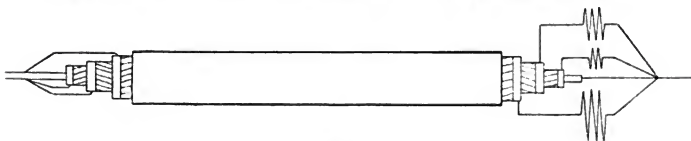


Fig. 1.

Infolge der gleichmäßigen Verteilung von Kupfer und Luftraum auf den Querschnitt des Seiles kann man das Seil durch einen von Metall entsprechend geringerer Leitfähigkeit stetig erfüllten Vollzylinder mit hinreichender Genauigkeit ersetzt denken. Dadurch wird die Durchrechnung des Problems mit stetigen Funktionen einer Variablen, des Radius, möglich.

Bei der Berechnung der Spulen hat man nach dem oben angegebenen Prinzip zunächst mit Hilfe des Magnetfeldes die elektromotorischen Gegenkräfte zu berechnen, die sich in den einzelnen Lagen bei gleichmäßiger Stromverteilung ausbilden.

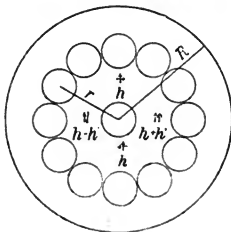


Fig. 2.

Nach dem elektromagnetischen Grundgesetz ist das Linienintegral der Feldstärke h gleich der mit 4π multiplizierten

1) D.R.P. angemeldet.

Stärke des umschlossenen Stromes. Erstreckt sich die Integration längs eines Kreises mit dem Radius r , und ist i die Stromdichte, und $i \cdot \pi r^2$ der umschlossene Strom, so gilt:

$$2 \pi r h = 4 \pi i \pi r^2,$$

$$h = 2 \pi r i.$$

Bezeichnet man das von der Rückleitung herrührende Feld mit h' , so erhält man das ganze induzierende Feld durch Superposition. Die Gesamtfeldstärke heiße $\mathfrak{H}$. Aus der Feldstärke berechnet sich die elektromotorische Kraft, welche in der ganzen Begrenzung des vom Mittelleiter und der Rückleitung umschlossenen Flächenstückes F_m , also in einer Länge $2l$ ¹⁾ erregt wird, durch die negative Änderungsgeschwindigkeit der F_m durchdringenden Magnetkraftlinien

$$-\frac{dZ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \mathfrak{H} d\sigma$$

genommen über das Flächenstück F_m . Der auf den Mittelleiter der Hinleitung allein entfallende Teil der elektromotorischen Gegenkraft ist die Hälfte davon

$$E_m = -\frac{1}{2} \frac{dZ}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{F_m} \mathfrak{H} d\sigma.$$

Analog findet man für die elektromotorische Gegenkraft in einem Draht der Lage im Abstand r

$$E_r = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{F_r} \mathfrak{H} d\sigma,$$

wobei F_r der von diesem Draht und der Rückleitung umschlossene Flächenstreifen ist.

Die durch die Spule ausgleichende Differenz ist

$$D = E_m - E_r = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{F_m} \mathfrak{H} d\sigma - \int_{F_r} \mathfrak{H} d\sigma \right) = -\frac{1}{2} \frac{dz}{dt},$$

z ist aber die Zahl der Kraftlinien, die zwischen dem Mittelleiter und dem Repräsentanten der betrachteten Lage verlaufen. Die Rückleitung liefert bei Betrachtung eines längeren

1) l sei die Länge Hin- bez. Rückleitung.

Stückes in Summa zu z nichts. Denn die einzelnen Drähte laufen von rechts, wo die Kraftlinien der Rückleitung zuzuzählen sind, über Stellen, wo ihre wirksame Komponente Null ist, nach links, wo — wenigstens bei homogenem ¹⁾ Feld der Rückleitung — ebensoviel Kraftlinien wieder abzuziehen sind, wie rechts zugezählt werden mußten. Zur Berechnung von z genügt also die Integration über das Feld h der Hinleitung allein.

$$z = \int_0^r h l dr = \pi i l r^2,$$

$$(a) \quad D = -\frac{1}{2} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2} \pi l r^2 \frac{di}{dt}.$$

Dieser Unterschied läßt sich zum Verschwinden bringen, wenn in die Lage mit dem Radius r eine Spule von der Selbstinduktion L eingeschaltet wird, so daß

$$(b) \quad D = -L \frac{dJ}{dt}$$

ist. J bedeutet die Stromstärke in der Spule und der betreffenden Drahtlage. Beträgt der Querschnitt derselben q qcm, so wird

$$(c) \quad J = qi \quad \text{und} \quad \frac{dJ}{dt} = q \frac{di}{dt}.$$

Aus Gleichung (a), (b) und (c) folgt schließlich für die Größe der einzuschaltenden Selbstinduktion:

$$L = \frac{\pi l r^2}{2q} \text{ cm} = \frac{\pi l r^2}{2q} 10^{-9} \text{ Henry}.$$

Die Größen l , q und r sind in Zentimetern auszudrücken. Die elektromotorische Gegenkraft infolge des Ohmschen Widerstandes besitzt in allen Schichten den identischen Wert ilw , ist daher ohne Einfluß auf die Werte von D und L . Die große Einfachheit der Gleichung für L ist für die technische Anwendung von großem Vorteil.

Der Widerstand der Spulen muß so berechnet werden, daß sein Einfluß auf die Kompensation verschwindet. Um

1) Auch bei sehr nahe am Hinleiter verlaufender Rückleitung ist Kompensation des Skineffektes auf die angegebene Weise möglich. Die Selbstinduktion der Spulen ist dann nur um wenige Prozente zu ändern.

das zu erreichen, ist entweder der Spulenwiderstand verschwindend klein im Vergleich zum Widerstand des zu kompensierenden Leiterstückes zu wählen, oder es ist in den Mittelleiter ein induktionsfreies Drahtstück einzuschalten und der Widerstand W der Spulen und des in den Mittelleiter eingeschalteten Drahtstückes so zu bemessen, daß das Produkt $i q W$ für alle Spulen und das Drahtstück gleich groß ist. Die Widerstandsglieder werden dann, wie oben, aus den Gleichungen verschwinden.

Da die Kenntnis der Periode zur Berechnung der elektrischen Konstanten der Spulen unnötig ist (di/dt hob sich beim Vergleich von (a) und (b) heraus), so gilt die *Kompensation für alle Perioden*.

Kupferersparnis bei Verwendung oben beschriebener Spulen.

Der durch den Skineffekt modifizierte Ohmsche Widerstand w' berechnet sich nach der Stefanschen Reihe für einen 2,5 cm starken Leiter bei 200 Perioden zu

$$w' = w \cdot 2,192.$$

In einem Kabel ohne Skineffekt ist aber $w' = w$. Man spart also bei Anwendung der oben beschriebenen Spulen bereits in einem Leiter von nur 2,5 cm Durchmesser 54,5 Proz., also über die Hälfte Kupfer.

Diese Ersparnis wächst, wie die Stefansche Formel für w' zeigt, sehr schnell annähernd quadratisch mit der Periode an.

Die Menge des für die Spulen verwandten Kupfers, die gegenüber so großen Ersparnissen natürlich nicht in Frage kommt, kann noch dadurch herabgedrückt werden, daß man die Spulen auf einen gemeinsamen Kern wickelt und so die gegenseitige Induktion ausnutzt.

Experimenteller Teil.

Um die Theorie durch Messungen zu bestätigen, wurde zunächst ein Kabel hergestellt. Seine Ausmaße sind folgende: Es ist 30 m lang, hat einen Durchmesser von 13,6 mm und besteht aus 47 Kupferdrähten von je 1,5 mm Durchmesser. Die einzelnen Lagen bestehen aus 8, 16 und 22 Drähten,

die auf einen Mittelleiter aufgeseilt sind. Ihre Abstände, gemessen von Mitte des Mittelleiters bis Mitte der Drähte der Lagen sind 2,6 bez. 4,3 und 6,1 mm. Die einzelnen Lagen wurden, da merkliche Querspannungen zu erwarten waren, durch Bandbewicklung voneinander isoliert.

Zu den zugehörigen Spulen wurde, um Spulen- und Skin-effekt zu vermeiden, aus Kupferdraht geflochtenes Band benutzt. In die Spulen versenkbare Gläschen mit Ferrum reductum dienten zur Feineinstellung.

Ihre Selbstinduktion wurde nach der angegebenen Formel

$$L = \frac{\pi r^2}{2 q}$$

berechnet. Der in dieser Formel vorkommende Querschnitt der Lage wurde praktisch aus

$$q = \text{Gesamtquerschnitt} \frac{\text{Drahtzahl in der Lage}}{\text{Gesamtdrahtzahl}} = \pi R^2 \frac{n}{N}$$

berechnet. Die Formel für L erhielt dann die handliche Form:

$$L = \frac{l N}{2 R^2} \frac{r^2}{n},$$

worin l die Länge, R der Kabelradius, r der Radius der Lage, N die Gesamtdrahtzahl, n die Drahtzahl in der Lage ist. Für das vorliegende Versuchskabel war

$$\frac{l N}{2 R^2} = \frac{3000 \cdot 47}{2 \cdot 0,61^2} \text{ cm} = 152\,400 \text{ cm},$$

also

$$L_1 = 152\,400 \frac{0,26^2}{8} = 1284 \text{ cm},$$

$$L_2 = 152\,400 \frac{0,43^2}{16} = 1764 \text{ cm},$$

$$L_3 = 152\,400 \frac{0,61^2}{22} = 2674 \text{ cm}.$$

Ein Kupferleiter von denselben Dimensionen würde hier-nach bei einer Länge von 10 km Spulen erfordern, deren größte eine Selbstinduktion von 0,891 Milli-Henry besitzt, also immer noch aus nur wenigen Windungen besteht.

Der Widerstand der Spulen wurde sehr klein gewählt

und außerdem so abgeglichen, daß sich die Widerstände der einzelnen Spulen wie die der zugehörigen Lagen verhielten.

Diese Spulen konnten durch Quecksilberkontakte leicht ein- und ausgeschaltet werden, so daß die Messungen am kompensierten und nichtkompensierten Kabel rasch hintereinander ausführbar waren.

Zum Messen des Skineffektes diente die nachstehende skizzierte Brückenkombination (Fig. 3). Um die Verhältnisse von Selbstinduktion *und* Widerstand variieren zu können, war außer Schleifkontakt *C* auf dem Brückendraht noch ein zweiter *C'*, auf einem dicken Manganindraht verschiebbar, zum Einstellen des Widerstandsverhältnisses da.

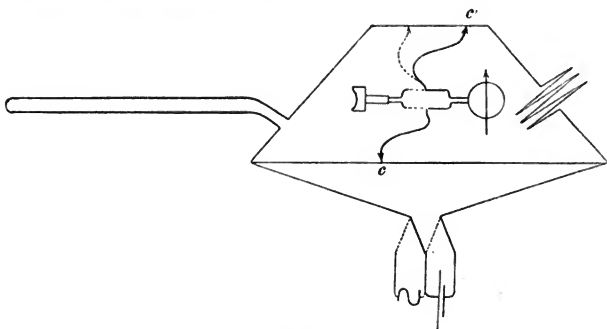


Fig. 3.

Zunächst wurde die Brücke mit Wechselstrom von 1250 Wechsel pro Sekunde betrieben und durch Verschieben beider Kontakte das Telefon zum Schweigen gebracht. Dann wurde an Stelle der Wechselstromsirene eine Gleichstromquelle, für das Telefon ein Galvanometer eingeschaltet, und durch Verschieben von *C'* auf Stromlosigkeit in der Brücke eingestellt. *C'* mußte dabei nach der Seite des Selbstinduktionsnormales hin verschoben werden. Die hierdurch bedingte Widerstandserhöhung auf der Seite des Kabels entspricht der Erhöhung des Ohmschen Widerstandes durch den Skineffekt. Sie besteht aus dem zugeschalteten Widerstand *w* und dem

Äquivalent des auf der anderen Seite ausgeschalteten w , nämlich $w \times$ Brückenverhältnis ($w(a/b)$), beträgt also insgesamt:

$$W = w \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

Mit der beschriebenen Meßvorrichtung konnte noch ein Skineffekt von $5 \cdot 10^{-5} \Omega$ gemessen werden. Die Messungen ergaben, daß 78 Proz. des Skineffekts kompensiert waren. Es blieb eine Widerstandserhöhung von nur $92 \cdot 10^{-5} \Omega$ übrig.

Um einen weiteren Vergleich mit der Theorie zu bekommen, wurde die Selbstinduktion der größten Spule durch Verschieben des Eisenkerns verstellt und mit Hilfe einer Reihe von Skineffektmessungen experimentell auf das Optimum der Kompensation eingestellt. Ihre Selbstinduktion betrug dann 2580 cm, während die Berechnung einen ca. 3 Proz. höheren Wert, 2674 cm, ergibt, wie bei Nichtberücksichtigung des verhältnismäßig starken Dralles zu erwarten war. Eine gleiche Prüfung der kleinen Spulen in der ersten und zweiten Drahtlage war nicht ausführbar, da hierzu das Kabel zu kurz war.

Die Messungen sind als gute Bestätigungen der Theorie zu betrachten, besonders wenn man bedenkt, daß in den Spulen, den massiven Teilen der Brücke und der Zuleitungen eine Summe geringfügiger Wirbelstromverluste zu finden ist, die gegen die kleinen Effekte des sehr kurzen Versuchsseiles schon wesentlich in Betracht kommen, bei längeren Leitungen aber nicht zu befürchten sind.

Eine absolut vollständige Beseitigung des Skineffektes ist auch theoretisch nicht zu erwarten, da der der Berechnung zugrunde liegende Idealfall eines homogen erfüllten Querschnittes nicht realisiert ist. Außerdem bewirken Querspannungen Kapazitätsströme zwischen den verschiedenen voneinander isolierten Schichten. Doch läßt sich zeigen, daß die hierdurch verursachten Störungen nur klein sein können. Die erreichte Beseitigung des Skineffektes ist ein weiterer Schritt auf dem Wege, die Vorteile höherer Perioden für die Technik nutzbar zu machen.

Die Spulensätze behalten ihre Eigenschaft, den Skineffekt zu beseitigen, auch wenn man die Selbstinduktion aller Spulen um den gleichen Betrag vermehrt. Denn es kommt ja nur

auf die Differenz der elektromotorischen Gegenkraft in den einzelnen Lagen an. Man ist dadurch in den Stand gesetzt, in einem Leiter durch dieselben Spulen, die man nach Pupin zur Beseitigung der schädlichen Wirkung der Kapazität einschaltet, zugleich den Skineffekt zu eliminieren. Man erreicht dies, indem man die Wicklung dieser Spulen in so viel Teile zerlegt, als der Leiter Lagen hat, und die Windungszahlen dieser Teilsulen so bemißt, daß die Unterschiede der Selbstinduktion der verschiedenen Lagen des Leiters ausgeglichen werden.

Göttingen, Physik.-chem. Institut d. Universität.

(Eingegangen 22. Januar 1907.)

**10. Über die Gültigkeitsgrenze des Satzes
vom thermodynamischen Gleichgewicht und über
die Möglichkeit einer neuen Bestimmung der
Elementarquantä; von A. Einstein.**

Der Zustand eines physikalischen Systems sei im Sinne der Thermodynamik bestimmt durch die Parameter λ , μ etc. (z. B. Anzeige eines Thermometers, Länge oder Volumen eines Körpers, Substanzmenge einer gewissen Art in einer Phase). Ist das System mit anderen Systemen nicht in Wechselwirkung, was wir annehmen, so wird nach der Thermodynamik Gleichgewicht bei bestimmten Werten λ_0 , μ_0 etc. der Parameter stattfinden, für welche Werte die Entropie S des Systems ein Maximum ist. Nach der molekularen Theorie der Wärme jedoch ist dies nicht genau, sondern nur angenähert richtig; nach dieser Theorie besitzt der Parameter λ auch bei Temperaturgleichgewicht keinen konstanten Wert, sondern einen unregelmäßig schwankenden, der sich von λ_0 allerdings nur äußerst selten beträchtlich entfernt.

Die theoretische Untersuchung des statistischen Gesetzes, welchem diese Schwankungen unterworfen sind, scheint auf den ersten Blick bestimmte Festsetzungen in betreff des anzuwendenden molekularen Bildes zu erfordern. Dies ist jedoch nicht der Fall. Es genügt vielmehr im wesentlichen, die bekannte Boltzmannsche Beziehung anzuwenden, welche die Entropie S mit der statistischen Wahrscheinlichkeit eines Zustandes verbindet. Diese Beziehung lautet bekanntlich

$$S = \frac{R}{N} \lg W,$$

wobei R die Konstante der Gasgleichung und N die Anzahl der Moleküle in einem Grammäquivalent bedeutet.

Wir fassen einen Zustand des Systems ins Auge, in welchem der Parameter λ den von λ_0 sehr wenig abweichenden Wert $\lambda_0 + \epsilon$ besitzt. Um den Parameter λ auf umkehrbarem Wege vom Werte λ_0 zum Werte λ bei konstanter Energie E

zu bringen, wird man eine Arbeit A dem System zuführen und die entsprechende Wärmemenge dem System entziehen müssen. Nach thermodynamischen Beziehungen ist:

$$A = \int dE - \int T dS,$$

oder, da die betrachtete Änderung unendlich klein und $\int dE = 0$ ist:

$$A = -T(S - S_0).$$

Andererseits ist aber nach dem Zusammenhang zwischen Entropie und Zustandswahrscheinlichkeit:

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg \left(\frac{W}{W_0} \right).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$A = -\frac{RT}{N} \lg \frac{W}{W_0}$$

oder

$$W = W_0 e^{-\frac{N}{RT} A}.$$

Dies Resultat involviert eine gewisse Ungenauigkeit, indem man ja eigentlich nicht von der Wahrscheinlichkeit eines *Zustandes*, sondern nur von der Wahrscheinlichkeit eines *Zustandsgebietes* reden kann. Schreiben wir statt der gefundenen Gleichung

$$dW = \text{konst. } e^{-\frac{N}{RT} A} d\lambda,$$

so ist das letztere Gesetz ein exaktes. Die Willkür, welche darin liegt, daß wir das Differential von λ und nicht das Differential irgendeiner Funktion von λ in die Gleichung eingesetzt haben, wird auf unser Resultat nicht von Einfluß sein.

Wir setzen nun $\lambda = \lambda_0 + \epsilon$ und beschränken uns auf den Fall, daß A nach positiven Potenzen von ϵ entwickelbar ist, und daß nur das erste nicht verschwindende Glied dieser Entwicklung zum Werte des Exponenten merklich beiträgt bei solchen Werten von ϵ , für welche die Exponentialfunktion noch merklich von Null verschieden ist. Wir setzen also $A = a\epsilon^2$ und erhalten:

$$dW = \text{konst. } e^{-\frac{N}{RT} a\epsilon^2} d\epsilon.$$

Es gilt also in diesem Falle für die Abweichungen ϵ das Gesetz der zufälligen Fehler. Für den Mittelwert der Arbeit A erhält man den Wert:

$$A = \frac{1}{2} \frac{R}{N} T.$$

Das Quadrat der Schwankung ϵ eines Parameters λ ist also im Mittel so groß, daß die äußere Arbeit A , welche man bei strenger Gültigkeit der Thermodynamik anwenden müßte, um den Parameter λ bei konstanter Energie des Systems von λ_0 auf $\lambda^0 + \sqrt{\epsilon^2}$ zu verändern, gleich $\frac{1}{2} \frac{R}{N} T$ ist (also gleich dem dritten Teil der mittleren kinetischen Energie eines Atoms).

Führt man für R und N die Zahlenwerte ein, so erhält man angenähert:

$$A = 10^{-16} T.$$

Wir wollen nun das gefundene Resultat auf einen kurz geschlossenen Kondensator von der (elektrostatisch gemessenen) Kapazität c anwenden. Ist $\sqrt{p^2}$ die Spannung (elektrostatisch), welche der Kondensator im Mittel infolge der molekularen Unordnung annimmt, so ist

$$A = \frac{1}{2} c \bar{p^2} = 10^{-16} T.$$

Wir nehmen an, der Kondensator sei ein Luftkondensator und er bestehe aus zwei ineinandergeschobenen Plattensystemen von je 30 Platten. Jede Platte habe von den benachbarten des anderen Systems im Mittel den Abstand 1 mm. Die Größe der Platten sei 100 cm². Die Kapazität c ist dann ca. 5000. Für gewöhnliche Temperatur erhält man dann

$$\sqrt{p_{\text{stat.}}^2} = 3,4 \cdot 10^{-9}.$$

In Volt gemessen erhält man

$$\sqrt{p_{\text{volt}}^2} = 10^{-6}.$$

Denkt man sich die beiden Plattensysteme relativ zueinander beweglich, so daß sie vollständig auseinander geschoben werden können, so kann man erzielen, daß die Kapazität nach dem Auseinanderschieben von der Größenordnung 10 ist.

Nennt man π die Potentialdifferenz, welche durch das Auseinanderschieben aus p entsteht, so hat man

$$\sqrt{\pi^2} = 10^{-6} \cdot \frac{5000}{10} = 0,0005 \text{ Volt.}$$

Schließt man also den Kondensator bei zusammengeschobenen Plattensystemen kurz, und schiebt man dann, nachdem die Verbindung unterbrochen ist, die Plattensysteme auseinander, so erhält man zwischen den Plattensystemen Spannungsdifferenzen von der Größenordnung eines halben Millivolt.

Es scheint mir nicht ausgeschlossen zu sein, daß diese Spannungsdifferenzen der Messung zugänglich sind. Falls man nämlich Metallteile elektrisch verbinden und trennen kann, ohne daß hierbei noch andere *unregelmäßige* Potentialdifferenzen von gleicher Größenordnung wie die soeben berechneten auftreten, so muß man durch Kombination des obigen Plattenkondensators mit einem Multiplikator zum Ziele gelangen können. Es wäre dann ein der Brownschen Bewegung verwandtes Phänomen auf dem Gebiete der Elektrizität gegeben, daß zur Ermittlung der Größe N benutzt werden könnte.

Bern, Dezember 1906.

(Eingegangen 12. Dezember 1906.)

**11. Eine Bemerkung
über die Beziehung zwischen der absoluten
Temperatur und der kinetischen Energie eines
thermodynamischen Systems;
von N. Schiller.**

Seitdem H. v. Helmholtz in seinen berühmten „Prinzipien der Statik monozyklischer Systeme“¹⁾ die Bedingungen aufgestellt hatte, unter denen die lebendige Kraft eines monozyklischen Systems als integrierender Nenner auftreten kann, wurden die ähnlichen Bedingungen in bezug auf thermodynamische Systeme meines Wissens nicht gehörig in Betracht genommen. Daraus erklärt sich die bestehende stillschweigende, aber unbegründete Annahme: die lebendige Kraft der inneren Bewegung sei in allen Körpern sehr wahrscheinlich der absoluten Temperatur proportional, wovon auch l. c. erwähnt wurde.

Eine einfache Rechnung läßt aber ersehen, daß die lebendige Kraft eines thermodynamischen Systems nur in Ausnahmefällen als integrierender Nenner der dem System zugeführten Wärmemenge auftreten kann.

Man stelle sich ein thermodynamisches System vor, dessen Zustände durch die Werte der absoluten Temperatur θ und der übrigen thermodynamischen Parameter $v_1, v_2, \dots v_n$ angegeben werden. Die Arbeit dL der äußeren das Gleichgewicht haltenden Kräfte sei in der Form

$$(1) \quad -dL = \sum_{i=1}^{i=n} p_i dv_i$$

ausgedrückt, wobei $p_1, p_2 \dots p_n$ als gegebene Funktionen von θ und $v_1, v_2 \dots v_n$ zu betrachten sind. Die dem System zuzuführende Wärme sei in der Form dargestellt:

$$(2) \quad dQ = c d\theta + \sum_{i=1}^{i=n} l_i dv_i = \theta dS,$$

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. B. 3, p. 149. 1895.

Ist nun T ein integrierender Nenner des Differentialpolynoms dQ , d. h. soll der Ausdruck

$$(9) \quad \frac{\theta dS}{T}$$

ein vollständiges Differential darstellen, so müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$(10) \quad \theta \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial S}{\partial v_i} - \frac{\partial T}{\partial v_i} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) = T \frac{\partial S}{\partial v_i}$$

von $i = 1$ bis $i = n$

und

$$(11) \quad \frac{\partial T}{\partial v_i} \frac{\partial S}{\partial v_j} = \frac{\partial T}{\partial v_j} \frac{\partial S}{\partial v_i}$$

von $i = 1, j = n$ bis $i = n, j = 1$.

Die Gleichung (10) läßt sich infolge der Gleichung (7) in

$$(12) \quad -\theta \frac{\partial(F - \Pi)}{\partial v_i} \frac{\partial S}{\partial \theta} = (\theta S + F - \Pi) \frac{\partial S}{\partial v_i}$$

verwandeln. Differenziert man die erhaltene Gleichung (12) nach θ und beachtet man, daß $\partial \Pi / \partial \theta = 0$ und $\partial F / \partial \theta = -S$, so erhält man:

$$(13) \quad -\frac{\partial(F - \Pi)}{\partial v_i} \left(\theta \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} + \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) = (\theta S + F - \Pi) \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial v_i}.$$

Es ergibt sich aus den beiden Gleichungen (12) und (13):

$$(14) \quad \frac{\theta \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} + \frac{\partial S}{\partial \theta}}{\theta \frac{\partial S}{\partial \theta}} = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial v_i} \right)}{\frac{\partial S}{\partial v_i}}$$

oder

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \lg \left(\theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \lg \left(\frac{\partial S}{\partial v_i} \right),$$

woraus folgt, daß

$$(16) \quad \frac{\partial S}{\partial v_i} = \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial v_i}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial p_i}{\partial \theta} = c \frac{\partial \psi}{\partial v_i}$$

gesetzt werden kann, wobei ψ eine willkürliche Funktion von $v_1, v_2, \dots, v_n$ bezeichnet.

Man ersieht also, daß die kinetische Energie T nur dann zum integrierenden Nenner werden kann, wenn die Funktionen $p_1, p_2, \dots, p_n, c$ und somit die daraus berechnete Funktion S die Bedingung (16) erfüllen.

Aus der Gleichung (16) folgt, daß die Funktion S folgende Gestalt haben muß:

$$(17) \quad S = \varphi (\lg \theta + \psi),$$

wobei φ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Es muß deshalb auch weiter

$$(18) \quad F = - \int S d\theta = - \int \varphi (\lg \theta + \psi) d\theta + f$$

sein, wobei f nur von $v_1, v_2, \dots v_n$ abhängt. Setzt man aber voraus, daß bei $\theta = 0$ $F_0 = II$ wird, so erhält man

$$(19) \quad F = - \int_0^\theta \varphi (\lg \theta + \psi) d\theta + II$$

und folglich

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} p_i &= - \frac{\partial F}{\partial v_i} = \frac{\partial \psi}{\partial v_i} \int_0^\theta \dot{\varphi} (\lg \theta + \psi) d\theta - \frac{\partial II}{\partial v_i} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial v_i} \left(\theta \varphi - \int_0^\theta \varphi d\theta \right) - \frac{\partial II}{\partial v_i}. \end{aligned} \right.$$

Soll die Funktion T von den Parametern $v_1, v_2, \dots v_n$ unabhängig und der absoluten Temperatur θ proportional sein, so muß nach den Formeln (8) und (7)

$$(21) \quad \gamma \theta = \theta S + F - II = - \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + F - II$$

sich ergeben, wobei γ eine Konstante bezeichnet. Daraus folgt:

$$(22) \quad F = - \gamma \theta \lg \theta - \theta \chi + II,$$

wobei χ eine willkürliche Funktion von $v_1, v_2, \dots v_n$ bezeichnet. Denselben Ausdruck erhält man, wenn man $\varphi(x) = \gamma x$ und $\chi = \gamma(\psi - 1)$ in (19) setzt.

Bekanntlich wird in jedem einfachen monozyklischen System die kinetische Energie zum integrierenden Nenner. Dieselbe Eigenschaft hat die kinetische Energie zusammengesetzter monozyklischer Systeme bei den bestimmten Bedingungen der Koppelung, z. B. wenn die verschiedenen zyklischen Geschwindigkeiten voneinander linear abhängen. Durch die genannten monozyklischen Systeme können also nur diejenigen thermodynamischen Systeme dargestellt werden, die die Bedingung (16) erfüllen.

Beispiele.

I. Genügt für Gase die van der Waalssche Zustandsgleichung oder überhaupt eine Gleichung von der Form:

$$(23) \quad p = R \theta F(v) + f(v),$$

so darf man c als konstant betrachten (da $\partial^2 p / \partial^2 \theta^2 = 0$ ist) und $T = c \theta$ setzen.

II. Im Falle der Clausiusschen oder der aus den Joule-Thomson'schen Abkühlungsversuchen hergeleiteten Zustandsgleichung¹⁾ hat man beziehungsweise:

$$(24) \quad p = \frac{R \theta}{v - b} - \frac{a}{\theta(v + \beta)^2}$$

und auch

$$(25) \quad p = \frac{R \theta}{v - \gamma \theta} - \frac{a}{\theta(v + \beta)^2}.$$

Daraus erhält man für beide Fälle:

$$(24') \quad \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{R}{v - b} + \frac{a}{\theta^2(v + \beta)^2},$$

$$(25') \quad \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{R}{v - \gamma \theta} + \frac{\gamma R \theta}{(v - \gamma \theta)^2} + \frac{a}{\theta^2(v + \beta)^2}$$

und nach der Formel (5):

$$(24'') \quad \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{2a}{\theta^2} \left(\frac{1}{v + \beta} - \frac{1}{v_0 + \beta} \right) + c_0,$$

$$(25'') \quad \left\{ \begin{aligned} \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} &= 2 R \theta \gamma \left(\frac{1}{v_0 - \gamma \theta} - \frac{1}{v - \gamma \theta} \right) \\ &\quad - R \theta^2 \gamma^2 \left(\frac{1}{(v_0 - \gamma \theta)^2} - \frac{1}{(v - \gamma \theta)^2} \right) \\ &\quad + \frac{2a}{\theta^2} \left(\frac{1}{v + \beta} - \frac{1}{v_0 + \beta} \right) + c_0. \end{aligned} \right.$$

Weder die Ausdrücke (24') und (24'') noch die (25') und (25'') erfüllen die Bedingung (16) und somit kann in diesen Fällen die kinetische Energie nicht zum integrierenden Nenner werden.

III. Für den Fall eines festen oder flüssigen zusammendrückbaren Körpers darf man

$$(26) \quad \frac{v - v_0}{v_0} = - \frac{p - p_0}{k} + \beta(\theta - \theta_0)$$

1) N. Schiller, Wied. Ann. 40. p. 154. 1890.

setzen, wobei k und β bez. die Koeffizienten der elastischen und thermischen Volumenänderung bezeichnen. Die Wärmekapazität c und die Koeffizienten k und β dürfen als konstant angenommen werden. Man erhält:

$$(27) \quad \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \beta k, \quad S = \beta k (v - v_0) + c \lg \theta + \alpha,$$

$$(28) \quad U = \frac{k}{2} \frac{(v - v_0)^2}{v_0} + \beta k \theta_0 (v - v_0) - p_0 (v - v_0) + c \theta + \alpha',$$

$$(29) \quad T = c \theta.$$

Die Bedingung (16) wird also erfüllt.

IV. Für ein aus einer Flüssigkeit und ihrem gesättigten Dampf zusammengestelltes thermodynamisches System hat man:

$$(30) \quad \frac{\frac{\partial S}{\partial v}}{\theta \frac{\partial S}{\partial \theta}} = \frac{\frac{\partial p}{\partial \theta}}{\theta \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} (v - v_0) + c_0},$$

wobei p nur von θ abhängt. Die rechte Seite der Gleichung (30) kann nicht als eine Funktion von v allein dargestellt werden und somit wird die Bedingung (16) nicht erfüllt.

St. Petersburg, Dezember 1906.

(Eingegangen 27. Dezember 1906.)

**12. Elektromagnetische Grundgleichungen in
bivektorieller Behandlung;
von Ludwig Silberstein.**

Unter einem *Bivektor* verstehe ich, nach dem Vorgange von R. W. Hamilton¹⁾, die komplexe Zusammenfassung zweier gewöhnlicher Vektoren R_1, R_2 zu

$$(1) \quad \varrho = R_1 + i R_2, \quad \text{wo } i = \sqrt{-1}.$$

Sonst werde ich mich aber nicht der ursprünglichen, aus dem Quaternionenkalkül fließenden Hamiltonschen Behandlung der Vektoren, sondern dem Heavisideschen Schema der vektoriellen Algebra und Analysis²⁾ anschließen, welches bekanntlich den Bedürfnissen des Physikers besonders gut angepaßt ist und welches sich überdies in letzterer Zeit auch auf dem Kontinente einer fortwährend wachsenden Verbreitung erfreut.

Was die gewöhnlichen Vektoren anbelangt, so werde ich mich der Heavisideschen Bezeichnungsweise bedienen, also das skalare Produkt zweier Vektoren A, B einfach mit AB , ihr Vektorprodukt aber mit VAB bezeichnen, und sonst auch Symbole wie *curl*, *div*, ∇ und ∇^2 in üblicher Weise anwenden.

Was aber die *Bivektoren* anbelangt, so werden uns hier, in rein theoretischer Hinsicht, nur einige wenige Bemerkungen nötig sein.

Zur Unterscheidung von gewöhnlichen Vektoren (oder gar Skalaren) werde ich die Bivektoren durchweg mit *griechischen* Buchstaben bezeichnen. Unter Zugrundelegung der Form (1) werde ich R_1 den *ersten*, R_2 aber den *zweiten Bestandteil* des Bivektors ϱ nennen.

Zwei Bivektoren sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre Bestandteile paarweise untereinander gleich sind, d. h. $\varrho = \varrho'$ bedeutet soviel wie $R_1 = R_1', R_2 = R_2'$ und umgekehrt.

1) Vgl. seine „Elements of Quaternions“.

2) O. Heaviside, *Electromagnetic Theory* 1. Chapt. III.

Da ein jeder Bivektor im Grunde genommen nichts anderes ist als eine Summe von gewöhnlichen Vektoren mit gewöhnlichen *skalaren* (wenn auch teilweise imaginären) Koeffizienten, so leuchtet es ohne weiteres ein, daß sämtliche fundamentale Operationen der Vektorenalgebra und -analysis sofort auf die Bivektoren übertragen werden können. So bedarf z. B. die Summe $\rho + \sigma = R_1 + S_1 + i(R_2 + S_2)$ oder die Differenz $\rho - \sigma$ zweier Bivektoren durchaus keiner Erläuterung; auch sind die Eigenschaften $\rho + \sigma = \sigma + \rho$, $\rho + (\sigma + \tau) = (\rho + \sigma) + \tau$ etc. ohne weiteres klar. Das skalare Produkt zweier Bivektoren ρ, σ kann, im Sinne der obigen Bemerkung, sofort zu

$$(2) \quad \rho \sigma = (R_1 + i R_2)(S_1 + i S_2) = R_1 S_1 - R_2 S_2 + i(R_1 S_2 + R_2 S_1)$$

entwickelt werden, und es ist auch $\rho \sigma = \sigma \rho$, sowie $\rho(\sigma + \tau) = \rho \sigma + \rho \tau$, wie für gewöhnliche Vektoren. Ähnlich hat man auch für das Vektorprodukt zweier Bivektoren:

$$(3) \quad \nabla \rho \sigma = \nabla R_1 S_1 - \nabla R_2 S_2 + i(\nabla R_1 S_2 + \nabla R_2 S_1),$$

und da $\nabla S_1 R_1 = -\nabla R_1 S_1$ etc., so ist auch $\nabla \sigma \rho = -\nabla \rho \sigma$; es erhellt ferner, daß $\nabla \rho(\sigma + \tau) = \nabla \rho \sigma + \nabla \rho \tau$, wie für gewöhnliche Vektoren; endlich bemerke man, daß $\rho \sigma$ ein (zwar komplexer) *Skalar*, wie etwa $R_1 S_1$, während $\nabla \rho \sigma$, ebenso wie ρ oder σ selbst, ein *Bivektor* ist. Die Bildung und Untersuchung von $\tau \nabla \rho \sigma$, $\nabla \tau \nabla \rho \sigma$ und dergl. überlasse ich dem Leser.

Was differentielle Operationen anbelangt, daß also z. B.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial R_1}{\partial t} + i \frac{\partial R_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho + \sigma) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \sigma) = \rho \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ etc.},$$

$$\operatorname{div}(\rho + \sigma) = \operatorname{div} \rho + \operatorname{div} \sigma, \quad \operatorname{curl}(\rho + \sigma) = \operatorname{curl} \rho + \operatorname{curl} \sigma, \dots$$

ist, bedarf wohl auch kaum einer Erläuterung.

Ich werde also hier nur noch zwei Begriffe definieren und einige ihrer Eigenschaften angeben, welche uns für die elektromagnetischen Anwendungen von Nutzen sein werden:

1. Ist $\rho = R_1 + i R_2$ und $\rho' = R_1 - i R_2$, so nenne ich ρ und ρ' zueinander *konjugierte* Bivektoren; ich werde solche Gebilde immer mit demselben Buchstaben, *ohne* und *mit Akzent* bezeichnen.

2. Stehen die Bestandteile R_1, R_2 eines Bivektors ϱ aufeinander *senkrecht*, d. h. ist $R_1 R_2 = 0$, so nenne ich ϱ einen *orthogonalen* Bivektor, und sind noch im besonderen seine Bestandteile *Einheitsvektoren*, d. h. $R_1^2 = R_2^2 = 1$, so nenne ich ihn einen *fundamentalen*.

Nach diesen Definitionen findet man sofort, wegen (2) bez. (3), für jedes Paar *konjugierter Bivektoren*

$$(4) \quad \varrho \varrho' = R_1^2 + R_2^2,$$

$$(5) \quad \nabla \varrho \varrho' = 2 i \nabla R_2 R_1,$$

ferner für einen beliebigen *orthogonalen* Bivektor $\omega = O_1 + i O_2$ ($O_1 O_2 = 0$):

$$(6) \quad \omega \omega \quad \text{oder} \quad \omega^2 = O_1^2 - O_2^2,$$

übrigens für *jeden* Bivektor:

$$\nabla \varrho \varrho = i \nabla R_1 R_2 + i \nabla R_2 R_1 = 0 \quad (\text{wie für gewöhnliche Vektoren})$$

und schließlich für einen *fundamentalen* Bivektor $\varphi = a + i b$ ($a b = 0$, wo a, b *Einheitsvektoren* sind: $a^2 = b^2 = 1$):

$$(7) \quad \varphi^2 = 0.$$

Ist ein Bivektor orthogonal oder gar fundamental, so besitzt offenbar der zu ihm konjugierte Bivektor die nämliche Eigenschaft.

Wählt man noch einen dritten zur Ebene des φ normalen Einheitsvektor c , und zwar so, daß $\nabla a b = c$ ist, daß also a, b, c ein rechtshändiges System bilden, so hat man $\nabla \varphi c = -b + i a$, oder

$$(8) \quad \nabla \varphi c = i \varphi,$$

was man leicht in Worte kleiden kann.

Nach diesen knappen Bemerkungen allgemeinen Charakters zu den angesagten elektromagnetischen Anwendungen übergehend, bezeichne ich die elektrische Kraft, als gewöhnlichen Vektor, mit E_1 und die magnetische Kraft, als ebensolchen Vektor, mit E_2 , setze

$$(9) \quad E_1 + i E_2 = \eta$$

und nenne η den *elektromagnetischen Bivektor* des Feldes. Aus Gründen, die alsbald einleuchten werden, beschränke ich mich hier auf die Betrachtung des *leeren Raumes*. (Man könnte übrigens auch von irgend einem isotropen Dielektrikum mit

gleicher Dielektrizitätskonstanten und Permeabilität sprechen; dies würde aber nur eine rein formale Verallgemeinerung bedeuten.)

Setzt man noch, der kürzeren Schreibweise wegen, die „kritische Geschwindigkeit“ = 1, und bezeichnet mit t die Zeit, so lauten die Maxwellschen Differentialgleichungen in gewöhnlicher vektorieller Form:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \text{curl } E_2, & \frac{\partial E_2}{\partial t} = -\text{curl } E_1, \\ \text{div } E_1 = 0, & \text{div } E_2 = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man nun die zweite dieser Gleichungen mit i und addiert sie zur ersten, so erhält man nach (9)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \text{curl}(E_2 - i E_1);$$

es ist aber $E_2 - i E_1 = -i(E_1 + i E_2) = -i \eta$; man erhält also das bemerkenswerte Resultat

$$(I) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -i \text{curl } \eta,$$

d. h. anstatt der beiden Hauptgleichungen ¹⁾ des Feldes mit gemischt auftretenden elektrischen und magnetischen Vektoren *nur eine Gleichung mit einer einzigen unbekannten Veränderlichen, nämlich dem elektromagnetischen Bivektor η* , und zwar ist diese Differentialgleichung, ebenso wie eine jede der ursprünglichen, von der *ersten Ordnung* in bezug auf die Zeit.

Ebenso können wir mit der 3. und 4. Gleichung (10) verfahren und also die beiden solenoidalen Nebenbedingungen in *eine einzige solenoidale Nebenbedingung* für den elektromagnetischen Bivektor zusammenziehen:

$$(II) \quad \text{div } \eta = 0.$$

Die Gleichungen (I), (II) vertreten vollständig die vier Gleichungen (10).

Es sei ferner η' der (zu η) *konjugierte elektromagnetische Bivektor*, d. h.

$$(11) \quad \eta' = E_1 - i E_2;$$

1) So nenne ich nämlich die beiden *ersten* Gleichungen (10), während ich die beiden letzten als *solenoidale Nebenbedingungen* bezeichne.

man erhält dann, auf ganz ähnlichem Wege wie oben, anstatt der beiden Maxwellschen Hauptgleichungen wiederum eine einzige bivectorielle Differentialgleichung, und zwar:

$$(I') \quad \frac{\partial \eta'}{\partial t} = i \cdot \text{curl } \eta'$$

und übrigens auch eine einzige Nebenbedingung:

$$(II') \quad \text{div } \eta' = 0.$$

Diese Gleichungen (I'), (II') sagen natürlich ganz dasselbe aus wie (I), (II); in ihrer *Zusammenstellung* sind aber *beide* Paare nicht ohne Interesse. (Man bemerke übrigens, daß $\frac{1}{2}(\eta + \eta') = E_1$, $\frac{1}{2i}(\eta - \eta') = E_2$ ist.) Jedenfalls aber *genügt* zur vollständigen Behandlung der in Frage stehenden Erscheinungen ein *einziger* Bivektor (mag es η oder η' sein), den man im ganzen Laufe einer diesbezüglichen Rechnung, prinzipiell genommen, nicht etwa in den elektrischen und den magnetischen Vektor zu zersplittern braucht. Dieser Umstand scheint mir auch den passendsten formalen Ausdruck für den physischen Tatbestand zu bilden: denn in jedem zeitlich veränderlichen Felde gesellen sich die elektrischen und magnetischen Kräfte unzertrennlich aneinander.

Das Nächstliegende wäre die Frage nach der *elektromagnetischen Energie* des Feldes. Bezeichnet man ihre räumliche *Dichte* mit e , d. h. setzt man

$$(12) \quad e = \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2),^1)$$

so kann man e in einfachster Weise durch das konjugierte elektromagnetische Paar η , η' ausdrücken; nach dem Muster der Formel (4) für solche Bivektoren erhält man nämlich unmittelbar:

$$(III) \quad e = \frac{1}{2} \eta \eta',$$

oder in Worten: *die Dichte der Feldenergie ist gleich dem halben skalaren Produkte der gegenseitig konjugierten elektromagnetischen Bivektoren.*

1) Bei der Wahl der von Heaviside sogenannten „rationalen Einheiten“ fällt der übliche, aber beschwerliche Faktor $1/4\pi$ weg; dieselbe Bemerkung gilt auch für den weiter unten folgenden Ausdruck des Energieflusses.

Um ferner den elektromagnetischen *Energiefluß* F , welcher (als gewöhnlicher Vektor) durch die Forderung

$$(13) \quad \frac{\partial e}{\partial t} = -\operatorname{div} F$$

definiert ist, zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichung (I), skalar mit η' , die Gleichung (I') ebenso mit η und addieren die Resultate; in dieser Weise folgt

$$\eta' \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \eta \eta' = i(\eta \operatorname{curl} \eta' - \eta' \operatorname{curl} \eta).$$

Es gilt nun für gewöhnliche Vektoren die bekannte Formel

$$\operatorname{div} V A B = B \operatorname{curl} A - A \operatorname{curl} B,$$

und diese läßt sich ohne weiteres auf Bivektoren ausdehnen, d. h. man hat auch

$$\operatorname{div} V \varrho \sigma = \sigma \operatorname{curl} \varrho - \varrho \operatorname{curl} \sigma,$$

was man übrigens sofort nach (3) verifizieren kann. Auf unseren Fall angewandt, gibt dies die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta \eta') = -i \operatorname{div} V \eta \eta',$$

also nach (III) und (13), abgesehen von einem additiven rein solenoidalen Vektor:

$$(IV) \quad F = \frac{i}{2} V \eta \eta',$$

oder in Worten: *der Energiefluß oder der „Poyntingsche Vektor“ ist gleich $\frac{1}{2}i$ mal dem Vektorprodukte der gegenseitig konjugierten elektromagnetischen Bivektoren.*

Man kann sich auch unmittelbar, nach Gleichung (5), überzeugen, daß (IV) mit dem üblichen Ausdruck des Energieflusses, nämlich mit $F = -V E_2 E_1 = +V E_1 E_2$, identisch ist.

Den Vergleich von (IV) mit (III) und die Einkleidung ihrer naheliegenden Zusammenstellung in Worte überlasse ich dem Leser.

Ist der elektromagnetische Bivektor für $t=0$, also etwa $\eta = \eta_0$, für den ganzen Raum gegeben, so ist hierdurch auf Grund der Differentialgleichung (I) der ganze Verlauf der elektromagnetischen Erscheinungen, wenigstens innerhalb einer Kontinuitätsepoche, gegeben. Die Durchführung des Integrationsprozesses in gegebenen speziellen Fällen gehört nicht zu dem

Thema dieser Abhandlung. Ich will also hier nur bemerken, daß man die symbolische Lösung von (I) ohne weiteres hinschreiben kann; man hat nämlich, indem man mit $\{\}$ einen zusammengesetzten Operator bezeichnet, und unter e die Basis der natürlichen Logarithmen versteht:

$$(V) \quad \eta_t = \{e^{-t \cdot \text{curl}}\} \eta_0 = \{\cos(t \cdot \text{curl}) - i \sin(t \cdot \text{curl})\} \eta_0,$$

was genau übereinstimmt mit den „symbolischen Integralen“, die in einer früheren Abhandlung¹⁾ auf einem viel umständlicheren Wege aus den beiden gewöhnlichen vektoriellen Gleichungen erhalten wurden. (Die Bedingung (II) braucht nicht besonders berücksichtigt zu werden, denn wegen $\text{div curl} = 0$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) folgt aus (V) $\text{div } \eta_t = \text{div } \eta_0$; ist also nur das anfängliche Feld gemäß (II) vorgeschrieben, so bleibt auch für alle Zeiten $\text{div } \eta_t = 0$; dies folgt übrigens ebenso einfach aus der Gleichung (I) selbst.) Den Nachdruck möchte ich übrigens nicht etwa auf (V), sondern vielmehr auf die Gleichungen (I) bis (IV) legen.

Reine elektromagnetische Wellen. — Wellen, die so benannt wurden, können als dadurch charakterisiert angesehen werden, daß die elektrische Kraft auf der magnetischen überall und immer *senkrecht* steht und daß in jedem Raumteil die eine Hälfte der Energie elektrisch, die andere magnetisch ist, d. h. also, daß (für das Vakuum) die Beziehungen $E_1^2 = E_2^2$ und $E_1 E_2 = 0$ bestehen. Nach der in der Einleitung gegebenen Definition und nach Gleichung (7) kann man dies kurz fassen, indem man sagt:

Für *reine* Wellen unterscheidet sich η von einem *fundamentalen* Bivektor nur durch einen reellen skalaren Faktor s :

$$(14) \quad \eta = s \varphi,$$

so daß also $\eta^2 = 0$ ist.

Daraus folgt auch $\eta(\partial \eta / \partial t) = 0$, oder nach (I) $\eta \text{curl } \eta = 0$.

Für den konjugierten elektromagnetischen Bivektor hat man in diesem Falle ebenfalls $\eta' = s \varphi'$, wo φ' zu φ konjugiert ist. Nach (8) und (14) hat man:

$$(15) \quad V \eta c = i \eta = i s \cdot \varphi,$$

während für η'

$$(15') \quad V \eta' c = -i \eta' = -i s \cdot \varphi'$$

1) L. Silberstein, Ann. d. Phys. 6. p. 373 ff. 1901.

ist, da die beiden Bestandteile von φ' ($a, -b$) mit c ein *linkshändiges* System bilden.

Zum Schluß will ich nur noch den Spezialfall *ebener* Wellen behandeln. In diesem Falle ist der fundamentale Bivektor φ , welcher zugleich die Wellenebene angibt, in Zeit und Raum konstant und nur der skalare Faktor s ist veränderlich. Man hat also $\partial \eta / \partial t = \varphi \cdot \partial s / \partial t$, also nach (I):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \varphi \frac{\partial s}{\partial t} = -i \operatorname{curl}(s \varphi).$$

Bezeichnet man die in Richtung der Wellennormale c skalar gemessenen Längen mit z , so ist, wegen $\partial/\partial x = 0$, $\partial/\partial y = 0$, der Hamiltonsche Operator ∇ gleich $c(\partial/\partial z)$; da nun ganz allgemein $\operatorname{curl} = V \nabla$ ist, so hat man

$$- \operatorname{curl}(s \varphi) = -V c \frac{\partial(s \varphi)}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial z} V \varphi c = \frac{\partial}{\partial z} V \eta c = i \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

[nach (15)], also:

$$(16) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \eta}{\partial z},$$

woraus als allgemeinstes Integral folgt

$$(17) \quad \eta = f(z - t),$$

wo f eine beliebige Funktion des Argumentes $z - t$ bedeutet; die Welle oder — wie man auch sagen könnte — der elektromagnetische Bivektor η pflanzt sich also in der Richtung c mit der Geschwindigkeit 1, d. h. mit der kritischen Geschwindigkeit fort. Wie man sich durch einen flüchtigen Vergleich von (15') mit (15), (I') mit (I) überzeugen kann, würde sich der *konjugierte* Bivektor η' in *gerade entgegengesetzter* Richtung fortpflanzen, wie es bekanntlich der Fall ist.

Warschau, im Dezember 1906.

(Eingegangen 3. Januar 1907.)

**13. Über die Mach-Lippmannsche Analogie
zum zweiten Hauptsatz;
von F. W. Adler.**

1. Mach¹⁾ und später unabhängig von ihm Lippmann²⁾ haben folgenden Kreisprozeß beschrieben:

Es sei A ein zum Potential V_1 elektrisch geladener Körper von sehr großer Kapazität, und B ein ebensolcher mit dem Potential V_2 . Eine Kugel k dehne sich in leitender Verbindung mit A (isopotentiell) vom Radius r_0 auf r_1 (vgl. Fig. 1) aus, wobei A entzogen wird, die Energie

$$W_1 = (r_1 - r_0) V_1^2.$$

Ferner finde eine weitere (adiabatische) Ausdehnung des isolierten k bis zum Radius r_2 und der Potentialabnahme auf V_2 statt. Hierbei ist

$$r_1 V_1 = r_2 V_2.$$

Es trete ferner eine (isopotentielle) Kontraktion auf r_3 in Verbindung mit B ein, bis die ganze von A aufgenommene Menge wieder an B abgegeben ist. Schließlich werde k wieder isoliert (adiabatisch) auf r_0 zusammengedrückt, so daß die Kugel bei der ursprünglichen Ladung wieder das ursprüngliche Potential erhält. Aus letzterer Bedingung folgt die Gleichung

$$r_0 V_1 = r_3 V_2.$$

Ferner folgt

$$(r_2 - r_3) V_2^2 = (r_1 - r_0) V_1 V_2.$$

Die an B abgegebene Energie ist aber

$$W_2 = (r_1 - r_0) V_1 V_2.$$

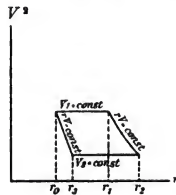


Fig. 1.

1) E. Mach, „Lotos“ (Febr. 1871), neu abgedr. in E. Mach, „Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit“ p. 54 (Prag, Calve 1872). Auch in E. Mach, „Prinzipien der Wärmelehre“, 2. Aufl., p. 330 ff. (Leipzig, J. A. Barth, 1900).

2) G. Lippmann, Compt. rend. 82. p. 1425. 1876.

Es besteht also, wie man sich durch Substitution leicht überzeugen kann, die Gleichung

$$-\frac{W'}{V_1} + W\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = 0,$$

wobei W' die verwandelte und W die übergeführte elektrische Energie bedeutet. Und ebenso

$$-\frac{W_1}{V_1} + \frac{W_2}{V_2} = 0,$$

wobei W_1 und W_2 die an den Isopotentiellen zu- bez. abgeführten elektrischen Energien bedeuten.

Für den ökonomischen Koeffizienten erhalten wir im Falle der Wärme

$$\frac{Q'}{Q + Q'} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

und bei analoger Bezeichnung ebenso im Falle der Elektrizität

$$\frac{W'}{W + W'} = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot 1)$$

2. Der — wie ich glaube — einzige Einwand gegen diese Analogie rührt von K. Schreber²⁾ her und scheint mir nicht stichhaltig. Schreber kommt bei der Berechnung der gesamten Änderung der (elektrischen) Eigenenergie der Kugel (Seifenblase) zu dem Resultat 0, welches sich natürlich bei *jedem* Kreisprozeß ergibt. Er sucht dann bei der Betrachtung eines speziellen Falles das Äquivalent der von höherem auf tieferes Potential übergeführten Elektrizität in einer Abnahme der Oberflächenenergie, die in Volumenenergie verwandelt würde. Da aber die Seifenblase in ihre ursprüngliche Gestalt zurückkehrt und *keine andere Quelle* von Oberflächenenergie da ist, können nur die elektrischen Energien in Betracht kommen, die *außer* für die Änderung der Eigenenergie den Reservoiren A und B entzogen bez. zugeführt werden.

3. Die Mach-Lippmannsche Analogie zeigt eine merkwürdige Unsymmetrie, die mir einer Erklärung zu bedürfen

1) Diese Darstellung ist unter Einfügung der Bezeichnungserklärung entnommen aus: E. Mach, Prinzipien der Wärmelehre, I. c. p. 330—331.

2) K. Schreber, „Die Energieverhältnisse beim Lippmannschen Kreisprozeß“, Mitt. aus dem naturwissenschaftl. Verein für Neupommern und Rügen 31. p. 94. 1899.

schien. Während nach ihr im zweiten Hauptsatz die Temperatur T dem Potential V entspricht:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \frac{W_1}{W_2} = \frac{V_1}{V_2},$$

entspricht in den Energieänderungen des ersten Hauptsatzes die Temperatur T dem *Quadrat* des Potentials V

$$cT, \quad CV^2.$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß diese Unsymmetrie daher rührt, daß, obwohl die Mach-Lippmannsche Betrachtung, soweit sie sich auf den elektrischen Kreisprozeß bezieht, einwandfrei ist, es doch nicht angängig ist, dieselbe in *direkte* Analogie zu dem aus Isothermen und Adiabaten bestehenden Kreisprozeß mit einem Gas zu setzen. Es soll gezeigt werden, daß die beiden Kreisprozesse Verschiedenheiten aufweisen, und daß es *nicht möglich ist, das elektrische Potential analog der Temperatur zu setzen*.

Auf einer anderen Analogie fußend, läßt sich aber tatsächlich ein dem thermodynamischen Prozeß mit einem Gas streng analoger Kreisprozeß finden, der dann auch ein widerspruchsfreies Resultat ergibt. Sodann soll noch gezeigt werden, welcher thermodynamische Prozeß dem Mach-Lippmannschen tatsächlich entspricht.

4. Betrachten wir den thermodynamischen Kreisprozeß mit einem *idealen Gas*, so finden wir folgenden Unterschied gegenüber der Mach-Lippmannschen Analogie. Beim thermodynamischen Kreisprozeß sind die *Isothermen gleichzeitig auch Kurven gleicher Eigenenergie*, und *alle* an denselben zugeführte Energie wird in Arbeit verwandelt. — Beim Mach-Lippmannschen Prozeß dagegen wächst bei der isopotentiellen Kurve die Eigenenergie proportional der Kapazität r , so daß nur ein Teil der zugeführten Energie in Arbeit verwandelt wird. Ein weiterer Unterschied ist, daß beim Prozeß mit einem Gas *die Arbeiten an den beiden Adiabaten die gleichen sind*, da sie den Änderungen der Eigenenergie zwischen zwei Kurven gleicher *Eigenenergie* entsprechen. Beim Mach-Lippmannschen Prozeß dagegen sind die Arbeiten an den Adiabaten *nicht* gleich, wie folgende einfache Rechnung zeigt. Die Abnahme der Eigenenergie E_1 auf der Adiabate $r_0 r_3$ ist:

$$E_1 = r_0 V_1^2 - r_3 V_2^2,$$

diejenige E_2 auf der Adiabate $r_1 r_2$:

$$E_2 = r_1 V_1^2 - r_2 V_2^2.$$

Nun ist das Verhältnis E_1/E_2 keineswegs $= 1$, wie beim Prozeß mit einem Gas, sondern mit Berücksichtigung, daß an den adiabatischen Kurven

$$r_0 V_1 = r_3 V_2$$

und

$$r_1 V_1 = r_2 V_2$$

ist, erhalten wir

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_0 V_1^2 - r_3 V_2^2}{r_1 V_1^2 - r_2 V_2^2} = \frac{r_0 V_1^2 - r_0 V_1 \cdot V_2}{r_1 V_1^2 - r_1 V_1 \cdot V_2} = \frac{r_0 V_1 (V_1 - V_2)}{r_1 V_1 (V_1 - V_2)} = \frac{r_0}{r_1}.$$

Das Verhältnis dieser Arbeiten ist also wesentlich von der Länge der isopotentiellen Kurve abhängig.

5. Die Analogie zum zweiten Hauptsatz läßt sich entsprechender durchführen, wenn wir das Potential V analog der Wurzel aus dem Druck $\sqrt{p}$ setzen und dementsprechend die elektrostatische Kapazität analog dem Volumen v . Unter diesen Voraussetzungen führen wir den folgenden Kreisprozeß aus: Die Kugel k dehne sich aus, während sie nacheinander in leitender Verbindung mit Körpern solcher Potentiale stehe, daß ihre Eigenenergie stets erhalten bleibt. Auf dieser „Kurve gleicher Energie“ ist aber

$$r V^2 = \text{konst.}$$

(Der praktischen Durchführung dieses idealen Falles stehen wieder dieselben Schwierigkeiten entgegen, wie dem idealen thermodynamischen Prozeß, bei dem eine unendliche stetige Reihe der äußeren Drucke erforderlich ist.) In der Fig. 2, in der dieser Kreisprozeß dargestellt ist, dehnt sich die Kugel k auf diese Weise von r_0 bis r_1 aus.

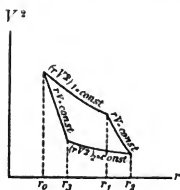


Fig. 2.

Alle auf dieser Kurve zugeführte Arbeit W_1 wird in Arbeit verwandelt. Darauf wird die Kugel von r_1 bis r_2 weiter ausgedehnt, ohne mit einem Re-

servoir in Verbindung zu sein (adiabatisch). Diese Kurven will ich, da die Elektrizitätsmenge konstant bleibt, *Kurven gleicher Menge* nennen.

Von r_2 werde sie bis r_3 auf einer Kurve gleicher Energie zusammengedrückt, wobei die elektrische Energie W_2 aus Arbeit entsteht. Von r_3 bis r_0 wird sie nun auf einer Kurve gleicher Menge weiter zusammengedrückt. Dieser Kreisprozeß besteht somit aus zwei Kurven gleicher Menge und zwei Kurven gleicher Energie.

6. Die Arbeiten E an den Kurven gleicher Menge sind, wie leicht ersichtlich, gleich. Es ist

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_0 V_0^2 - r_3 V_3^2}{r_1 V_1^2 - r_2 V_2^2},$$

da aber

$$r_0 V_0^2 = r_1 V_1^2$$

und

$$r_3 V_3^2 = r_2 V_2^2$$

gilt, ist auch

$$\frac{E_1}{E_2} = 1.$$

7. Die an den Kurven gleicher Energie geleisteten elektrischen Energien W_1 und W_2 lassen sich in einfacher Weise berechnen:

$$W_1 = \int_{r_0}^{r_1} V^2 dr.$$

Da auf der ersten Kurve gleicher Energie

$$V^2 r = V_0^2 r_0$$

ist, läßt sich

$$V^2 = \frac{V_0^2 r_0}{r}$$

einsetzen. Daher

$$W_1 = V_0^2 r_0 \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} = V_0^2 r_0 \lg \frac{r_1}{r_0} = (V^2 r)_1 \lg \frac{r_1}{r_0},$$

und analog für W_2 :

$$W_2 = \int_{r_3}^{r_2} V^2 dr = V_2^2 r_2 \int_{r_3}^{r_2} \frac{dr}{r} = V_2^2 r_2 \lg \frac{r_2}{r_3} = (V^2 r)_2 \lg \frac{r_2}{r_3}.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{r_2}{r_3}$$

ist. Setzen wir in die Beziehung:

$$r_2 V_2^2 = r_3 V_3^2$$

die Werte von V_2 und V_3 aus

$$r_2 V_2 = r_1 V_1$$

und

$$r_3 V_3 = r_0 V_0$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{r_1}{r_2} V_1^2 = \frac{r_0}{r_3} V_0^2.$$

Diese Gleichung dividiert durch die Beziehung

$$r_1 V_1^2 = r_0 V_0^2$$

gibt nämlich

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_0}{r_3}.$$

Daraus folgt

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{(V^2 r)_1}{(V^2 r)_2}.$$

Die zugeführte elektrische Energie W_1 verhält sich zur abgegebenen W_2 wie die *Eigenenergien auf den betreffenden Kurven gleicher Energie*.

8. Dieses Resultat ist aber *genau analog* dem Resultate des thermodynamischen Kreisprozesses mit einem Gas. Die übliche Formulierung desselben ist:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Setzt man aber aus der Zustandsgleichung

$$p v = R T$$

für T die Werte ein, so erhält man

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{(p v)_1}{(p v)_2}.$$

9. Es ist ersichtlich, daß sich für die elektrische Energie ein der Temperatur analoger Parameter definieren ließe, der die Eigenenergie eines geschlossenen Systems direkt angeben würde, wie die Temperatur dies für das ideale Gas tut. Der Wärmekapazität würde sodann eine elektrische Konstante entsprechen, die bei gleicher Eigenenergie des Systems konstant bliebe, und nicht wie die elektrostatische Kapazität in diesem Falle umgekehrt proportional dem Potential wachsen würde. Eine solche Aufstellung hat vorläufig keinen Wert, weil wir für die elektrische Eigenenergie eines Systems keinen direkten Maßstab haben, wie für die thermische.

10. Dem Mach-Lippmannschen Kreisprozeß würde tatsächlich ein thermodynamischer Prozeß mit einem Gas, bestehend aus zwei isopiesticischen und zwei adiabatischen Kurven entsprechen (vgl. Fig. 3).

Von einem derartigen Prozeß kann man direkt den ökonomischen Koeffizienten berechnen. Die an der Kurve $v_0 v_1$ zugeführte Energie beträgt:

$$Q_1 = -\frac{C_p}{R} p_1 (v_1 - v_0),$$

die an der Kurve $v_2 v_3$ abgeführte Energie:

$$Q_2 = -\frac{C_p}{R} p_2 (v_3 - v_2).$$

Der ökonomische Koeffizient ist:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{p_2 (v_3 - v_2)}{p_1 (v_1 - v_0)} = 1 - \frac{p_2 v_3 \left(\frac{v_2}{v_3} - 1 \right)}{p_1 v_0 \left(\frac{v_1}{v_0} - 1 \right)}.$$

Beachtet man, daß an den Adiabaten gilt

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$$

und

$$p_1 v_0^k = p_2 v_3^k,$$

oder in anderer Form

$$\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{k}} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_0},$$

so ergibt sich

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{p_1^{\frac{k-1}{k}} - p_2^{\frac{k-1}{k}}}{p_1^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Der ökonomische Koeffizient des Prozesses mit Isothermen läßt sich auf eine ähnliche Form bringen:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(p v)_2}{(p v)_1} = 1 - \frac{p_2 v_2}{p_0 v_0},$$

nun ist wieder an der Adiabate $v_3 v_0$

$$\left(\frac{p_0}{p_3} \right)^{\frac{1}{k}} = \frac{v_3}{v_0},$$

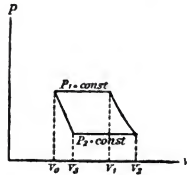


Fig. 3.

also

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{p_0^{\frac{k-1}{k}} - p_s^{\frac{k-1}{k}}}{p_0^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Es läßt sich also durch einfache Rechnung zeigen: Der ökonomische Koeffizient ist bei zwei einfachen Kreisprozessen, die eine Adiabate gemeinsam haben, *derselbe* maximale, ob nun in demselben zwei Isothermen oder zwei Isopiesten auftreten.

Dasselbe gilt auch bezüglich der zwei betrachteten elektrischen Kreisprozesse. Der ökonomische Koeffizient in dem Prozesse mit Kurven gleicher Eigenenergie ist:

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{(r V^2)_1 - (r V^2)_2}{(r V^2)_1} = \frac{r_0 V_0^2 - r_s V_s^2}{r_0 V_0^2}.$$

Da aber:

$$r_0 V_0 = r_s V_s,$$

läßt er sich auch auf die Form:

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{V_0 - V_s}{V_0}$$

bringen, während der ökonomische Koeffizient beim Mach-Lippmannschen Prozeß

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \text{ ist.}$$

Zürich, Physik. Institut d. Univ., im Dezember 1906.

(Eingegangen 31. Dezember 1906.)

**14. Temperaturmessungen
im Quecksilberlichtbogen der Quarzlampe;
von R. K $\ddot{u}$ ch und T. Retschinsky.**

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Firma W. C. Heraeus.)

In einer fr $\ddot{u}$ heren Abhandlung¹⁾ haben wir $\ddot{u}$ ber photometrische Messungen am Quecksilberlichtbogen einer neuen Quarzglaslampe berichtet. Wir fanden, da β die Kurve des spezifischen Energieverbrauches ein Maximum aufwies, und deuteten die Erscheinung so, da β mit steigender Belastung der Lampe Temperaturstrahlung neben Lumineszenzstrahlung zustande komme. Es schien nun wichtig, Aufschlu β dar $\ddot{u}$ ber zu erlangen, in welchem Ma β e die in der Lichts $\ddot{a}$ ule herrschende mittlere Temperatur mit der elektrischen Belastung der Lampe sich $\ddot{a}$ ndere.

Einige Vorversuche mit feinen Kohlef $\ddot{a}$ den, die wir senkrecht zur Achse in die Lampe einbauten, und deren allm $\ddot{a}$ hliches Ergl $\ddot{u}$ hen uns zeigte, da β die mittlere Temperatur von relativ niedrigen, unterhalb der Gl $\ddot{u}$ htemperatur gelegenen Werten allm $\ddot{a}$ hlich mit der h $\ddot{o}$ heren Belastung der Lampe ansteige, lie β en es als leicht ausf $\ddot{u}$ hrbar erscheinen, den Verlauf des Temperaturwachstumes mittels Thermoelementen genauer zu untersuchen.

Wir verwandten zu den Messungen Thermoelemente aus Platin und Platinrhodium von 0,05 mm Drahtst $\ddot{a}$ rke, die wir durch Quarzglaskapillaren von ca. $\frac{1}{2}$ mm $\ddot{a}$ u β eren Durchmesser zogen. Das Quarzglas erweicht zwar bei ca. 1400°, die Z $\ddot{a}$ hlfliissigkeit des erweichten Glases lie β uns indessen hoffen, dennoch bis zum Platinschmelzpunkt messen zu k $\ddot{o}$ nnen.

Zun $\ddot{a}$ chst versuchten wir die Messungen in der Weise, da β wir das Thermoelement in der L $\ddot{a}$ ngsachse des Leuchtfadens ausspannten, indem die L $\ddot{o}$ tstelle sich etwa in der Mitte der Lampe, gleich weit von Anode und Kathode entfernt,

1) R. K $\ddot{u}$ ch u. T. Retschinsky, Ann. d. Phys. 20. p. 563. 1906.

befand. Hierbei ergab sich ein doppelter Mißstand. Infolge der mit der Erweichung des Quarzglases eintretenden elektrischen Leitfähigkeit wurde der Thermostrom durch den Lampenstrom beeinflusst, so daß wir mit den Messungen nicht so hoch gehen konnten, wie wir wünschten. Ferner wurde bei höheren Belastungen der Leuchtfaden, welcher sich mit steigender Belastung, wie früher erwähnt¹⁾, zusammenschnürt, in seiner Richtung durch die das Thermoelement enthaltende Quarzglas-kapillare abgelenkt, so daß diese sich nicht mehr in der Achse des Leuchtfadens befand, und wir zu niedrige Temperaturen maßen.

Wir gingen deshalb dazu über, das Thermoelement senkrecht zur Achse des Leuchtfadens anzuordnen. Zunächst wurde durch Messungen mit zwei Thermoelementen, von denen eines in der Achse des Fadens, das andere senkrecht dazu eingesetzt war, und deren Lötstellen sich unmittelbar nebeneinander befanden, festgestellt, daß beide nicht wesentlich voneinander abweichende Werte ergaben, daß also die Wärmeleitung keinen wesentlichen Einfluß auf die Angaben des Elements ausübe, auch wenn dieses sich nur auf eine kurze Strecke innerhalb des Leuchtfadens befindet, wie es bei der Anordnung senkrecht zur Achse des Leuchtfadens der Fall ist.

Die thermoelektrischen Werte der Elemente wurden durch Vergleiche mit einem von der Physikal-Technischen Reichsanstalt geeichten Normalelement in der Weise festgestellt, daß ein aus denselben zusammenhängenden Drahtstücken, aus denen die für die Versuche verwandten Elemente zusammengesetzt wurden, geschnittenes Element in einem elektrisch geheizten Heraeus-Röhrenofen zusammen mit dem Normalelement bei aneinander stoßenden Lötstellen bis 1500° erhitzt wurde. Die Werte über 1500° hinaus sind so gewonnen, daß der beim Durchschmelzen des Thermoelements im Verlaufe der Versuche abgelesene Wert als Platinschmelzpunkt (1710° nach L. Holborn u. F. Henning²⁾) angenommen und die zwischen 1500 und 1710° liegenden Werte graphisch interpoliert wurden.

1) l. c. p. 566 und Taf. IV, Fig. 3.

2) L. Holborn u. F. Henning, Sitzungsber. der k. preuß. Akad. der Wissensch. zu Berlin 12. p. 311. 1905.

Wir übergehen die Versuche, welche angestellt wurden, um es zu erreichen, daß die Messungen bis zur Schmelztemperatur des Platins getrieben werden konnten, d. h. daß ein Durchschmelzen des Platindrahtes direkt an der Lötstelle des Elementes und ziemlich genau dann eintrat, wenn das Thermoelement den für den Platinschmelzpunkt extrapolierten Wert anzeigte, daß also eine Gewähr dafür gegeben war, daß wir wirklich an der heißesten Stelle des Fadenquerschnittes gemessen hatten. Wir beschreiben nur die Versuchsanordnung, welche uns zum Ziele führte.

Da wir einerseits bis über den Erweichungspunkt des Quarzglas hinausgehen wollten, andererseits Wert darauf legten, daß das Thermoelement gegen den Quecksilberdampf isoliert war, mußten die Elemente in *evakuierte* Kapillaren eingezogen werden. Anderenfalls würde die in den Kapillaren enthaltene Luft beim Erweichen des Glases die Kapillaren aufgeblasen haben und würde in das Innere der Lampe gedrungen sein. Die Abdichtung derjenigen Stellen, an welchen die Thermoelemente aus den Kapillaren heraustreten, konnte nur durch Siegellack geschehen. Hieraus ergab sich die Notwendigkeit, diese Abdichtungsstellen weit von dem eigentlichen Lampenrohr hinwegzulegen, damit der Siegellack nicht erweichte. Es wurden deshalb an das Lampenrohr *a* (Fig. 1)

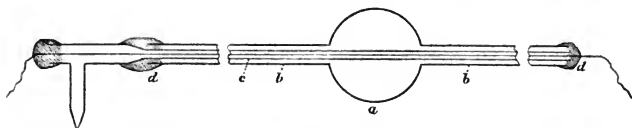


Fig. 1.

für jedes Element zunächst je zwei einander gegenüberliegende etwas weitere Rohre *b* von ca. 15 cm Länge angesetzt, in welche die Kapillare *c* mit dem Thermoelement eingeschoben werden konnte. An den Enden wurden die Kapillaren in diesen äußeren Rohren mit Siegellack *d* festgekittet. In der Nähe der Siegellackdichtungen wurde noch dauernd durch Wasser gekühlt, um ein Erweichen der Dichtungen zu verhindern. Es wurden dann im ganzen drei Elemente in die

Lampe eingesetzt, deren Lage zueinander Figg. 2 und 3 erkennen lassen. Man sieht, daß eine Lötstelle in der Achse des Leuchtrohres und je eine in der Mitte zwischen Achse und

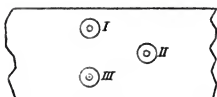


Fig. 2.

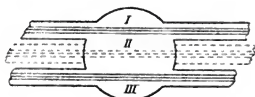


Fig. 3.

oberem bez. unterem Rohrrand lag, und daß die Lötstelle des mittleren Elementes gegen die beiden äußeren ca. 15 mm seitlich verschoben war.

Um die Vorgänge an den Lötstellen der Elemente genau beobachten zu können, wurde die mittlere Partie der Lampe mittels eines unter diese gestellten Spiegels in ein Fernrohr gespiegelt. Es konnte so bequem beobachtet werden, daß die Lötstellen während des Versuches genau ihre Lage beibehielten, daß bei der Erweichungstemperatur des Quarzglases (gegen 1400°) die Wände der Kapillaren sich auf die Thermoelementlötstellen niederlegten, und daß bei der entsprechenden Temperatur, als im Galvanometer Unterbrechung des Thermoelementes zu erkennen war, der Platin- (nicht der Platinrhodium-)draht genau neben der Lötstelle sich unterbrochen zeigte. Weitere Steigerung der Belastung ließ dann den Draht zu mehreren Perlen in dem weichen Quarzglase sich zusammenziehen. Endlich erfolgte auch Auseinanderfließen des Quarzglases nach beiden Seiten zu je einer Perle.

Wie früher bemerkt, ist die elektrische Charakteristik unserer Lampe, außer von der elektrischen Belastung, in erster Linie abhängig von größerer oder geringerer Kühlung der Elektroden. Man kann deshalb durch Änderung der elektrischen Belastung einerseits und durch Änderung der Kühlung andererseits der Lampe bei gleichbleibender Spannung andere Stromstärke und bei gleichbleibender Stromstärke andere Spannung geben. Die Kühlung wird am einfachsten durch einen regulierbaren, gegen die Elektrodengefäße gerichteten Luftstrom, die elektrische Belastung durch einen regulierbaren Vorschaltwiderstand variiert. Dem vorliegenden Modell unserer

Lampe kann man auf diese Weise zwischen ca. 1,8 und 6 Amp. für jede beliebige Stromstärke Spannungen von ca. 30—180 Volt und mehr in jeder denkbaren Kombination geben und bei konstanter Stromquelle und konstantem Luftstrom beliebig lange Zeit konstant erhalten.

Wir haben bei einem der Vorversuche zunächst die Abhängigkeit der mittleren Temperatur des Leuchtfadens von der Stromstärke bei vier verschiedenen Spannungen untersucht.

Die folgende Tab. 1 enthält die beobachteten Werte; in der Fig. 4 ist das Resultat graphisch dargestellt.

Tabelle 1.

Belastung der Hg-Lampe		Temperatur		
Volt	Ampère	Thermo- element I	Thermo- element II	Thermo- element III
37,2	2,34	570	640	615
37,0	3,12	650	720	700
37	3,54	710	780	750
37	4,15	710	780	750
37	4,70	712	785	765
37,3	5,30	730	815	782
37	5,86	740	800	780
42,3	2,10	675	795	710
42,3	2,54	745	860	800
42,5	3,10	800	890	860
42,5	3,80	830	920	890
42,0	5,00	890	980	950
42,0	5,93	920	1015	965
50	2,04	780	890	835
50	3,00	900	1020	970
50,1	4,00	1020	1130	1075
50,3	4,93	1065	1160	1120
55	2,25	890	1020	960
55,3	3,10	1040	1165	1110
55	3,96	1100	1190	1160

Wir sehen, daß mit steigender Stromstärke bei gleichbleibender Spannung die mittlere Temperatur des Leuchtfadens zunimmt. Da wir gelegentlich nachgewiesen haben, daß der

Dampfdruck bei gleichbleibender Spannung und wachsender Stromstärke konstant bleibt und bei gleichbleibender Strom-

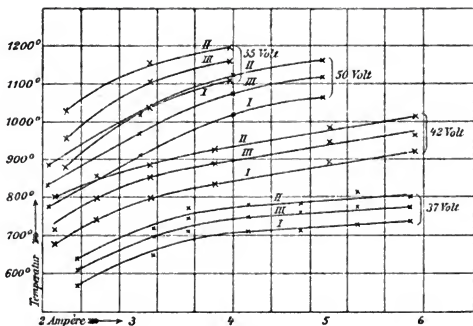


Fig. 4.

stärke mit zunehmender Spannung steigt, so läßt sich das Resultat auch so ausdrücken, daß die mittlere Temperatur des Leuchtfadens bei gleichbleibendem Druck mit wachsender Stromstärke zunimmt.

L. Arons teilt in seiner bekannten Arbeit¹⁾ über den Quecksilberlichtbogen mit, daß bei einer Stromstärke von etwa 5,5 Amp. und einem wesentlich niedrigeren Spannungsabfall, als wir ihn anwandten, Platinsonden von 1 mm Dicke, die in das Rohr senkrecht zur Achse eingesetzt waren, bis zur Rohrachse zu einer Kugel zusammengeschmolzen waren. Trotzdem unsere Thermoelemente samt Hülle eine weit geringere Masse bildeten als diese Sonden, zeigten sie wesentlich geringere Temperaturen an. Platinschmelztemperatur haben wir erst bei wesentlich höherem Spannungsabfall erreicht.

Als dann haben wir bei konstant erhaltener Stromstärke von 4 Amp. die Abhängigkeit der mittleren Temperatur von der Spannung (Druck) untersucht. Tab. 2 enthält die beobachteten Werte; in der Fig. 5 ist das Resultat graphisch dargestellt.

1) L. Arons, Wied. Ann. 58. p. 82. 1896.

Tabelle 2.

Belastung der Hg-Lampe		Temperatur		
Volt	Ampère	Thermo- element I	Thermo- element II	Thermo- element III
30	4,00	475	635	605
34,5	4,00	615	800	750
38	4,00	700	895	845
43	4,03	810	1075	1065
46,5	4,03	890	1245	1215
51,5	4,00	1060	1475	1410
57,3	4,00	1155	1600	1535
62	4,10	—	1710	—
63	4,00	1285	—	1620
68,5	4,00	—	—	1685
70	3,92	1390	—	—
73	4,00	1470	—	—
77	4,00	1495	—	—
82	4,00	1585	—	—
91	4,00	1625	—	—
100	4,00	1650	—	—
107	4,00	1700	—	—

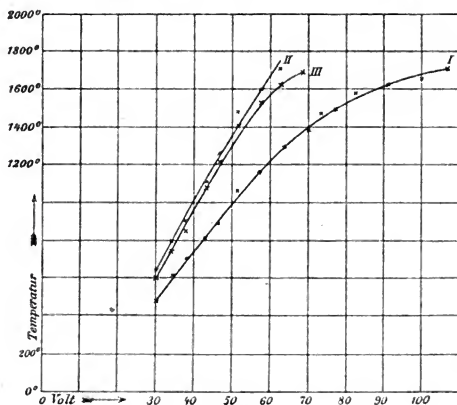


Fig. 5.

Man erkennt zunächst, daß ein Temperaturabfall vom Innern des Leuchtfadens nach außenhin vorhanden ist. Man bemerkt ferner, daß die Temperaturkurve des mittleren Elementes im ganzen geradlinig ansteigt, daß die des unteren und noch mehr die des oberen allmählich abflacht. Hierin drückt sich die allmähliche Zusammenschnürung des Leuchtfadens mit zunehmender Spannung (Druck) aus. Das obere und das untere Element befindet sich mit steigender Spannung in immer peripherischeren Zonen des Fadens. Die Ungleichheit in den Werten des oberen und unteren Elementes bedeutet, daß beide Elemente nicht an genau korrespondierenden Stellen des Fadens sich befanden. Betrachtet man die Werte des mittleren Thermoelementes, so erkennt man, daß innerhalb des gemessenen Spannungsbereiches die mittlere Temperatur des Leuchtfadens mit der Spannung stetig wächst und bereits bei einer Spannung von 60 Volt 1700° erreicht.

Wenn man annimmt, daß mit höheren Spannungen das Ansteigen der Temperatur in der gleichen Weise fortschreitet, so erhält man bei einer Spannung von 200 Volt bereits Temperaturen von 6000—7000°. Wir konnten die Spannung in unserer Lampe indessen noch erheblich höher treiben.

Wir glauben mit diesen Messungen nachgewiesen zu haben, daß die mittlere Temperatur in unserer Lampe von relativ niedrigen zu außerordentlich hohen Werten ansteigt und sehen in diesem Nachweis eine Stütze unserer Vermutung, daß bei hoher Belastung Temperaturstrahlung eine Rolle spielt; denn wenn unsere Messungen auch natürlich über die absolute Höhe der wirklichen Temperatur der leuchtenden Teilchen nichts aussagen, so erscheint doch eine Beeinflussung der letzteren durch die mittlere Temperatur im Sinne einer Erhöhung um sehr beträchtliche Werte möglich.

Hanau, Dezember 1906.

(Eingegangen 12. Januar 1907.)

15. *Zur Frage
der Wellenlänge der Röntgenstrahlen;
von J. D. van der Waals jr.*

Es ist bekannt, daß Haga und Wind durch einen Beugungsversuch die Wellenlänge der Röntgenstrahlen bestimmt haben. Sommerfeld¹⁾ berechnet aus dem Beugungsbilde eine Wellenlänge von im Mittel $1,3 \cdot 10^{-8}$ cm. Wien²⁾ meint aus seinen Beobachtungen „über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen“ die Wellenlänge der Röntgenstrahlen ermitteln zu können. Er findet $2,3 \cdot 10^{-10}$ cm. Da bei Hagas Versuchen die Wellenlänge sehr harter Röntgenstrahlen sich zu derjenigen weicher Röntgenstrahlen verhielt wie 1:2, ist es nicht wahrscheinlich, daß Wien mit Röntgenstrahlen experimentiert hat, deren Wellenlänge wirklich nur 0,02 war von derjenigen bei Hagas Versuchen.

Wien selbst bemerkt, daß seine Schlußweise nur dann zuverlässig ist, wenn die von ihm gemessene Wärmemenge wirklich der Energie der Röntgenstrahlen entnommen wird, und nicht etwa von der Atomenergie der absorbierenden Substanz herrührt, welche unter Einwirkung der Röntgenstrahlen vielleicht teilweise in Wärme transformiert wird.

Ich möchte dazu bemerken, daß es noch eine andere Bedingung gibt, die erfüllt sein muß, damit es möglich sei, aus der Energie auf die Wellenlänge zu schließen. Wien hat nämlich angenommen, daß die Kathodenstrahlteilchen an der Antikathode ihre große Geschwindigkeit durch eine einfache geradlinige Verzögerung verlieren. Wenn dieses nicht zutrifft, schlägt die Wiensche Bestimmungsweise der Wellenlänge der Röntgenstrahlen fehl.

1) A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 46. p. 83. 1902; Physik. Zeitschr. 2. p. 59. 1902.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 18. p. 991. 1905.

Denken wir uns z. B., daß das Elektron zur Ruhe käme nach n Schwingungen um eine Gleichgewichtslage an der Antikathode. Es würde dann $4n$ mal beschleunigt oder verzögert sein, jedesmal um einen Betrag v (die Geschwindigkeit, mit der das Elektron an der Antikathode eintrifft). Die bei jeder Beschleunigung ausgestrahlte Energie würde also nur $1/4n$ derjenigen Energie betragen, die vom Elektron im ganzen ausgestrahlt wird. Und da die ausgestrahlte Energie, wenn ein Elektron von 0 bis v beschleunigt wird, der Zeit, welche die Beschleunigung beansprucht, umgekehrt proportional ist, so würde bei der periodischen Hemmung die Wellenlänge $4n$ mal größer sein, als bei einer aperiodischen, bei welcher dieselbe Energie ausgestrahlt würde.

Nun ist allerdings eine regelmäßige Schwingung vom Elektron an der Antikathode nicht wahrscheinlich. Wahrscheinlicher ist, daß das Kathodenstrahlteilchen, wenn es in die Menge positiver und negativer Elektronen, welche die Antikathode bilden, hineinfliegt, dort jeweilig mit mehreren Teilchen in Wechselwirkung tritt, mehrere Male die Richtung seiner Geschwindigkeit ändert, und daß in der Zickzackbewegung nur allmählich die große Geschwindigkeit des Kathodenstrahlteilchens bis zur Geschwindigkeit der Wärmebewegung vermindert. Und eher als mit Wien zu schließen, daß die Wellenlänge wahrscheinlich nur 0,02 des von Haga gefundenen Wertes beträgt, würde ich als gesamtes Resultat der Beobachtungen von Haga und Wien angeben, daß die Kathodenstrahlelektronen an der Antikathode nicht einfach geradlinig verzögert werden, sondern mit einer großen Menge Teilchen in Wechselwirkung kommen, ehe sie ihre große Geschwindigkeit eingebüßt haben. Es ist natürlich nicht möglich, die Zahl der Teilchen genau anzugeben. Bei der ersten Wechselwirkung wird das Kathodenstrahlelektron etwa 0,02 der im ganzen ausgestrahlten Energie verlieren.

Schon a priori ist eine solche Bewegung wahrscheinlich. Hemmung durch einen Stoß ist wohl ausgeschlossen, da dann die Wellenlänge dem Diameter des Elektrons gleich sein würde. Dies aber trifft gewiß nicht zu. Hemmung durch eine abstoßende Kraft ist aber auch nicht anzunehmen; denn woher würde die Kraft herrühren? Doch wohl wahrscheinlich würde

es eine elektrische Abstoßung sein, die dann der beschleunigenden Kraft an der Kathode gerade gleich sein müßte. Dieses würde aber nur dann zutreffen, wenn die Kathode und die Antikathode dasselbe niedrige Potential hätten, der Raum zwischen beiden aber ein viel höheres. Auch dieses ist gewiß nicht der Fall.

Die Frage nach der Hemmung der Elektronen an der Antikathode steht im engsten Zusammenhange mit der Frage nach der Polarisierung der Röntgenstrahlen. Wäre die Hemmung geradlinig, so müßten die Röntgenstrahlen polarisiert sein. Wenn wir hingegen annehmen, daß die Kathodenstrahlteilchen bei der ersten Wechselwirkung mit einem Teilchen der Antikathode nur 0,02 der Energie, die es im ganzen durch Strahlung verliert, ausstrahlt und daß nach der ersten Wechselwirkung alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind, dann würde nur 2 Proz. der Röntgenstrahlen polarisiert sein.

Die letztere Annahme scheint mir mit der Erfahrung besser im Einklang zu stehen, wie die erstere. Wohl hat Barkla¹⁾ gemeint, aus seinem Versuche schließen zu müssen, daß die Röntgenstrahlen zu einem merklichen Betrag polarisiert sind, aber er fand doch gewiß keine totale Polarisation, und außerdem ist es nicht unwahrscheinlich, daß die scheinbare Polarisation, die er fand, der Asymmetrie der Aufstellung zuzuschreiben ist.²⁾ Haga konnte in primären Röntgenstrahlen keine Polarisation nachweisen. Seine Versuche erlauben leider noch nicht eine Polarisation von wenigen Prozenten zu ermitteln. Eine genaue Vergleichung der Resultate der Bestimmung der Wellenlänge, der Energie und der Polarisation der Röntgenstrahlen ist daher bis jetzt noch nicht möglich.

1) Ch. G. Barkla, Phil. Trans. Roy. Soc. 204. p. 467. 1905.

2) Vgl. H. Haga, „Over de Polarisatie van Röntgenstralen“, Verslag kon. Akad. v. Wetensch. (Amsterdam) 15. p. 64. 1906.

(Eingegangen 7. Januar 1907.)

16. Bemerkung
zu der Arbeit von W. Zernov: „Über absolute
Messungen der Schallintensität“¹⁾;
von V. Dvořák.

Hr. Zernov erwähnt in seiner interessanten Arbeit auch meine Mitteilung²⁾ mit den Worten: „es hat bereits früher Dvořák gezeigt, daß man durch Wassermanometer den Überdruck im Knoten einer stehenden Schallschwingung nachweisen kann“. Hr. Zernov hat in dieser Richtung ebenfalls Versuche angestellt, die „zu dem unerwarteten Ergebnisse führten, daß die Größe der Flüssigkeitsverschiebung wesentlich von der Beschaffenheit der Ränder und von Änderungen des Querschnittes des Zuleitungsrohres abhängen“ — ja selbst das Vorzeichen des Druckes konnte geändert werden. Hieraus schließt Hr. Zernov, daß man die Überdrücke in schwingenden Luftsäulen nicht durch einfache Flüssigkeitsmanometer messen kann.

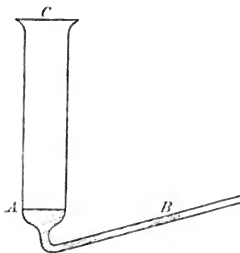


Fig. 1.

Hierzu muß ich bemerken, daß ich schon l. c. auf das Mitschwingen der Luft im Manometerrohre als eine Fehlerquelle aufmerksam machte, und deshalb riet, dieses Rohr so eng zu nehmen, daß die Luftschwingungen in demselben durch Reibung aufgezehrt werden.

Weitere Versuche sind in meinen „Bemerkungen zu der Mitteilung von F. Neesen: Akustische Beobachtungen“³⁾ beschrieben. Um nämlich den mittleren Überdruck im Knoten *A* einer tönenden Luftsäule *AC* (Fig. 1) *einwurfsfrei* zu messen, verbinde man

1) W. Zernov, Ann. d. Phys. 21. p. 131. 1906.

2) V. Dvořák, Pogg. Ann. 157. p. 42. 1876.

3) V. Dvořák, Wied. Ann. 31. p. 536. 1887.

diese durch einen kurzen Kautschukschlauch mit einer schiefgestellten eingeteilten Glasröhre, und fülle Flüssigkeit ein (etwa Xylol); durch Neigen von B kann man die Empfindlichkeit beliebig vergrößern.

Nimmt man nun ein gewöhnliches Manometer (Fig. 2), so mißt dieses den Überdruck im Punkte c und nicht in A . Ist ac etwa gleich einer Viertelwelle, und ist das Rohr nicht sehr eng, so wird die Luft in ac stark mit-schwingen und so eine beträchtliche Komplikation des Versuches herbeiführen.

Auch bei dem neuerdings oft zu Schulversuchen verwendeten Kundtschen Membranventil zeigt sich der Einfluß der Luftsäule ac (über die Öffnung a ist bekanntlich eine dünne Membran gespannt) mitunter sehr störend, so daß z. B. ein für Verdünnung eingerichtetes Ventil eine Verdichtung gibt, wie ich schon 1873¹⁾ dargetan habe, was man aber späterhin gänzlich vergessen hat. Verwendet man tiefere Töne und enge Manometerröhren, so dürfte dieser Einfluß nur gering sein.

Eine zweite Fehlerquelle bei der Messung des Überdruckes mit einem gewöhnlichen Manometer (Fig. 2) sind die an den Rändern von a auftretenden Wirbel und Strömungen, die ja bei starken Luftschwingungen sehr heftig sein können. Ein kurzer Bericht über einige Fälle der Wirbelbildung bei Resonatoren befindet sich in meiner Mitteilung in der Physik. Zeitschr. 2. p. 490. 1901 („Über die sogenannte akustische Abstoßung der Resonatoren“).

Um die Wirbelbildung an den Rändern der Glasröhre bei a zu verhindern, kann man a durch einen kurzen porösen Gipspfropf schließen, so daß der Boden A des Resonanzrohres, das Ende der Röhre a nebst Pfropf eine ununterbrochene ebene Fläche bilden. Nimmt man nebstdem die Länge der Luftsäule ac recht klein, so dürfte selbst ein gewöhnliches Manometer gute Resultate geben. In der zuletzt zitierten Mitteilung wurde ein Manometer mit Baumwollpfropf verwendet, jedoch waren die Schenkel nicht parallel, sondern

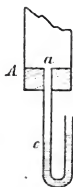


Fig. 2.

1) V. Dvořák, Pogg. Ann. 150. p. 410. 1873.

bildeten einen sehr stumpfen Winkel, um die Empfindlichkeit zu vergrößern.

Zum Schlusse noch eine Bemerkung. Die in Fig. 1 dargestellte Anordnung habe ich als einwurfsfrei bezeichnet. Nur entstehen bei starken Schwingungen auch Wirbel oben bei *C* an den Rändern des Rohres und auch im Rohre selber; dieser Einwurf trifft jedoch nicht das Manometer. Die Wirbel oben bei *C* könnte man durch Umbiegen des Randes (wie es in der Figur angedeutet ist) stark herabsetzen.

Übrigens ist es nicht unmöglich, daß der Überdruck im ganzen Querschnitt des Rohres bei *A* (Fig. 1) nicht genau gleich ist. Man würde das leicht an der Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche bei *A* sehen.

Agram, 15. Januar 1907.

(Eingegangen 16. Januar 1907.)

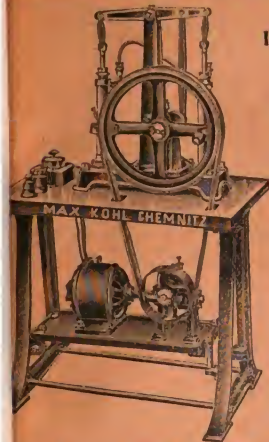
Berichtigung.

Bd. 20 p. 986 Zeile 10 v. u. statt *Temperatur* lies: *Richtung*.

MAX KOHL, Chemnitz i. S.



Arbeits-(Praktikanten-)Tische
 in allen möglichen Ausführungen, ganz den jeweiligen örtlichen Verhältnissen angepaßt.



Jodumbromid von überraschender
 chemisch rein. Wirkung; Preis auf Anfrage.

Weltausstellung Lüttich 1905: 2 Grands Prix!

Weltausstellung St. Louis 1904: Grand Prix und Gold. Medaille,
 waren in der Sonderausstellung des Königl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im
 Auftrage der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsaales, letztere in der
 deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung: wissenschaftliche Instrumente.

Ehrendiplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Düsseldorf 1898.

Goldene Medaillen Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900, Aussig 1903, Athen 1904.

Kataloge mit ausführlichen Kostenanschlägen, Beschreibungen, Referenzen usw. gratis und franko.

Experimentier-Schalttafeln

für Lehranstalten u. Laboratorien, als Wandtableau
 und in Form fahrbarer Tische ausgeführt, gestatten
 die Verwendung

des Stromes
 städtischer Cen-
 tralen bis 110, 160,
 220 Volt u. 20 oder
 30 Amp. für alle
 im Experimental-
 unterricht vor-
 kommende Arbei-
 ten. Die Schalt-
 tafeln sind für
 kleine und große
 Stromstärken bei
 beliebigen Span-
 nungen von 0,3 bis
 110 resp. 220 Volt
 zu verwenden.

Höhere Span-
 nungen als wie
 eingestellt, treten
 auch bei Strom-
 unterbrechung
 nicht auf. — Es ist
 damit also einem
 wirklichen, lang
 gefühlten Bedürf-
 nis abgeholfen.

1a. Referenzen. *Man verlange Spezial-Prospekt!*



D. D. Thermoskope nach Kolbe

in neuester, verbesserter Ausführung.

Neu!

Öl-Luftpumpen

System Kohl, D.R.P. 169180.

Allein-Vertrieb

und Alleinberechtigung zur Fabrikation.

Die Pumpe verdünnt bis auf 0,0006 mm
 und verspritzt während des Pumpens
 kein Öl! Sie eignet sich vorzüglich zum
 Auspumpen von Röntgen-Röhren.

Man verlange Spezial-Prospekt!

Neue rotierende

Quecksilber-Hochvakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede, D.R.P. angemeldet.

Einfachste Konstruktion, sehr hohes Vakuum,
 geringe Wartung, einfachste Handhabung.

Hochvakuum-Pumpen liefern Vakua bis zu
 0,00015 mm in 14 Minuten in einem Raum
 von 300 ccm.

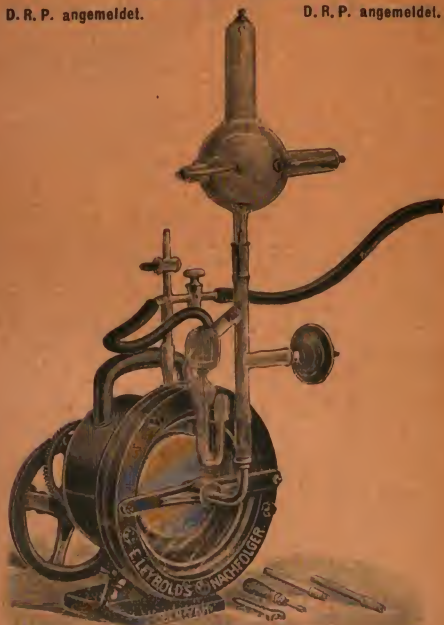
E. Leybold's Nachfolger, Cöln a. Rh.

Alleinvertrieb und alleinige Berechtigung zur Fabrikation der Neuen Hoch-Vakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede.

D. R. P. angemeldet.

D. R. P. angemeldet.



Die Pumpe evakuiert in $2\frac{1}{2}$ Minuten eine Röntgenröhre von Atmosphärendruck bis auf Röntgenvakuum, ein 6 Liter-Gefäß in 10 Minuten von 10 mm Druck bis auf 0,0016 und in 25 Minuten ein 6 Liter-Gefäß von 10 mm Druck auf 0,00003 mm.

Die Pumpe ermöglicht in kürzester Zeit die höchsten bisher erreichten Verdünnungen zu erzielen.

Preis ohne Quecksilber Mark 330.—.

Alleinige Inseratenannahme durch: Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Ulrichstr.
Mit einer Beilage von A. Francke, Bern.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREINER, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 22. HEFT 4.

DER GANZEN REIHE 327. BANDES 4. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1907.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 Mk.

(Ausgegeben am 4. April 1907.)

Inhalt.

	Seite
1. F. Henuing. Über den Sättigungsdruck des Wasserdampfes. (Hierzu Taf. III)	609
2. F. Henning. Über die Ausdehnung fester Körper bei tiefer Temperatur	631
3. H. Brandes. Über die Dämpfung und Energieausnutzung einiger Senderanordnungen der drahtlosen Telegraphie	640
4. F. Conrat. Über Messung des Strahlungsdekrementes stab- förmiger Leiter	659
5. Heinrich Glaser. Über die innere Reibung zäher und plastisch-fester Körper und die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes	694
6. O. Lummer und R. Kynast. Spektralapparat für Polarisations- und Phasendifferenzmessungen	721
7. R. Kynast. Über die bei der Reflexion an isotropen, durch- sichtigen Medien auftretenden Phasenverschiebungen	726
8. K. Bädcker. Über die elektrische Leitfähigkeit und die thermoelektrische Kraft einiger Schwermetallverbindungen . .	749
9. Theodor Lohnstein. Weiteres zur Theorie der fallenden Tropfen, nebst einem Rückblick auf ältere theoretische Versuche	767
10. F. W. Adler. Über die Formulierung des ersten Hauptsatzes für Gase	782
11. F. Hasenöhrl. Zur Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraume	791
12. W. Wien. Über die Berechnung der Impulsbreite der Röntgen- strahlen aus ihrer Energie	793
13. Ernst Giesing. Berichtigung zu meiner Abhandlung: „Unter- suchungen ebener Reflexionsbeugungsgitter etc.“	798
14. A. Einstein. Berichtigung zu meiner Arbeit: „Die Plancksche Theorie der Strahlung etc.“	800

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 22.

1. Über den Sättigungsdruck des Wasserdampfes; von F. Henning.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

(Hierzu Taf. III.)

Einleitung. Der Sättigungsdruck des Wasserdampfes ist eine für Theorie und Praxis wichtige Größe, die häufig Gegenstand eingehender Messungen gewesen ist. Es schien wünschenswert, das gesamte auf diesem Gebiet vorliegende Beobachtungsmaterial von einheitlichem Gesichtspunkte aus zu betrachten und die Fragen zu beantworten, welche Werte für den Sättigungsdruck die wahrscheinlichsten sind, und welche Genauigkeit ihnen zukommt. Das erhaltene Resultat gab Veranlassung, der Frage nach dem Temperaturkoeffizienten des Sättigungsdruckes näher zu treten, der für die Thermodynamik von noch größerer Bedeutung ist, als der Sättigungsdruck selbst. Die Clapeyron-Clausius'sche Gleichung

$$L = \frac{1}{A} (t + 273) \frac{dp}{dt} (v_1 - v_2)$$

stellt nämlich eine ohne Einschränkung gültige Beziehung dar zwischen der Verdampfungswärme L in kalorischem Maße, dem mechanischen Wärmeäquivalent A , dem Temperaturkoeffizienten dp/dt des Sättigungsdruckes p , sowie der Differenz $v_1 - v_2$ der spezifischen Volumina von gesättigtem Dampf und Flüssigkeit. Alle Größen beziehen sich dabei auf die Temperatur $t^\circ \text{C}$.

Das mechanische Wärmeäquivalent ist nach den neueren Messungen auf 1 bis 2 Promille bekannt. Es wurde hier bei der Rechnung die Grammkalorie von 15° gleich 427,0 Grammgewichtmeter für mittlere Schwere gesetzt.¹⁾ Da auch das

1) H. A. Rowland, Proc. Am. Acad. (N. S.) 7. p. 75. 1880; C. Miculescu, Journ. d. Phys. (3) 1. p. 104. 1892; O. Reynolds u. W. H. Moorby, Phil. Trans. (A) 190. p. 381. 1897.

spezifische Volumen v_2 des Wassers wenigstens bis zu Temperaturen von 200°C . genügend genau gemessen ist¹⁾, so haben wir eine Beziehung zwischen L , dp/dt und v_1 , und es können also mit Hilfe der abgeleiteten Werte von dp/dt die vorhandenen Beobachtungen von L und v_1 auf ihre Genauigkeit geprüft bez. ergänzt werden.

Methode der Untersuchung. In den Kreis der Betrachtung werden alle über 0°C . angestellten Messungen über den Sättigungsdruck des Wasserdampfes seit den Beobachtungen von Magnus und Regnault gezogen, soweit sie nach zuverlässigen Methoden ausgeführt sind. Die ältere Literatur findet man bei Regnault im ersten Bande seiner Relations des Expériences zusammengestellt.

Die hier angewendete Methode der Untersuchung besteht in folgendem: Es wurden die Beobachtungen der einzelnen Autoren verglichen mit den Werten, die sich aus einer Formel ergaben. Hierzu wurde die Formel benutzt, die Thiesen²⁾ auf empirischer Grundlage ableitete und die folgendermaßen lautet:

$$(t + 273) \log \frac{p}{760} = 5,409(t - 100) - 0,508 \cdot 10^{-8} \{ (365 - t)^4 - 265^4 \}.$$

Die Temperatur ist durch t , der Sättigungsdruck in Millimeter Quecksilber durch p bezeichnet. Die Formel enthält außer der kritischen Temperatur des Wassers 365° ($265 = 365 - 100$) zwei Konstante. Berechnet wurden die Abweichungen der Beobachtungen von den Werten der Thiesenschen Formel; dabei wurden aber nicht die ausgeglichenen Kurven der Autoren, sondern die direkten Messungen oder Mittel aus nahe beieinanderliegenden Beobachtungen zugrunde gelegt.

Die Ermittlung der Unterschiede zwischen der Beobachtung und der Formel wurde so ausgeführt, daß für einen Druck p die Differenz zwischen der beobachteten Temperatur $t_{\text{beob.}}$ und der aus der Formel berechneten Tempe-

1) G. A. Hirn, Ann. d. Chimie (4) 10. p. 82. 1866; W. Ramsay u. S. Young, Phil. Trans. 183. p. 109. 1892.

2) M. Thiesen, Wied. Ann. 67. p. 692. 1899. Auf die übrigen in großer Zahl aufgestellten Formeln einzugehen, ist hier keine Veranlassung.

ratur $t_{\text{ber.}}$ aufgestellt wurde. Die Differenz $t_{\text{beob.}} - t_{\text{ber.}}$ trug man dann im allgemeinen für jeden Beobachter in einem besonderen Koordinatensystem (vgl. Taf. III) als Ordinate und die zugehörige Temperatur $t_{\text{ber.}}$ als Abszisse auf. Die graphische Darstellung gibt sofort Aufschluß über die in Temperaturgraden ausgedrückten Abweichungen der einzelnen Beobachtungen voneinander, und eine durch die Punkte möglichst günstig hindurchgelegte glatte Kurve läßt die Abweichungen der ausgeglichenen Beobachtungen von der Thiesenschen Formel erkennen. In einem anderen Koordinatensystem sind die so gewonnenen Kurven der verschiedenen Autoren mit fünffacher Vergrößerung der Ordinaten alle auf dieselben Achsen bezogen, so daß man hier sich mit einem Blick über die Unterschiede der von den verschiedenen Beobachtern ausgeführten Reihen unterrichten kann. Die gestrichelten Kurven sind nach den von den Autoren gegebenen Formeln gezeichnet.

Der Grund dafür, daß die Differenz zwischen Beobachtung und Formel in Temperatur und nicht in Millimeter Quecksilber aufgetragen wurde, war ein doppelter. Einmal ist dadurch die Übersichtlichkeit erleichtert, und zweitens der Genauigkeit der Beobachtungen besser Rechnung getragen. Denn der Temperaturänderung von 1°C. entspricht in der Nähe von 0° eine Druckänderung von etwa 0,3 mm, dagegen in der Nähe des kritischen Punktes von etwa 1600 mm, und es ist daher im allgemeinen die Temperatur weniger genau zu beobachten als der Druck. Als Abszisse mußte die Temperatur der Formel gewählt werden, um die Beobachtungen verschiedener Autoren miteinander vergleichbar zu machen.

Um aus der graphischen Darstellung zu entnehmen, welcher Druck p zu einer bestimmten Temperatur t beobachtet wurde, verfährt man folgendermaßen: Ist in der Nähe von t die Differenz $t_{\text{beob.}} - t_{\text{ber.}} = \Delta$, so sucht man den zu $t - \Delta$ gehörigen Druck aus der Formel. Zur Erleichterung der Berechnung dient die Tab. 1, die so eingerichtet ist, daß man überall auf etwa $0,01^{\circ}$ interpolieren kann. Ebenso kann man zu einem gegebenen Druck p die beobachtete Temperatur t entnehmen: Man bestimmt die zu p gehörige Temperatur t aus der Formel oder der Tabelle und addiert zu t das nach der graphischen Darstellung zugehörige Δ .

Tabelle 1.
Sättigungsdampf des Wasserdampfes in mm Hg als Funktion der Temperatur nach der Thiesen'schen Formel.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90°
0	4,581	9,206	17,53	31,82	55,33	92,52	149,38	233,67	355,1	525,8
1	4,925	9,841	18,65	33,69	58,34	97,21	156,43	243,96	369,7	546,1
2	5,292	10,515	19,83	35,66	61,50	102,10	163,77	254,6	384,9	567,0
3	5,682	11,229	21,07	37,73	64,80	107,20	171,39	265,7	400,5	588,6
4	6,098	11,984	22,38	39,90	68,26	112,51	179,31	277,2	416,7	610,9
5	6,541	12,785	23,75	42,17	71,87	118,06	187,54	289,0	433,4	633,9
6	7,011	13,632	25,21	44,56	75,65	123,82	196,09	301,4	450,7	657,6
7	7,511	14,528	26,74	47,07	79,60	129,84	204,96	314,1	468,6	682,1
8	8,042	15,475	28,35	49,69	83,72	136,09	214,18	327,3	487,0	707,3
9	8,607	16,475	30,04	52,44	88,02	142,61	223,74	341,0	506,1	733,3
	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190°
0	760,0	1074,9	1490,2	2028,5	2715,3	3578,9	4650	5963	7555	9463
1	787,6	1111,6	1538,1	2090,1	2793,2	3676,0	4770	6109	7731	9674
2	815,9	1149,3	1587,3	2153,2	2872,9	3775,4	4892	6258	7910	9887
3	845,1	1188,0	1637,7	2217,7	2954,5	3877	5017	6410	8092	10104
4	875,2	1227,8	1689,4	2283,9	3037,8	3981	5144	6564	8278	10325
5	906,2	1268,7	1742,5	2351,7	3123,1	4086	5274	6722	8467	10550
6	938,1	1310,7	1796,9	2421,0	3210,2	4196	5407	6883	8659	10779
7	970,9	1353,8	1852,7	2492,0	3299,4	4305	5542	7046	8855	11011
8	1004,6	1398,1	1909,9	2564,8	3390,5	4418	5680	7212	9054	11247
9	1039,2	1443,6	1968,5	2639,2	3483,7	4533	5820	7382	9257	11488

Bei der Betrachtung der Beobachtungen muß eingegangen werden auf die Methode, auf die Druckmessung und die Temperaturmessung.

Es sind zwei Beobachtungsmethoden zu unterscheiden. Zunächst die dynamische: Man läßt Wasser in einem Raume konstanten Druckes sieden und mißt über der siedenden Flüssigkeit die Temperatur des Dampfes, der sich kontinuierlich entwickelt und etwa in einem Rückflußkühler wieder kondensiert wird. Der Druck wird gemessen in einer etwa auf Zimmertemperatur gehaltenen künstlichen Atmosphäre, die mit dem Dampfraum in Verbindung steht und zur Regulierung des Druckes dient. — Ferner die statische Methode: Eine beliebige Wassermenge bringt man in ein geschlossenes Gefäß und beobachtet den Druck des Dampfes als Funktion der Temperatur, nachdem sich das Gleichgewicht zwischen der flüssigen und dampfförmigen Phase hergestellt hat. Dazu ist notwendig, daß Wasser und Dampf überall die gleiche Temperatur besitzen. Um den Druck des Dampfes messen zu können, wird im allgemeinen das Volumen durch Quecksilber abgeschlossen, das den Druck auf ein Manometer überträgt. Das absperrende Quecksilber muß in der Nähe des Dampfes auch dessen Temperatur besitzen, so daß also bei höheren Temperaturen die Dampfspannung des Quecksilbers hier beachtet werden muß.

In die statische Methode gehen am Sättigungspunkt des Dampfes zwei andere Methoden über, die zur gleichzeitigen Bestimmung der Spannkraft und des spezifischen Volumens von überhitztem Dampf dienen. Diese beiden Methoden bestehen darin, daß man entweder bei konstanter Temperatur das Volumen des Dampfes als Funktion des Druckes oder bei konstantem Volumen den Druck als Funktion der Temperatur beobachtet. Man erhält also die Isothermen bez. Isochoren. Den Sättigungspunkt erkennt man an der hier auftretenden Unstetigkeit der Kurven.

Bei der statischen Methode ist von einer Reihe von Beobachtungen konstatiert worden, daß der Druck und das spezifische Volumen abhängig sind von der Größe des Volumens selbst. Eine Erklärung dafür ist in der Oberflächenwirkung der Gefäße gesucht worden. Bei der Isothermenmethode wurde ver-

schiedentlich beobachtet, daß bei wachsendem Druck der Dampf früher zu kondensieren beginnt, als der Maximaldruck erreicht ist. Versuche von Tammann¹⁾, V. A. Julius²⁾ und S. Young³⁾ weisen indessen nach, daß diese Erscheinungen mit zunehmender Reinheit und Luftfreiheit des Dampfes mehr und mehr verschwinden.

Die mit dem Quecksilbermanometer gemessenen Drucke sind von den meisten Beobachtern nicht auf Meereshöhe und 45° geographischer Breite reduziert. Die dadurch hervorgerufene Ungenauigkeit ist indessen meist sehr klein⁴⁾ und innerhalb der durch die Temperaturmessung bedingten Fehler. Aus demselben Grunde sind hier die Unterschiede der verschiedenen Gasthermometer von keiner Bedeutung.

Die Beobachtungen. Die einzelnen Arbeiten sollen in chronologischer Reihenfolge besprochen werden.

Magnus⁵⁾ beobachtete den Sättigungsdruck des Wasserdampfes zwischen -7 und $+105^{\circ}$ C. nach der statischen Methode. Die Temperatur maß er mit einem Luftthermometer, das sich mit dem das Wasser enthaltenden Gefäß in einem geheizten Luftbade befand. Für den Dampfdruck des Quecksilbers, das den Wasserdampf abspernte, ist keine Korrektion angebracht. Bei 100° würde sie etwa 0,3 mm betragen. Der Druck des Wasserdampfes wurde durch ein Quecksilbermanometer gemessen mit einer Genauigkeit von 0,15 mm. Der Beobachter war nicht sicher, daß das Wasser gänzlich luftfrei war. Die Hauptfehlerquelle seiner Versuche sah er jedoch in der Temperaturmessung. Seine Beobachtungen stellte er dar durch eine Formel von der Gestalt

$$p = p_0 b^{\frac{t}{r+t}}.$$

p_0 bestimmte er aus sieben Beobachtungen von p für $t=0^{\circ}$. Von den übrigen über das ganze Gebiet verteilten 97 Messungen wählte er zehn beliebig aus und bestimmte aus ihnen

1) G. Tammann, Wied. Ann. **32**. p. 683. 1887.

2) V. A. Julius, Arch. Néerl. (2) **1**. p. 393. 1898.

3) S. Young, Dublin. Proc. **11**. p. 89—104. 1906.

4) O. J. Broch, Trav. et mém. bureau intern. **1**. A. p. 80. 1891;

H. F. Wiebe, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. **48**. I. p. 315—316. 1904.

5) H. G. Magnus, Pogg. Ann. **61**. p. 225—247. 1844.

die Konstanten b und γ unter Festhaltung der Bedingung, daß für $t = 100^\circ$ $p = 760$ mm ist.

Die Kurve (vgl. Taf. III), bei der meist zwei Beobachtungen zu einem Mittelwert vereinigt sind, läßt erkennen, daß oberhalb 40° die Beobachtungen um einige Zehntel Grad schwanken. Unterhalb dieser Grenze sind die in Temperatur ausgedrückten Schwankungen noch größer, in Millimeter Quecksilber ausgedrückt betragen sie hier etwa $\pm 0,5$ mm. Ferner zeigt die Taf. III, daß fast alle unter 70° beobachteten Punkte oberhalb der von Magnus gegebenen Interpolationskurve liegen. Diese letztere Kurve stimmt mit den Regnaultschen Werten gut überein, wie oft hervorgehoben ist. Nach dem Vorstehenden wird die Übereinstimmung schlechter, wenn man auf die Magnusschen Beobachtungen selbst zurückgeht.

Regnaults¹⁾ Messungen erstrecken sich von -32° bis $+280^\circ$ C. Er hat den Sättigungsdruck des Wasserdampfes nach verschiedenen Methoden beobachtet. Für die tiefsten Temperaturen bis $+58^\circ$ benutzte er die statische Methode. Die dynamische Methode kam zur Anwendung für Temperaturen zwischen 43° und 280° . Die statische Methode wurde mehrfach variiert und im Dampfraum etwa zurückgebliebene geringe Luftmengen in Rechnung gesetzt. Bei der dynamischen Methode wurden zwei Apparate benutzt, unterhalb 100° ein kleinerer und oberhalb 100° ein größerer mit einem Dampfkessel von 70 Liter Inhalt und einer zum Ausgleich der Druckschwankungen dienenden künstlichen Atmosphäre von 280 Litern.

Die Temperaturmessung geschah mit Quecksilberthermometern und oberhalb 100° bei drei Beobachtungsreihen, die mit x , y und z bezeichnet sind, außerdem mit dem Luftthermometer. Das Quecksilberthermometer zeigte bei 280° um etwa 2° höher als das Luftthermometer, doch schwankten bei der Vergleichung die Differenzen um $0,1$ bis $0,2^\circ$. Wegen dieser Unsicherheit in der Reduktion des Quecksilberthermometers habe ich oberhalb 100° nur diejenigen Beobachtungen herangezogen, bei denen mit dem Luftthermometer gemessen wurde. Regnault war der Ansicht, daß seine Quecksilberthermometer unterhalb 100° gegen das Luftthermometer etwas zu niedrig

1) V. Regnault, Rel. des Expériences 1. p. 465—638. 1847.

zeigten. Doch hielt er diese Differenz für so klein, daß er sie durch direkte Vergleichung nicht ermitteln zu können glaubte. Die Fixpunkte der Thermometer änderten sich stark, auch wohl plötzlich während einer Beobachtungsreihe. Die besten Quecksilberthermometer gaben äußersten Falles $0,05^{\circ}$ sicher. Mit dem Luftthermometer wurde bei der einzelnen Messung eine Genauigkeit von $0,1$ bis $0,2^{\circ}$ erreicht.

Bei den Beobachtungen nach der statischen Methode wurden Flüssigkeitsbäder angewendet, in die die Thermometer geführt wurden. Bei den höheren Temperaturen und der dynamischen Methode wurden die Thermometer in unten geschlossene Metallrohre gesteckt, die den Deckel des Kessels durchsetzten. Diese Röhren wurden bei den niedrigeren Temperaturen mit Quecksilber, bei den höheren mit Öl gefüllt. Es wurde auf diese Weise die Temperatur sowohl im Dampf als auch im Wasser gemessen, doch ergaben beide Messungen unterhalb 100° verschiedene Resultate. Das in Wasser tauchende Thermometer zeigte bei 40° um $0,7^{\circ}$ höher als das in Dampf tauchende. Diese Differenz wurde mit steigender Temperatur geringer und verschwand bei 100° . Regnault bevorzugt die Temperaturmessung im Dampf, bei der allein ein guter Anschluß an die Messungen nach der statischen Methode stattfindet. Auch in der vorliegenden Arbeit sind nur die Temperaturmessungen im Dampf berücksichtigt.

Alle Druckmessungen wurden mit offenen Quecksilbermanometern ausgeführt. Der Druck des Quecksilberdampfes, der bei der statischen Methode in Frage kommt, kann hier vernachlässigt werden. In der Kurventafel beziehen sich die einzelnen Punkte meist auf Mittelwerte aus zwei nahe beieinander liegenden Beobachtungen. Die nach der dynamischen Methode mit dem kleinen Apparat ausgeführten Messungen sind durch Kreise kenntlich gemacht.

Regnault gibt selbst eine graphische Darstellung seiner Messungen. Er zeichnet etwa $\frac{1}{3}$ seiner Beobachtungen, die er beliebig auswählt, in ein Koordinatensystem ein, die Temperatur als Abszisse, den Druck bez. dessen Logarithmus als Ordinate. Durch die Punkte wird eine möglichst glatte Kurve hindurchgelegt. Es scheint hierbei oberhalb 100° den Punkten der Reihe z ein Vorzug vor den Punkten der Reihen x und y

gegeben zu sein. Da indessen die Unterschiede der Reihen meist innerhalb der Beobachtungsfehler liegen, habe ich in meiner Darstellung von einer willkürlichen zahlenmäßigen Bewertung der Reihen abgesehen und allen dasselbe Gewicht gegeben. Die von Regnault bei der graphischen Ausgleichung erzielte Genauigkeit beträgt, wenn man annimmt, daß er die Kurve auf $\frac{1}{20}$ Pars genau ziehen konnte (1 Pars etwa 8 mm), in der Abszisse $0,05^\circ$, ferner in der Ordinate unter 52° 0,05 mm, zwischen 0 und 100° 0,5 mm und über 100° mindestens 5 mm. Aus der graphischen Darstellung hat Regnault dann eine Anzahl von Punkten für runde Temperaturen entnommen und aus ihnen Formeln von der Gestalt

$$\log p = a + b\beta^t + c\gamma^t$$

berechnet. Die wichtigste dieser Formeln ist die von Regnault mit *H* bezeichnete, die die Beobachtungen des gesamten Gebietes befriedigend darstellt. Sie ist in meiner Kurventafel gestrichelt gezeichnet. Für die Temperaturen unterhalb 20° verläuft diese Kurve etwas zu hoch, für die Temperaturen über 100° im allgemeinen etwas zu tief.

Die Thiesensche Formel stimmt zwischen 100 und 180° mit der erwähnten Reihe *z* nahe überein, mit deren Hilfe die Konstanten der Formel bestimmt sind. Die Reihen *x* und *y* weichen stärker von der Thiesenschen Formel ab, dasselbe gilt für Reihe *z* oberhalb 180° .

Es muß hier mit einigen Worten noch eingegangen werden auf die Tafeln, die Broch¹⁾ aus den Regnaultschen Beobachtungen für den Sättigungsdruck des Wasserdampfes zwischen -30 und $+101^\circ$ ableitete. Diese Berechnung besitzt mehrere Mängel. Broch hat die Rechnung mit kleinsten Quadraten so durchgeführt, als wenn der Beobachtungsfehler nur die Druckmessung beträfe, während doch mindestens oberhalb 40° die Temperaturmessung ungenauer als die Druckmessung ist. Ferner stellt er durch ein und dieselbe Kurve alle Messungen zwischen -30 und $+101^\circ$ dar, während Regnault unter 0° wahrscheinlich Eis gehabt hat und die Spannung über Eis bis zu 0,2 mm (bei $-11,7^\circ$)²⁾ kleiner ist als die Spannung über

1) O. J. Broch, Trav. et Mém. bureau intern. 1. A. p. 19—39. 1881.

2) M. Thiesen, Wied. Ann. 67. p. 692. 1899.

Wasser. Wie wenig die gewählte Formel mit sieben Konstanten dem wahren Gesetz des Sättigungsdruckes von Wasserdampf nahe kommt, erkennt man daraus, daß die auf 130° bez. 150° extrapolierte Formel um $1,0$ bez. $4,3^{\circ}$ von den Messungen abweicht.

Die für ganze Zehnergrade von Broch berechneten Werte sind in das für alle Beobachter gemeinsame Koordinatensystem der Tafel aufgenommen und durch Kreise bezeichnet.

Wüllner und Grottrian¹⁾ haben gelegentlich einer Bestimmung des spezifischen Volumens nach der Methode der Isothermen auch einige Beobachtungen über den Sättigungsdruck des Wasserdampfes zwischen 80 und 100° ausgeführt. Der Dampf war durch Quecksilber abgesperrt, sein Druck wurde durch ein offenes Quecksilbermanometer gemessen. Die Temperaturmessung geschah durch ein Quecksilberthermometer, das unterhalb 100° durch besondere Vergleichung auf das Luftthermometer reduziert wurde. Über 100° wurde die Temperatur aus dem beobachteten Dampfdruck nach den Regnaultschen Tabellen bestimmt.

Die Verfasser fanden, daß bei wachsendem Druck der Dampf an den Gefäßwänden schon zu kondensieren begann, bevor der Maximaldruck und also die Sättigung erreicht war. Sie fanden ferner beim Wasser eine geringe Abhängigkeit des Sättigungsdruckes vom Volumen. Der Druck nahm mit abnehmendem Volumen etwas zu.

Für die Taf. III habe ich die Maximaldrucke, die im größten Volumen beobachtet wurden, herangezogen. Es wurden die Beobachtungen einzeln aufgetragen.

Battelli²⁾ hat nach der Methode der Isothermen Druck und spezifisches Volumen von überhitztem und gesättigtem Wasserdampf zwischen -6 und $+230$ sowie zwischen 310° und dem kritischen Punkt beobachtet. Der Wasserdampf wurde durch Wasser- bez. Dampfbäder geheizt. Für die höchsten Temperaturen kam Quecksilberdampf zur Anwendung,

1) A. Wüllner u. O. Grottrian, Wied. Ann. 11. p. 545—604. 1880.

2) A. Battelli, Mem. di Torino (2) 41. p. 55—76. 1891; 43. p. 63—98. 1893; Ann. chim. phys. (6) 26. p. 410—425. 1892; (7) 3. p. 408—431. 1894. Die zum Verständnis der Versuchsanordnung notwendigen Figuren sind nur im italienischen Text vollständig.

der unter erhöhtem Druck erzeugt war. Die Temperatur wurde in den Bädern gemessen, und zwar durch Quecksilberthermometer, die auf das Luftthermometer reduziert wurden, oberhalb 300° aber durch ein Thermoelement aus Eisen und Nickel, das von dem Quecksilberdampf nicht angegriffen wurde.

Der Druck wurde je nach dem Gebiet mit einem einfachen oder einem gebrochenen Quecksilbermanometer gemessen, für die höchsten Temperaturen dagegen mit einem Luftmanometer, das wegen der Abweichung vom vollkommenen Gaszustand korrigiert war. Die Kompressibilität des Quecksilbers wurde berücksichtigt, ebenso auch sein Dampfdruck, da der Wasserdampf durch Quecksilber abgeschlossen wurde.

Unterhalb 230° , wo der Dampf sich in einem Glasrohr befand, wurde festgestellt, daß ein in den Dampfraum gebrachter Spiegel bei wachsendem Druck früher beschlug, als die Isotherme umbog. Dieser Unterschied wurde besonders oberhalb 80° deutlich. Er betrug bei 230° 70 mm. Für den kritischen Punkt wurde gefunden $t = 364,3^{\circ}$, $p = 194,6$ Atm.

Battelli hat seine Beobachtungen durch drei Formeln wiedergegeben, deren jede für ein beschränktes Gebiet gilt. Die durch die Formeln dargestellten Kurven setzen sich bei 100 und 230° unstetig aneinander und überbrücken das Gebiet von 230 bis 310° , in dem keine Beobachtungen stattfanden. In die Taf. III sind die Beobachtungen einzeln eingetragen.

Caillaetet und Colardeau¹⁾ beobachteten den Sättigungsdruck des Wasserdampfes zwischen 225° und dem kritischen Punkt nach der statischen Methode. Ihr Apparat war so eingerichtet, daß oberhalb des kritischen Punktes der Dampf stets auf dasselbe Volumen gebracht werden konnte. Benutzte man bei verschiedenen Versuchen verschieden große Wassermengen, die indessen stets ausreichten, den Raum mit Dampf zu sättigen, so ergab sich der kritische Punkt dadurch zu erkennen, daß hier die für tiefere Temperaturen koinzidierenden Dampfdruckkurven divergierten. Der Dampf wurde geheizt in einem Bade, das zu gleichen Teilen aus Kalium- und Natriumnitrat bestand. Dieses Gemisch ist von 220° ab flüssig.

1) L. P. Caillaetet u. E. Colardeau, *Ann. chim. phys.* 25. p. 519—534. 1892; *Journ. de Phys.* (2) 10. p. 333—340. 1891.

Über die Temperaturmessung wird nur gesagt, daß sie nacheinander mit einem Luftthermometer und zwei Quecksilberthermometern erfolgte. Die Druckmessung geschah mit einem Wasserstoffmanometer, das mit einem offenen Quecksilbermanometer von 300 m Höhe (am Eiffelturm) verglichen war.

Die Autoren geben die Beobachtungen nur in einer graphischen Darstellung wieder, aus der zu entnehmen ist, daß die erreichte Genauigkeit etwa ± 1 Atm. beträgt. Hiernach interpolieren sie von 5 zu 5° Werte, die in der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegt sind, und nach denen die Kurve im Koordinatensystem konstruiert ist.

Für den kritischen Punkt wurde gefunden $t = 365^\circ$, $p = 200,5$ Atm.

Juhlin¹⁾ hat außer umfangreichen Beobachtungen unter 0° den Sättigungsdruck des Wasserdampfes nach der statischen Methode bis zu $+19^\circ$ gemessen. Es wurde die Druckdifferenz gegen das Vakuum bestimmt durch direktes Anvisieren der Quecksilberkuppen und Ausmessen der Höhendifferenzen mit einem Mikrometer. Es sind alle Korrekturen angebracht. Die relative Genauigkeit beträgt, in Temperatur ausgedrückt, einige hundertstel Grad. Die Formel, die der Verfasser für seine Versuche berechnet, gibt in der Nähe von 0° entschieden zu große Werte für den Druck im Vergleich mit der Beobachtung. In die Taf. III sind die Mittel aus nahe beieinander liegenden Punkten aufgenommen.

Marvin²⁾ hat ein Jahr nach Juhlin Versuche veröffentlicht, die nach derselben Methode angestellt wurden und sich bis $+26^\circ$ C. erstreckten. Es wurde festgestellt, daß in einem Rohr, das noch etwas Luft enthielt, der Druck bis zu 0,2 mm niedriger gemessen wurde, als in völlig luftfreien Röhren. Die Punkte in der Kurve sind aus dem Mittelwert von etwa vier Beobachtungen abgeleitet.

Ramsay und Young³⁾ beobachteten nach der statischen Methode die Sättigungsdrucke zwischen 120 und 270° C. Der

1) J. J. Juhlin, Bih. till Svenska Vet. Akad. Handl. 17. Afd. I. Nr. 1. 1891.

2) Ch. F. Marvin, Extrait Nr. 10 from Annual Report of the Chief Signal Officer 1891. Washington 1892. p. 351—383.

3) W. Ramsay u. S. Young, Phil. Trans. 183. p. 107—130. 1892.

Wasserdampf befand sich in einem Glasrohr, von dem bei der hohen Temperatur im Wasser etwas gelöst wurde. Der Druck wurde durch ein Luftmanometer gemessen, das wegen der Abweichung vom idealen Gaszustand nach den Beobachtungen Amagats korrigiert war. Die Temperatur wurde konstant erhalten durch Dampfbäder verschiedener organischer Flüssigkeiten, die unter bestimmtem Druck standen. Die Verfasser hatten in einer früheren Arbeit¹⁾ die Siedetemperaturen dieser Flüssigkeiten in Abhängigkeit vom Druck bestimmt und konnten nun jetzt die Drucke so regulieren, daß die heizenden Dämpfe runde Temperaturen annahmen. Die Temperatur wurde nur auf diesem indirekten Wege gemessen und bezieht sich auf das Luftthermometer.

Es wurde eine starke Abhängigkeit des Druckes von der vorhandenen Wassermenge gefunden, falls wenig Flüssigkeit und viel Dampf vorhanden war. Diesen Umstand schreiben Ramsay und Young der Tatsache zu, daß bei geringer Wassermenge der Dampf mit einer relativ großen Oberfläche der Röhre in Berührung steht und daß, wenn nun der Dampf an der Oberfläche adhärirt, der Druck bis zu gewissem Grade dadurch erniedrigt wird. Sie halten die Beobachtungen mit großen Flüssigkeitsmengen für zuverlässiger, die auch hier nur Verwendung gefunden haben. Aufgetragen sind die Mittel aus einer Reihe von Einzelbeobachtungen, die auf einige Promille übereinstimmen. Die stark abweichenden Werte bei geringer Flüssigkeitsmenge sind kleiner, und zwar betragen die Unterschiede in Temperatur bis zu einem Grad und mehr.

Wiebe²⁾ hat nach der dynamischen Methoden zwischen 82 und 100° beobachtet, die Temperatur wurde mit korrigierten Quecksilberthermometern gemessen, der Druck mit einem Quecksilberbarometer. Die Kurve enthält Mittelwerte aus vier bis sechs Beobachtungen.

Chappuis³⁾ hat zwischen 96 und 102° ebenfalls nach der dynamischen Methode beobachtet. Die Temperaturen beziehen sich auf das Gasthermometer. Er sieht indessen seine

1) W. Ramsay u. S. Young, Journ. Chem. Soc. 47. 640—657. 1885.

2) H. F. Wiebe, Zeitschr. f. Instrumentenk. 13. p. 329—335. 1893.

3) P. Chappuis, Comité int. poids et mes. Procès-verbaux 1900. p. 31—32.

Versuche nicht als endgültig an. Es werden keine Einzelbeobachtungen mitgeteilt, sondern nur eine Formel, nach der die Kurve in der Tafel gezogen ist.

Thiesen und Scheel¹⁾ haben nach der statischen Methode besonders den Sättigungsdruck bei 0° gemessen, doch geben sie auch einige Punkte über und unter 0° an. Von diesen wird gesagt, daß sie nicht die Genauigkeit des bei 0° beobachteten Punktes erreichen, aber doch zuverlässiger sind als die von Magnus und Regnault im gleichen Gebiet ausgeführten Bestimmungen. Für die Druckmessung wurde ein besonderes Verfahren ausgebildet, das sich besonders für kleine Drucke eignet und den bisherigen Methoden überlegen ist. Die Kurventafel enthält die Einzelwerte, nur bei 0° das Mittel aus drei Beobachtungen.

Knipp²⁾ hat nach der statischen Methode den Sättigungsdruck des Wasserdampfes zwischen 180° und dem kritischen Punkt gemessen. Die Temperatur wurde mit einem Thermoelement aus Platin und Kupfer beobachtet, das mittels eines Quecksilberthermometers an das Luftthermometer angeschlossen wurde. Die Druckmessung geschah mit einem Ducretetschen Manometer, das mit einem Luftmanometer verglichen war. Die Resultate sind nur in einer graphischen Darstellung gegeben, aus der zu entnehmen ist, daß die Unsicherheit der einzelnen Beobachtungen bis zu 2 Atmosphären betrug.

Die Kurve ist mit den Beobachtungen Battellis und der Kurve Cailletets und Colardeaus in dasselbe Koordinatensystem aufgenommen.

Knipp findet für den kritischen Punkt nach dem von Cailletet und Colardeau eingeschlagenen Verfahren $t = 359^{\circ}$ und $p = 205,0$ Atm.

Knoblauch, Linde und Klebe³⁾ beobachteten das spezifische Volumen des Wasserdampfes zwischen 100 und 180° nach der Methode der Isochoren. Sie heizen den in einem Glasballon durch Quecksilber abgeschlossenen Dampf durch

1) M. Thiesen u. K. Scheel, Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 3. p. 71—94. 1900.

2) Ch. T. Knipp, Phys. Rev. 11. p. 141—145. 1900.

3) O. Knoblauch, R. Linde u. H. Klebe, Mitteilungen über Forschungsarb., Ver. d. Ing., Heft 21. p. 33. 1905.

gesättigten Wasserdampf, den sie kontinuierlich strömen lassen, und dessen Druck sie bestimmen, um das spezifische Volumen im Sättigungszustand ermitteln zu können. Es handelt sich hier also um eine Beobachtung des Sättigungsdruckes nach der dynamischen Methode. Der Druck wurde an einem offenen Quecksilbermanometer abgelesen. Die Temperatur wurde durch Quecksilberthermometer gemessen, die mit einer Genauigkeit von $0,1^\circ$ auf das Luftthermometer reduziert sind. Die Verfasser stellen eine weitere Mitteilung über den Sättigungsdruck des Wasserdampfes mit genauerer Temperaturmessung in Aussicht. Die Druckmessungen, die sie vorläufig angeben, habe ich einzeln in die Kurventafel aufgenommen. In einer Zahlentafel geben sie ferner von 10 zu 10° interpolierte Werte an, die im allgemeinen etwas oberhalb der beobachteten Punkte gelegen sind. Da es indessen möglich ist, daß den interpolierten Werten eine größere Zahl von Messungen zugrunde liegt, so mag die von mir durch die mitgeteilten Beobachtungen gelegte Kurve von geringerer Bedeutung sein.

Die Tab. 2 enthält von 10 zu 10° unter a) die von den verschiedenen Beobachtern selbst interpolierten Werte, und unter b) die von mir aus der graphischen Darstellung der einzelnen Messungen abgeleiteten Werte des Sättigungsdruckes.

Wahrscheinlichste Werte des Sättigungsdruckes. Um zu entscheiden, welche Werte für den Sättigungsdruck des Wasserdampfes die wahrscheinlichsten sind, ist zu beachten, daß im allgemeinen die Beobachtungen nach der statischen Methode zu weniger zuverlässigen Werten führen, als sie die dynamische Methode liefert. Ausnehmen wird man indessen die neueren in der Nähe von 0° mit besonderer Sorgfalt ausgeführten Messungen von Jublin, Marvin sowie Thiesen und Scheel, die wenig von der Thiesenschen Formel abweichen. Die von Regnault unter 100° ausgeführten Messungen können wegen der Temperaturbestimmung durch Quecksilberthermometer nur ein geringeres Gewicht beanspruchen. Zwischen 25 und 80° fehlen einwandfreie Messungen gänzlich. In der Nähe von 100° sind die Beobachtungen von Wiebe und Chappuis maßgebend, die sich auch nur wenig von den Werten der Thiesenschen Formel unterscheiden. Über 100° haben nach der dynamischen Methode nur Regnault sowie Knoblauch,

Tabelle 2. Sättigungsdruck des
a) Nach Interpolation des Beobachters.

t C.	Formel von Thiesen		Magnus		Regnault Formel H		Wüllner und Grotian b	Battelli	
	p mm Hg	$\frac{dp}{dt}$ mm Hg ° C.							
			a	b	a	b		a	b
0°	4,581	0,3380	4,53	4,53	4,48	4,59		4,41	4,35
10	9,206	0,6168	9,18	8,96	9,05	9,12		8,84	8,83
20	17,53	1,086	17,40	17,00	17,30	17,34		16,87	16,98
30	31,82	1,826	31,60	30,98	31,50	31,55		30,75	31,04
40	55,33	2,948	54,97	54,06	54,91	55,01		53,76	54,29
50	92,52	4,590	91,97	90,87	92,02	92,20		90,45	91,26
60	149,38	6,913	148,58	147,35	148,83	149,04		146,9	147,89
70	233,67	10,11	232,61	231,48	233,11	233,47		230,8	232,08
80	355,1	14,39	353,9	353,3	354,6	355,0	355,1	352,4	353,7
90	525,8	19,98	524,8	525,2	525,5	525,8	525,8	523,7	525,0
100	760,0	27,15	760,0	762,1	760,0	760,0	760,0	760,0	760,0
110	1074,9	36,16			1075,4	1074,5		1082,9	1076,7
120	1490,2	47,28			1491,3	1489,8		1503,4	1494,0
130	2028,5	60,81			2030,3	2026,1		2042,7	2034,5
140	2715,3	77,02			2717,6	2710,7		2725,0	2721,5
150	3578,9	96,20			3581,2	3570,5		3578,3	3583,8
160	4650	118,6			4652	4635		4634	4648
170	5963	144,6			5962	5939		5919	5949
180	7555	174,3			7546	7517		7495	7520
190	9463	208,2			9443	9407		9379	9395
200	11 732	246,3			11 689	11 652		11 625	11 617
210	14 404	289			14 325	14 295		14 276	14 220
220	17 525	337			17 390	17 375		17 379	17 251
230	21 146	389			20 926	20 942		20 978	20 749
240	25 315	446						25 167	
250	30 085	510						29 951	
260	35 512	580						35 761	
270	41 650	650						43 368	
280	48 557	730						50 597	
290	56 292	820						58 666	
300	64 912	910						67 620	
310	74 484	1000						77 501	
320	85 061	1100						88 343	88 950
330	96 712	1200						100 219	100 450
340	109 500	1300						113 028	112 900
350	123 470	1500						126 924	126 450
360	138 710	1600						141 865	140 350

Wasserdampfes in mm Hg.

b) Graphisch neu interpoliert.

Cailliet und Colardeau	Juhlin		Marvin	Ramsay und Young		Wiebe		Thiesen und Scheel	Knipp	Knoblauch, Linde und Klebe		t C.
a	a	b	b	a	b	a	b	b	a	a	b	
	4,62	4,59	4,58					4,58				0°
	9,24	9,26	9,21					9,20				10
	17,46		17,54					17,51				20
												30
												40
												50
												60
						355,4	355,4					70
						526,0	526,0					80
						760,0	760,0					90
										760,0	758,7	100
				1484	1481,8					1074,3	1074,2	110
				2019	2017,7					1489	1490,2	120
				2694	2700,1					2025	2028,5	130
										2710	2715,3	140
				3568	3559,9					3567	3576,0	150
				4652	4624					4634	4642	160
				5937	5927					5939	5944	170
				7487	7507				7300	7514	7520	180
				9403	9395				9420			190
				11 625	11 639				11 800			200
				14 240	14 278				14 400			210
				17 365	17 359				17 500			220
20 900				20 936	20 926				21 100			230
24 900				25 019	25 044				25 500			240
29 800				29 734	29 740				30 300			250
35 600				35 059	35 081				35 800			260
41 800				41 101	41 118				42 600			270
48 900									50 100			280
56 600									58 400			290
65 500									67 600			300
75 200									78 400			310
86 400									91 200			320
101 100									105 600			330
112 300									121 400			340
127 300									138 500			350
143 600												360

Linde und Klebe beobachtet. Die Regnaultschen Messungen, mit denen übrigens die vorläufigen Angaben von Knoblauch, Linde und Klebe gut übereinstimmen, sind in diesem Gebiet an Genauigkeit noch nicht übertroffen worden. Aus dem Vorstehenden ist also ersichtlich, daß die besten Beobachtungen des Sättigungsdruckes bis zu 200° recht gut durch die Thiesen'sche Formel wiedergegeben werden. Unter 100° reicht das Beobachtungsmaterial nicht aus, um eine Korrektur an den Werten der Formel vorzunehmen. Über 100° gibt die Thiesen-

Tabelle 3.

Konstanten des gesättigten Wasserdampfes.

(t Temperatur, p Druck, L Verdampfungswärme, v spez. Volumen.)

t	p mm Hg	$\frac{dp}{dt}$ mm Hg ° C.	L Kal. _{15°}	v _{Clapeyron} ccm/g	v _{ideal} ccm/g	v _{ideal} - v _{Clapeyron} Proz.
0	4,581	0,3330	595,4	205 700	206 400	0,3
10	9,206	0,6168	590,2	106 200	106 500	0,3
20	17,53	1,086	585,0	57 760	57 890	0,2
30	31,82	1,826	579,6	32 900	32 980	0,2
40	55,33	2,948	574,2	19 540	19 590	0,3
50	92,52	4,590	568,6	12 050	12 090	0,3
60	149,38	6,913	562,9	7681	7721	0,5
70	233,67	10,11	557,0	5047	5084	0,7
80	355,1	14,39	551,1	3410	3448	1,0
90	525,8	19,98	545,0	2361	2391	1,3
100	760,0	27,15	538,7	1672	1700	1,6
110	1074,5	36,12	532,1	1209	1235	2,1
120	1489,3	47,23	525,6	890,4	918,9	2,6
130	2026,1	60,69	518,7	667,2	688,9	3,2
140	2710,7	76,79	511,8	507,9	527,7	3,8
150	3570,5	95,91	504,6	391,7	410,3	4,5
160	4635	118,1	497,2	306,4	323,6	5,3
170	5939	144,0	489,4	242,1	258,2	6,2
180	7517	173,4	481,5	193,6	208,7	7,2
190	9407	206,9	473,2	156,2	170,5	8,4
200	11 652	244,8	464,5	127,2	140,6	9,5

sche Formel etwas zu große Drucke bez. zu kleine Temperaturen. Man kann, bis weiteres Beobachtungsmaterial vorliegt, unter 100° die aus der Thiesenschen Formel folgenden, über 100° die nach den Regnaultschen Messungen interpolierten Werte als die wahren Sättigungsdrucke des Wasserdampfes ansehen. Den hiernach zwischen 0 und 200° von 10 zu 10° interpolierten Werten der Tab. 3 wird wahrscheinlich eine Genauigkeit von $0,1^\circ$ zukommen. Man kann dies daraus schließen, daß unter 100° eine stärkere Abweichung der wahren Sättigungsdrucke von der Formel wegen der Lage der sicheren Beobachtungen, die zwischen 0 und 25° sowie 80 — 100° vorhanden sind, ausgeschlossen erscheint und daß über 100° auch die weniger sicheren Beobachtungen von der Regnaultschen Kurve um nicht mehr als $0,15^\circ$, und zwar nach beiden Seiten abweichen.

Der Temperaturkoeffizient dp/dt . Mit Hilfe der Thiesenschen Gleichung lassen sich aus der Kurventafel auf einfache Weise die Werte von dp/dt entnehmen. Schreibt man die Formel in der Gestalt $p = f(t)$, so stellt sie den wahren Sättigungsdruck des Wasserdampfes dar, wenn man unter t nicht die wahre Temperatur, sondern eine Funktion der wahren Temperatur t_w versteht. Man erhält dann mit ausreichender Genauigkeit

$$\frac{dp}{dt_w} = \frac{dp}{dt} \left[1 - \frac{d(t_w - t)}{dt} \right].$$

dp/dt ergibt sich ohne weiteres aus der Formel und $d(t_w - t)/dt$ ist die Tangente an die in der Taf. III gezeichnete Kurve. Da bis zu 200° C. $d(t_w - t)/dt$ nicht über $0,006$ steigt, so ist dieser Differentialquotient mit genügender Sicherheit aus der graphischen Darstellung durch direktes Zeichnen der Tangente zu entnehmen. Für die auf diese Weise ermittelten Werte von dp/dt , die ebenfalls in Tab. 3 enthalten sind, wurde, wie bei dem Sättigungsdruck, unterhalb 100° die Thiesensche Formel, über 100° die Regnaultsche Kurve benutzt. Die erreichte Genauigkeit beträgt wahrscheinlich einige Promille.

Das spezifische Volumen. Um aus der Clapeyronschen Gleichung das spezifische Volumen v_1 des gesättigten Wasserdampfes abzuleiten, hat man die Werte für die Verdampfungswärme L nötig. Unterhalb 100° ist die Verdampfungswärme

gut bekannt und durch die von mir aufgestellte empirische Formel

$$L = 94,210(365 - t)^{0,31249} \text{ Kal.}_{15}$$

auszudrücken.¹⁾ Da nun bei höheren Temperaturen keine neueren Messungen über die Verdampfungswärme vorliegen und es wünschenswert war, die vorhandenen Beobachtungen des spezifischen Volumens mit einheitlich berechneten Werten zu vergleichen, bin ich so verfahren, daß ich auch für das Gebiet von 100—200° das spezifische Volumen mit den aus meiner Formel für L folgenden Werten ableitete. Wegen dieser Extrapolation wird der Fehler in den berechneten v , über 100° größer sein als unter 100°, immerhin wird man nicht zu stark gefälschten Werten gelangen, da die Formel für L so gebildet ist, daß sie den von der Thermodynamik bei der kritischen Temperatur (365°) geforderten Betrag der Verdampfungswärme ($L = 0$) richtig ergibt.

Die Verdampfungswärmen und die berechneten spezifischen Volumina sind in der Tab. 3 in den mit L und $v_{\text{Clapeyron}}$ überschriebenen Kolonnen enthalten. Daneben ist das ideale Volumen v_{ideal} eingetragen, d. h. das spezifische Volumen eines idealen Gases vom Molekulargewicht des Wassers. Setzt man die Gaskonstante $R = 0,0821$ Liter-Atmosphären²⁾, so ist

$$v_{\text{ideal}} = \frac{82,1}{18,016} \cdot \frac{760}{p} T = 3463,4 \frac{T}{p}.$$

T ist die absolute Temperatur und p der Druck in mm Hg. Für p wurden die aus Tab. 3 entnommenen Drucke eingesetzt. Die Abweichung des idealen Volumens von dem nach der Clapeyronschen Gleichung berechneten hat bei etwa 20° ein Minimum, aus dem man indessen nur schließen kann, daß dp/dt unterhalb 20° etwas zu groß, oder in der Nähe von 20° etwas zu klein ist.

Tab. 4 enthält die wichtigsten Beobachtungen des spezifischen Volumens im Vergleich mit den von mir berechneten Werten. Die Beobachtungsmethoden von Wüllner und Grotrian, Battelli, sowie Knoblauch, Linde und Klebe sind schon bei der Besprechung der Spannungsmessungen

1) F. Henning, Ann. d. Phys. 21. p. 849—878. 1906.

2) D. Berthelot, Zeitschr. f. Elektrochemie 10. p. 629. 1904.

Tabelle 4.

Spezifisches Volumen des gesättigten Wasserdampfes.

Beob- achter	<i>t</i>	$v_{\text{beob.}}$ ccm/g	$v_{\text{beob.-ber.}}$ o/o	Beob- achter	<i>t</i>	$v_{\text{beob.}}$ ccm/g	$v_{\text{beob.-ber.}}$ o/o
Wüllner und Grotrian	80,10°	3400,5	+0,1	Knoblauch, Linde und Klebe	101,43°	1598	+0,3
	80,56	3325	-0,4		102,36	1550	+0,3
	89,69	2385	-0,1		108,07	1288	+0,2
	90,36	2320	-0,5		110,71	1189,5	+0,6
	98,43	1710	-3,0		112,36	1122	-0,1
	99,84	1666	-0,9		114,75	1039	-0,4
	110,40	1207,0	+1,1		115,28	1023	-0,3
	119,50	885,0	-2,0		119,08	915,0	0,0
	134,61	580,3	-1,0		119,31	908,5	0,0
					122,06	832,8	-0,6
Perot	68,20	5747	+5,8		122,56	825,0	0,0
	88,60	2531	+2,0		126,33	740,5	0,0
	98,10	1782	±0,0		131,54	640,0	+0,2
	99,60	1657	-2,2		131,90	634,0	+0,2
	101,50	1588	-0,4		133,03	614,3	+0,2
	124,10	766	-2,9		139,08	520,4	0,0
					140,90	495,5	-0,1
Dieterici	0,00	204680	-0,5		143,00	471,0	+0,4
					143,17	466,6	-0,1
Battelli	14,91	80311	+2,6		144,06	456,6	+0,7
	21,05	55746	+2,6		149,82	395,0	+0,4
	27,15	39534	+2,8		150,25	389,7	+0,1
	57,01	8739	-0,2		153,70	358,2	+0,3
	78,52	3632	+0,7		154,19	354,0	+0,3
	99,60	1690	-0,2		157,55	325,8	+0,3
	130,32	661,5	+0,1		159,65	310,0	+0,5
	144,21	457,2	+0,6		163,71	280,9	+0,2
	182,90	187,6	+3,2		166,00	265,2	-0,2
					170,04	242,8	+0,4
Bauer	89,82	2360	-0,7		174,65	218,8	+0,4
	94,45	2003	-0,8		180,75	191,0	+0,4
	97,94	1750	-2,4		183,00	181,7	+0,3
	98,16	1742	-2,0				
	98,30	1721	-2,8				
	98,51	1704	-3,1				
	98,64	1704	-2,6				

erwähnt. Perot¹⁾ bestimmte das spezifische Volumen durch Wägung einer mit Dampf gefüllten Glaskugel. Dieterici²⁾ beobachtete mit dem Eiskalorimeter. Er ließ Wasser in einen evakuierten Raum hineinverdampfen und bestimmte die Dampfmenge aus der bei der Verdampfung gebundenen Wärme und der ebenfalls mit dem Eiskalorimeter gemessenen Verdampfungswärme. Bauer³⁾ bestimmte das spezifische Volumen aus dem Auftrieb, den eine Kupferkugel in dem Dampf ertitt. Die Versuche wurden an Orten sehr verschiedener Meereshöhe ausgeführt. Die Temperatur ist aus dem Barometerstand abgeleitet.

Resultate der Arbeit. Mit Hilfe einer von Thiesen aufgestellten Formel konnten aus den vorhandenen Beobachtungen zwischen 0 und 200° Werte für den Sättigungsdruck des Wasserdampfes abgeleitet werden, die wahrscheinlich auf 0,1° richtig sein werden. Der Temperaturkoeffizient des Sättigungsdruckes konnte in demselben Intervall auf einige Tausendstel seines Wertes berechnet werden. Hieraus wurden (mittels der Clapeyron-Clausius'schen Gleichung und einer oberhalb 100° extrapolierten Formel für die Verdampfungswärme) Werte für das spezifische Volumen des gesättigten Wasserdampfes abgeleitet, die, nach der Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu schließen, auch auf einige Tausendstel richtig sind. Derselbe Grad von Genauigkeit muß also auch den aus meiner Formel extrapolierten Werten der Verdampfungswärme zugesprochen werden.

Auf die Beziehung der Gesamtwärme zur spezifischen Wärme des Wasserdampfes, wie sie die Drosselversuche von Grindley, Griessmann und Peake ergeben, soll a. a. O. eingegangen werden. Diese Beobachtungen stehen einerseits in Übereinstimmung mit den hier gegebenen Werten der Verdampfungswärme und liefern andererseits unter Einsetzung dieser Werte wahrscheinlichere Zahlen für die spezifische Wärme des Wasserdampfes als es unter Anwendung der Regnault'schen Formel für die Gesamtwärme der Fall ist.

1) A. Perot, Ann. chim. phys. (6) 13. p. 159. 1888.

2) C. Dieterici, Wied. Ann. 38. p. 1. 1889.

3) G. Bauer, Wied. Ann. 55. p. 206. 1895.

(Eingegangen 23. Januar 1907).

2. Über die Ausdehnung fester Körper bei tiefer Temperatur; von F. Henning.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Einleitung. In der Reichsanstalt ist in den Jahren 1901 bis 1903 die lineare Wärmeausdehnung einer Reihe von Metallen¹⁾, sowie Porzellan, Glas²⁾ und Quarzglas³⁾ oberhalb Zimmertemperatur bestimmt worden. Zu diesem Zweck wurden die verschiedenen Körper als 0,5 m lange und 3—6 mm dicke zylindrische Stäbe in einem elektrischen Ofen mit horizontal verlaufender Längsachse geheizt, in dem sie bis 1000° erwärmt werden konnten. An den Enden besaßen die Stäbe Teilungen auf angeschliffenen bez. eingelegten Flächen, auf die man durch besondere Öffnungen des elektrischen Ofens mit Mikroskopen visieren konnte. Die Ablesung geschah durch Fadenmikrometer. Die Mikroskope saßen fest verbunden auf einer Nickelstahlschiene von sehr geringem Ausdehnungskoeffizienten. Die Temperatur des Ofens wurde durch ein Thermoelement angegeben.

Es war von Interesse, die Ausdehnung derselben Stäbe, die bei hohen Temperaturen untersucht sind, auch bei tiefer Temperatur zu verfolgen. Da sich als bequemstes Mittel zur Abkühlung die flüssige Luft darbot, wurde die Längenänderung der Stäbe zwischen Zimmertemperatur und etwa -191°C . beobachtet. Die Stäbe wurden in vertikaler Richtung in ein Dewargefäß gesetzt und abwechselnd bei Zimmertemperatur und der Siedetemperatur der flüssigen Luft gemessen. Eine absolute Bestimmung der Längenänderung mußte aufgegeben werden, da es unmöglich war, durch die Glaswände des Dewar-

1) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 4. p. 104. 1901; W. Dittenberger, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 46. p. 1532. 1902; Mitt. über Forschungsarbeit., Ver. d. Ing. Heft 9. p. 60. 1903.

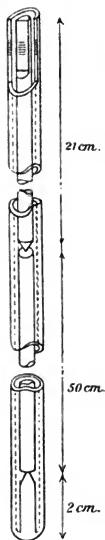
2) L. Holborn u. E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 6. p. 136. 1901.

3) L. Holborn u. F. Henning, Ann. d. Phys. 10. p. 446. 1903.

gefäßes und die flüssige Luft hindurch sichere Einstellungen auf die Teilungen der Stäbe zu erhalten. Darum wurde ein anderes Verfahren eingeschlagen, das gestattete, die Längenänderung außerhalb der flüssigen Luft an Teilen vorzunehmen, die mit dem Stab verbunden waren. Diese Methode lieferte indessen die Ausdehnung nicht direkt, da sie eine additive Konstante unbekannt läßt. Man erhielt also nur relative Werte für die Ausdehnung. Um zu absoluten Werten zu gelangen, muß die absolute Ausdehnung zwischen der Temperatur der flüssigen Luft und der Zimmertemperatur für irgend einen der untersuchten Körper bekannt sein. Da diese Bedingung erfüllt ist durch die neuerdings von Scheel¹⁾ nach dem

Fizeauschen Verfahren ausgeführten Messungen an Platin, Palladium und Quarzglas, so konnte jetzt die Umrechnung meiner im Winter 1903/1904 ausgeführten Beobachtungen auf die absoluten Werte der Ausdehnung vorgenommen werden.

Am Schluß der Arbeit ist eine Tabelle gegeben, die zur Erleichterung der Übersicht alle Resultate der an den Stäben vorgenommenen Ausdehnungsmessungen zusammenfaßt.



Methode. In ein Rohr (vgl. Figur) aus Jenaer Glas 59^{III}, das 6 mm innere Weite besaß, wurde an dem unteren Ende eine geschliffene Spitze aus demselben Glas eingeschmolzen. Auf diese Spitze wurde der zu untersuchende Stab gestellt, dessen beide Endflächen plan geschliffen waren. Der Stab trug zwei Führungsringe aus Ebonit, die ihm in dem etwas weiteren Rohr eine sichere Lage gaben. Auf die obere Endfläche des Stabes wurde ein 21 cm langer, mit Führungsringen versehener Stab aus Jenaer Glas 59^{III}, der ebenfalls eine geschliffene Spitze besaß, aufgesetzt. Das obere Ende dieses Glasstabes trug auf einer durch die vertikale Stabachse gehenden an-

geschliffenen Ebene eine Teilung. Aus dem oberen Ende des Glasrohres war ein Stück von der Form eines Halbzylinders

1) K. Scheel, Verh. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 9. p. 3. 1907.

herausgeschnitten, so daß zwei vertikal verlaufende Schliff-
flächen entstanden, deren Ebene ebenfalls durch die vertikale
Stabachse ging und deren Breite der Dicke des Glasrohres
entsprach. Diese beiden Flächen wurden ebenfalls mit Teilungen
versehen. Durch Drehen des Stabes konnten die Teilungen
auf Rohr und Stab in dieselbe Ebene gebracht werden. .

Gemessen wurde die relative Entfernung der Teilungen
voneinander bei Zimmertemperatur und der Temperatur der
flüssigen Luft. Die flüssige Luft befand sich in einem Dewar-
gefäß von 70 cm Höhe und 7 cm Durchmesser und reichte
etwa bis zur Mitte des oberen Glasstabes, so daß der Ver-
suchsstab sicher die Temperatur der flüssigen Luft annahm.

Man erhält nach dieser Methode also direkt die Längen-
änderung des Stabes, vermindert um die Längenänderung eines
gleich langen Stückes des Glasrohres, wenn man voraussetzt,
daß innerhalb desselben Querschnittes senkrecht zur Längs-
achse Rohr und Stäbe gleiche Temperatur haben und daß
Glasrohr und Glasstab gleichen Ausdehnungskoeffizienten be-
sitzen. Von der Erfüllung dieser Voraussetzungen konnte man
sich unabhängig machen, indem man unter stets nahe denselben
Bedingungen beobachtete und die Ausdehnung aller Stäbe mit
der Ausdehnung eines von ihnen, nämlich des Platinstabes,
verglich, so daß die Ausdehnung des Glasrohres lediglich als
Vergleichsglied diente und sich gänzlich heraushob.

Die Temperatur der flüssigen Luft wurde durch ein Platin-
thermometer gemessen, das mit Nr. 2 bezeichnet ist und früher¹⁾
an das Wasserstoffthermometer angeschlossen war. Die Zimmer-
temperatur wurde an einem Quecksilberthermometer abgelesen.

Zur Beobachtung der Teilungen diente ein Mikroskop mit
Fadenmikrometer, das an einer Nickelstahlschiene befestigt
war. Die Einstellung geschah nur mit dem Mikrometer. Die
beiden Teilungen *A* und *B* auf dem Glasrohr und die Teilung *C*
auf dem Glasstab bestanden aus mehreren Strichen im Ab-
stand von 1 mm. Es wurde unter möglichster Vermeidung
der Parallaxe nach der Reihe das Mikrometer auf alle Striche
der Teilungen *A*, *B* und *C* eingestellt. Die Vergrößerung des
Mikroskopes wurde jedesmal bestimmt aus dem bekannten

1) L. Holborn, Ann. d. Phys. 6. p. 242. 1901.

Datum	Temp.	Quarzglas	Glas 59m	Berliner Porzellan	Platin	Palladium	Platin-Iridium	Silber	Kupfer
Werte von M_{+16} und M_{-191} für die Höhe (in mm) der Strichgruppe des									
3.—4. Sept. 03	+ 16°		-0,610						
4. Sept.	-191		-0,597						
4.—14. Sept.	+ 16		-0,611		-0,125				
	-191		-0,600		-0,507				
15. Sept.	+ 16		-0,618		-0,134				
	-191		-0,601		-0,494				
	+ 16		-0,618		-0,143				
14.—18. Dez.	+ 16	+0,029			-0,136			+0,276	
20. Dez.	-191	+0,512			-0,515			-1,037	
18.—25. Jan. 04	+ 16	+0,025			-0,145	-0,422		+0,271	
23. Jan.	-191	+0,512			-0,520	-1,020		-1,054	
6.—24. Febr.	+ 16	+0,024			-0,152	-0,423	+0,247	+0,262	+0,467
25. Febr.	-191	+0,506			-0,523	-1,039	-0,077	-1,060	-0,537
1.—10. März	+ 16	+0,022	-0,638	+0,026	-0,160	-0,435	+0,243	+0,255	+0,467
11. März	-191	+0,500		+0,293	-0,531	-1,044	-0,083		-0,540
14.—23. März.	+ 16	+0,020	-0,637	+0,027	-0,165	-0,445	+0,238		+0,464
25. März.	-191	+0,495		+0,297	-0,531	-1,072			
28. März—6. Apr.	+ 16	+0,020	-0,639	+0,025	-0,163	-0,467			
28. April	-191	+0,497		+0,295	-0,542	-1,065			
2.—5. Mai	+ 16	+0,019	-0,640	+0,023	-0,162	-0,471			
Werte von $D = M_{-191} - M_{+16}$ für die Längenänderung der									
		+0,485	+0,014	+0,266	-0,377	-0,597	-0,322	-1,310	-1,004
		0,487	0,015	0,271	0,357	0,610	0,323	1,321	-1,006
		0,483	0,017	0,271	0,374	0,604		1,319	
		0,479			0,371	0,616			
		0,475			0,367	0,596			
		0,477			0,368				
					0,367				
					0,379				
Mittel		+0,481	+0,015	+0,270	-0,370	-0,605	-0,323	-1,317	-1,005
Länge der Stäbe bei 16°		501,1	500,8	499,6	499,3	500,1	499,8	502,8	500,0
Ausdehnung geg. d. Glasrohr bei 1 m Länge D'		+0,960	+0,030	+0,540	-0,742	-1,210	-0,646	-2,620	-2,010
Ausdehnung geg. Platin bei 1 m Länge $D' - D'_{Pt}$		+1,702	+0,772	+1,282	0,000	-0,468	+0,096	-1,878	-1,268

1.

Nickel	Aluminium	Konstantan	Bronze	Messing	Gußeisen „G K“	Gußeisen „A“	Flußeisen	Schweißeisen	Flußstahl	Temp.
--------	-----------	------------	--------	---------	-------------------	-----------------	-----------	--------------	-----------	-------

Glasstabes über der Strichgruppe des Glasrohres bei + 16 und - 191° C.

										+ 16°
										- 191
										+ 16
										- 191
										+ 16
										- 191
										+ 16
	+ 0,146									+ 16
	- 1,307									- 191
- 0,229	+ 0,139	+ 0,129								+ 16
- 0,827	- 1,311	- 0,652								- 191
- 0,239	+ 0,139	+ 0,133		+ 0,391						+ 16
		- 0,661		- 0,862						- 191
- 0,248	+ 0,134	+ 0,127		+ 0,388	- 0,304					+ 16
- 0,839		- 0,673		- 0,864	- 0,736					- 191
- 0,245		+ 0,124	+ 0,052	+ 0,389	- 0,315	+ 0,406	- 0,596	- 0,453	- 0,149	+ 16
			- 1,057		- 0,746	- 0,022	- 1,073	- 0,930	- 0,606	- 191
			+ 0,050		- 0,317	+ 0,400	- 0,597	- 0,449	- 0,149	+ 16
			- 1,050		- 0,742	- 0,020	- 1,065	- 0,924	- 0,601	- 191
			+ 0,050		- 0,313	+ 0,399	- 0,595	- 0,451	- 0,151	+ 16

Stäbe relativ zu einem gleich langen Stück des Glasrohres.

- 0,593	- 1,450	- 0,783	- 1,108	- 1,252	- 0,426	- 0,425	- 0,476	- 0,479	- 0,457
0,592	1,450	791	1,100	1,253	430	0,420	- 0,469	0,474	0,451
		799			427				

- 0,593	- 1,450	- 0,791	- 1,104	- 1,253	- 0,428	- 0,423	- 0,473	- 0,477	- 0,454
499,2	501,6	499,8	499,7	502,0	500,1	500,0	498,9	499,0	499,5 mm
- 1,188	- 2,892	- 1,582	- 2,210	- 2,496	- 0,856	- 0,846	- 0,948	- 0,956	- 0,908
- 0,446	- 2,150	- 0,840	- 1,468	- 1,754	- 0,114	- 0,104	- 0,206	- 0,214	- 0,166

Abstand der Striche einer Teilung. Die Ablesungen für zusammengehörige Striche der Teilungen *A* und *B* wurden gemittelt und von der Ablesung eines bestimmten in der Nähe befindlichen Striches der Teilung *C* subtrahiert. Im allgemeinen ergaben sich bei jeder Beobachtung entsprechend der Anzahl der sichtbaren Striche fünf solcher Differenzen von nahe gleicher Größe, die zu einem Mittelwert *M* vereinigt wurden. Zu jedem Stab und jeder Temperatur gehörte eine solche Zahl *M*, die also angibt, um wieviel Millimeter im Mittel die Strichgruppe *C* höher liegt als die Strichgruppe *A B*. Für *M* wurde unter gleichen Bedingungen innerhalb der Beobachtungsfehler immer dieselbe Größe gefunden, auch wenn der Stab inzwischen aus dem Glasrohr herausgenommen und wieder von neuem eingesetzt wurde. Deshalb konnte so verfahren werden, daß eine Gruppe von Stäben zunächst bei Zimmertemperatur und dann bei der Temperatur der flüssigen Luft gemessen wurde. Abgesehen von den Vorversuchen im September 1903 gehörte zu jeder Messungsreihe außer Platin noch Quarzglas.

Ausdehnung im Vergleich mit Platin. Die Ergebnisse der Messungen sind in Tab. 1 zusammengestellt, die die Werte von *M* für +16 und -191° enthält. Auf diese Temperaturen, die den Mittelwerten aller beobachteten Temperaturen sehr nahe kommen, wurden alle Werte von *M* reduziert, indem der Ausdehnungskoeffizient innerhalb dieses Temperaturgebietes in erster Näherung als konstant angesehen wurde. Die in der Tabelle enthaltenen Zahlen für *M*₁₆ sind Mittelwerte aus meist zwei Beobachtungen. *M*₋₁₉₁ sind im allgemeinen Einzelwerte, nur beim Platin, das zum Anfang und zum Schluß jeder Messungsreihe beobachtet wurde, Mittel aus zwei Werten. Um nun die Ausdehnung eines Stabes im Vergleich zum Glasrohr zu erhalten, hat man $D = M_{-191} - M_{16}$ zu bilden. Für *M*₁₆ wurde hierbei stets der Mittelwert der beiden *M*₁₆ eingesetzt, die das zugehörige *M*₋₁₉₁ einschließen. Zieht man von allen auf die gleiche Länge von 1 m umgerechneten Werten von *D*, die mit *D'* bezeichnet werden mögen, das zu Platin gehörige *D*_{Pt} ab, so hat man die Ausdehnung der Stäbe im Vergleich zu Platin. Man erhält also die absolute Ausdehnung eines Stabes von 1 m Länge zwischen den Temperaturen +16° und -191°, wenn man die absolute Ausdehnung eines 1 m langen Platin-

stäbes im gleichen Temperaturintervall zu $D' - D'_{Pt}$ addiert. Die Werte von D , D' und $D' - D'_{Pt}$ sowie die Länge der Stäbe bei $+16^\circ$ sind in Tab. 1 enthalten.

Absolute Ausdehnung. Die absolute Ausdehnung des Platins zwischen $+16$ und -191° habe ich entnommen aus der von Scheel aufgestellten kubischen Formel, die sich auf Messungen bei etwa -190 , $+16$, $+56$ und $+100^\circ$ stützt (l. c. p. 23). Hiernach ergibt sich die lineare Ausdehnung von 1 m Platin zwischen $+16^\circ$ und -191° zu $-1,649$ mm. Unter Einsetzung dieser Zahl erhält man aus meinen Messungen für die Ausdehnung eines 1 m langen Stabes aus Palladium bez. Quarzglas zwischen $+16$ und -191° $-2,117$ bez. $+0,053$ mm, während man für die gleichen Größen aus Scheels Beobachtungen nach der Fizeauschen Methode $-2,119$ bez. $+0,041$ mm berechnet. Der mittlere Ausdehnungskoeffizient des Quarzglases zwischen -191 und $+16^\circ$ ist also, wie schon Scheel bemerkt, negativ. Die absolute Ausdehnung aller Stäbe zwischen $+16$ und -191° ist in Tab. 2 enthalten.

Die Werte M der Tab. 1 zeigen meist einen kleinen Gang in dem Sinne, daß sie mit der Zeit abnehmen. Der Grund dafür kann verschiedener Art sein. Es ist möglich, daß die Spitzen des Glasrohres und des Glasstabes sich mit der Zeit ein wenig abgeschliffen oder in die Stäbe etwas eingedrückt haben. Die Spuren der Glasspitzen hatten sich auf den ebenen Endflächen der Stäbe aus weicherem Material abgezeichnet. Ferner kann auch eine geringe dauernde Verkürzung der Stäbe eingetreten sein.

Zusammenfassung der Resultate. Tab. 2 enthält die Resultate aller an den Stäben vorgenommenen Ausdehnungsmessungen innerhalb der auf runde Zahlen reduzierten Temperaturgrenzen, die den Beobachtungen möglichst nahe kommen. Dabei ist die Länge der Stäbe bei 16° zu 1 m angenommen. Für die Temperaturen oberhalb 16° sind die Längenänderungen aus den für die Stäbe früher abgeleiteten Formeln (l. c.) ausgerechnet und also die ausgeglichenen Beobachtungen zugrunde gelegt. Für Nickel und Aluminium aber haben diese Formeln in gewissen Temperaturgebieten keine Gültigkeit. Hier wurde deshalb auf die direkten Beobachtungen zurückgegangen.

Die auf Glas bezüglichen Zahlen sind für Temperaturen

Tabelle 2.
Lineare Ausdehnung, gemessen in mm, von 1 m langen Stäben zwischen den Temperaturen +16 und $t^{\circ}\text{C}$.

	$t =$	-191	+250	+375	+500	+625	+750	+875	+1000°
Quarzglas		+0,053	+0,126		+0,261		+0,396		+0,531 mm
Jenzer Glas 59 ^m		-0,877	(1,429)	(2,236)	(3,072)				
Berliner Porzellan (gepreßt)		-0,387	0,786	1,257	1,764	2,308	2,768	3,471	4,271
Platin		-1,649	2,158		4,623		7,254		10,051
Palladium		-2,117	2,867		6,195		9,796		13,671
Platin-Iridium (80 Pt, 20 Ir)		-1,553	2,006		4,321		6,813		9,483
Silber		-3,527	4,574		10,040		16,105	19,362	
Kupfer		-2,917	4,011	6,335	8,784	11,860		11,737	16,553
Nickel		-2,095	3,268	5,291	7,336				
Aluminium		-3,739	5,720	9,429	13,149	17,239*			
Konstantan (60 Cu, 40 Ni)		-2,489	3,716	5,882	8,174				
Bronze (84 Cu, 9 Zn, 6 Sn)		-3,117	4,259	6,730	9,335				
Messing (62 Cu, 38 Zn)		-3,403	4,637	7,506					
Guß Eisen „G K“ (39% C)		-1,763	2,63	4,33	6,13	8,547			
Guß Eisen „A“ (49% C)		-1,753	2,677	4,387	6,28	8,167	10,51	12,90	
Fluß Eisen „Fl 2“ (0,1% C)		-1,855	3,01	4,91	6,85	8,97			
Schweiß Eisen „Sch 2“ (0,1% C)		-1,863	3,03	4,89	6,84	8,94	10,97		
Flußstahl „St 1“ (0,5% C)		-1,815	2,94	4,76	6,71	8,80	9,79		

* gültig für
610°

oberhalb 16° eingeklammert, da für die Messungen in diesem Gebiet ein anderer Stab verwendet wurde als für die Beobachtungen bei tiefer Temperatur. Der Grund hierfür lag darin, daß der früher benutzte Stab, der an den Enden abgerundete Kuppen besaß, durch das Anschleifen ebener Endflächen zu stark hätte verkürzt werden müssen. Die bei -191° angestellten Beobachtungen fügen sich den für hohe Temperaturen gültigen Formeln nicht ein. In den tiefen Temperaturen ist die Längenänderung stets geringer als man nach der Extrapolation erwartet. Eine Ausnahme hiervon bildet jedoch *Messing*, dessen Länge sich stärker änderte als die Extrapolation erwarten ließ.

(Eingegangen 30. Januar 1907.)

3. *Über die Dämpfung und Energieausnutzung einiger Senderanordnungen der drahtlosen Telegraphie*¹⁾; von H. Brandes.

Erster Abschnitt.

Bestimmung des logarithmischen Dekrements einfacher und
mehrfacher Sender ohne Funkenstrecke.

1. Das logarithmische Dekrement der Schwingungsamplituden eines stabförmigen Leiters, soweit es durch die Strahlung bedingt ist, wurde von M. Abraham²⁾, soweit es eine Folge des Leitungswiderstandes ist, von A. Sommerfeld³⁾ theoretisch ermittelt. Die Dämpfung durch Strahlung ergab sich wesentlich größer als die durch Entwicklung Joulescher Wärme. Für einen Kupferdraht von 50 m Länge bei einem Durchmesser von 1 mm berechnet zum Beispiel M. Abraham das logarithmische Dekrement durch Strahlung zu $\frac{1}{6}$, das durch Joule-Wärme zu $\frac{1}{30}$, somit ist letzteres nur etwa 6 Proz. des Gesamtdekrements.

Praktische Erfahrungen bei der abgestimmten drahtlosen Telegraphie, bei der man es ja meistens nicht mit stabförmigen Leitern im freien Raume als Sendern zu tun hat, legen die Vermutung nahe, daß die Dekremente, welche die Abrahamsche Formel ergibt, meistens zu groß ausfallen gegenüber den wirklich auftretenden Dekrementen. Es ist deshalb von Interesse, zu sehen, wie groß bei denjenigen Anordnungen der drahtlosen Telegraphie, die dem Abrahamschen stabförmigen Leiter am nächsten stehen — den einfachen Sendern —, sich die Abweichungen von dem theoretischen Werte etwa ergeben; ferner, die logarithmischen Dekremente zu bestimmen für mehrfache Sender, die in Abständen von

1) Verkürzter Abdruck einer Inaugural-Dissertation Straßburg i/E., Juli 1906.

2) M. Abraham, Physik. Zeitschr. 2. p. 329. 1900—1901.

3) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. p. 233. 1899.

einigen Metern voneinander angebracht und an den äußersten Enden miteinander verbunden sind, wie solches bei den sog. Harfen- und Kegelsendern geschieht.

2. Für die Versuche waren auf der Hofseite des physikalischen Instituts an dessen Turmbau drei blanke Kupferdrähte von ca. 37 m Länge hinaufgeführt und an Auslegern gut isoliert befestigt, so daß sie 3—3,5 m von der Gebäudewand entfernt waren. Ihr gegenseitiger Abstand betrug ungefähr 3,5 m; zwei der Drähte hatten einen Durchmesser von 1,4 mm, einer einen solchen von 2 mm. Drei entsprechende Drähte waren als Symmetriedrähte horizontal über den Hof gespannt in etwa 2 m Entfernung vom Erdboden und in einem gegenseitigen Abstand von ca. 30 cm. Sämtliche Drähte wurden durch Bohrungen in zwei geeigneten Fensterrahmen mittels Hartgummiröhren in das Arbeitszimmer eingeführt.

Bemerkt muß noch werden, daß im Turm, für Zwecke des Instituts, einige elektrische Leitungen teils frei, teils in armiertem Bergmannrohr verlegt waren. Auch waren Gas- und Wasserleitung bis zu ziemlicher Höhe im Turm hinaufgeführt. Im Gegensatz zu den Anordnungen der Praxis, bei denen die eisernen Spannseile des hohen Holzmastes gegen Erde isoliert werden, waren hier also einige mit Erde verbundene Metallmassen in der Nähe.

3. Die Messung der Senderdekremente erfolgte nach der zuerst von V. Bjerknes¹⁾ ausgearbeiteten Resonanzmethode. Die hierfür getroffene Anordnung ergibt die Fig. 1. In ihr bedeutet C_1 eine Kapazität aus zwei Leidener Flaschen aus gutem englischen Glase, die mit der Stimmgabelmethode zu 3040 cm bestimmt war. C_2 ist ein Kondensator mit Paraffinöl als Dielektrikum. Letzterer war regulierbar, und zwar von dem Typus, wie ihn die Gesellschaft für drahtlose Telegraphie in ihren Wellenmessern²⁾ verwendet. Die Eichung des Ölkondensators wurde durch Vergleichung in der Brücke unter Benutzung von Wechselstrom und Telephon mit einem Luftkondensator bekannter Kapazität und gleicher Bauart bewerkstelligt. Die Funkenlänge konnte wegen des geringen

¹⁾ V. Bjerknes, Wied. Ann. **44**, p. 85. 1891; **55**, p. 121. 1895.

²⁾ Vgl. J. Dönitz, Elektrotechn. Zeitschr. **24**, p. 920. 1903.

Plattenabstandes im Ölkondensator nicht über 4 mm gesteigert werden. Die Funken sprangen zwischen Zinkkugeln über. Zum Laden der Flaschen diente ein Induktor mit Turbinenunterbrecher. Aus dem Braunschen Schwingungskreise S_1 wurde in sehr loser Koppelung auf ein Drahtviereck des Sendersystems S_2, S_3 induziert, das als Resonanzsystem diente. Um von direkten Induktionswirkungen auf die eigentliche Meßanordnung frei zu werden, waren zwei sehr gut isolierte

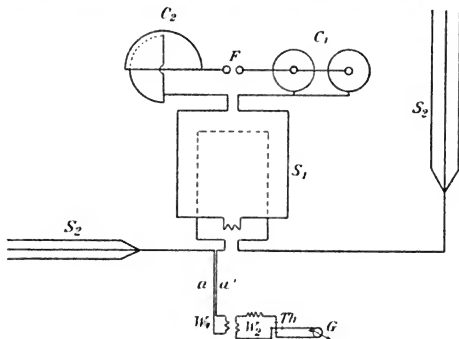


Fig. 1.

Drähte a und a' dicht aufeinander gelegt aus dem Sendersystem herausgeführt und endigten in zwei Windungen W_1 von etwa 10 cm Windungsdurchmesser. Aus diesen wurde auf einige Windungen W_2 induziert, die ihrerseits mit dem zunächst verwandten Bolometer Paalzow-Rubensscher¹⁾ Ausführung unter Vorschaltung einer möglichst geschlossenen Selbstinduktion von 2500 cm zu einem Stromkreise geschaltet wurden, dessen Gesamtselfinduktion sich dann auf etwa 3000 cm belief. An Stelle des Bolometers wurde später nur noch ein Vakuumthermoelement nach Klemenčič benutzt, welches in ähnlicher Weise hergestellt war, wie es von mir bereits an anderer Stelle²⁾ beschrieben wurde. Als Galvanometer diente

1) A. Paalzow u. H. Rubens, Wied. Ann. 37. p. 529. 1889.

2) H. Brandes, Physik. Zeitschr. 6. p. 503. 1905.

ein vierspüliges Instrument von Rubens-du Bois mit 5 Ohm Spulenwiderstand und mit einer Empfindlichkeit von 6 bis $7 \cdot 10^{-8}$ Amp. bei etwa 1,25 m Skalenabstand.

4. Wie vorstehend bemerkt und aus der Fig. 1 ersichtlich ist, wurde das thermische Instrument nicht direkt in den Resonanzkreis eingeschaltet. Bezeichnen wir mit i_2 die momentane Intensität des Stromes im Bolometerkreis, mit i_1 diejenige im Resonanzsystem S_2 an der Stelle der Spule W_1 , so sind die Angaben des Galvanometers zunächst proportional

$$w_2 \int_0^{\infty} i_2^2 dt,$$

wo w_2 den Widerstand des Bolometerdrahtes für die jeweilige Schwingungszahl bedeutet. w_2 ist nun im vorliegenden Falle bei den verwandten außerordentlich dünnen Drähten in ziemlich weiten Grenzen von der Schwingungszahl so gut wie unabhängig, so daß die Galvanometerablesungen bei konstanter Unterbrechungszahl ein Maß für $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$ ergeben für den ganzen Bereich der für die Versuche überhaupt in Betracht kommenden Schwingungszahlen. Daß auch andere Ursachen keine merkbare Abweichungen von der verlangten Proportionalität mit $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$ hervorriefen, wurde durch Prüfung mit Gleichstrom wahrscheinlich gemacht.

Für die Aufnahme der Resonanzkurve brauchen wir aber ein Maß für den thermischen Integraleffekt an der Stelle W_1 des Resonanzsystems S_2 , an welcher wir i_1 als quasistationär betrachten dürfen. Es bleibt also der Nachweis zu führen, daß

$$\int_0^{\infty} i_2^2 dt = c \int_0^{\infty} i_1^2 dt \quad c = \text{konst.}$$

ist, bez. unter welchen beschränkenden Bedingungen. Wir setzen nun $2\delta_2 = w_2/p_2$ und entsprechend $2\delta_1 = w_1/p_1$, wo in w_1 auch ein der Dämpfung durch Strahlung äquivalenter Widerstand einbezogen gedacht ist. p_1 und p_2 bedeuten die Selbstinduktionskoeffizienten vom System S_2 bez. vom Stromkreis mit dem thermischen Meßinstrument. Es gilt dann, wie

von Hrn. Papalex¹⁾ bereits abgeleitet wurde, die verlangte Proportionalität so lange als

$$\varepsilon = \frac{4\delta_2(\delta_1 + \delta_2)}{\delta_1^2 + \nu_1^2} \text{ klein gegen } 1.$$

ν_1 ist in unserem Falle ca. $2\pi \cdot 2 \cdot 10^6$, $\delta_2 = w_2/2p_2 = \frac{1}{3}\nu_1$. Nehmen wir noch willkürlich das größte zu bestimmende logarithmische Dekrement $b_1 = 0,5$ an, somit δ_1 zu $\frac{1}{2}\nu_1$, so ergibt sich $\varepsilon = \text{ca. } \frac{1}{8}$. Es ist die gestellte Bedingung völlig hinreichend erfüllt, zumal bei der Aufnahme von Resonanzkurven praktisch nur sehr geringe relative Änderungen der Schwingungszahlen in Betracht kommen.

5. Um die sog. Resonanzkurve zu erhalten, muß die Periode des Schwingungskreises oder des Resonanzkreises²⁾ meßbar veränderlich sein, während im Resonanzkreise etwa der thermische Integraleffekt der Schwingungen gemessen wird. Der Resonanzkreis ist hierbei so lose mit dem primären Schwingungskreise zu koppeln, daß seine Rückwirkung auf den Primärkreis unmerklich wird. Dies Erfordernis setzt Meßmethoden von ziemlich hoher Empfindlichkeit voraus, die natürlich *et. par.* um so empfindlicher werden müssen, je geringer die Energie des Schwingungskreises wird. Die gewöhnlich gebrauchten Luftthermometer genügen hier, wie ich an einem Wellenmesser der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie unter Zuhilfenahme empfindlicherer Methoden nachweisen konnte, fast in keinem der gewöhnlich vorliegenden Fälle mehr. Aufmerksam gemacht wurde hierauf übrigens schon früher von J. Zenneck.³⁾

Bei den vorliegenden Messungen wurde die Periode des Schwingungskreises durch Änderung der Kapazität des Ölkondensators C_2 (Fig. 1) variiert. Da die Kapazität der beiden Leidener Flaschen C_1 bekannt war, ebenso die jeweils eingestellte Kapazität C_2 , so ließ sich die resultierende Kapazität C berechnen aus der Beziehung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

1) N. Papalex, Inaug.-Dissertation Straßburg i/E. p. 5. 1904; Ann. d. Phys. 14. p. 756. 1904.

2) Vgl. hierzu J. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen und drahtlose Telegraphie p. 591—602. Stuttgart 1905.

3) J. Zenneck, l. c. p. 612.

und damit auch — bei konstant gehaltener Selbstinduktion — die relative Änderung der Periodenzahl bezogen auf die zum Maximalausschlag des Meßinstrumentes (dem Resonanzausschlag) gehörende Periodenzahl (Resonanzperiodenzahl).

Eine graphische oder tabellarische Darstellung, welche den thermischen Effekt, ausgedrückt in Bruchteilen des Resonanzeffektes, als Funktion der relativen Änderung der Resonanzperiodenzahl enthält, wird nach Bjerknes speziell als Resonanzkurve bezeichnet. Die Resonanzperiodenzahl braucht im allgemeinen nicht mit dem Isochronitätspunkt zusammenzufallen. Ist jedoch die Summe der logarithmischen Dekremente $b_1 + b_2$ von Schwingungs- und Resonanzkreis klein gegen 2π , dann fallen diese beiden Punkte sehr nahezu zusammen und die Bestimmung der logarithmischen Dekremente vereinfacht sich dann wesentlich.¹⁾ Der obere Teil der Resonanzkurve verläuft symmetrisch zur Isochronitätsordinate und die Bjerknes'sche Formel²⁾ für die Summe der beiden Dekremente läßt sich — zugleich mit etwas anderen Bezeichnungen — schreiben

$$b_1 + b_2 = 2\pi \left(1 - \frac{n}{n_0}\right) \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_0 - \alpha}}.$$

Hierin bedeutet n_0 die Resonanzperiodenzahl, α_0 den Resonanzausschlag, n und α sind zwei zusammengehörende Werte von Periodenzahl und Ausschlag.

Bleibt in dem veränderlichen Kreise die Selbstinduktion konstant und wird nur die Kapazität variiert, so ist, wenn C_0 der Periodenzahl n_0 und ebenso C der Periodenzahl n entspricht

$$1 - \frac{n}{n_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{C_0 - C}{C_0}},$$

oder angenähert

$$1 - \frac{n}{n_0} = \frac{1}{2} \frac{C_0 - C}{C_0},$$

1) Der symmetrische Verlauf der Resonanzkurve oder das Zusammenfallen von Isochronitätspunkt und Resonanzperiodenzahl wird begünstigt durch Messung des thermischen oder des dynamometrischen Effektes an Stelle des elektrometrischen, welcher von V. Bjerknes vorwiegend berücksichtigt wurde. Durch Versuche ist dies Ergebnis der Theorie bereits von Sten Lagergreen belegt. Vgl. Sten Lagergreen, Über elektrische Energieausstrahlung p. 37—43. Stockholm 1902; vgl. hierzu weiter auch die ausführlichen Darlegungen in J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen etc. I. c.

2) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 149. 1891.

falls man die höheren Potenzen von $(C_0 - C)/C_0$ gegen die erste vernachlässigt, was bei gut ausgesprochener Resonanz zulässig ist.

Zeichnet man jetzt eine Kurve, welche die Galvanometerausschläge als Funktion der Kapazität darstellt, so läßt sich aus dieser „Kurve der Ausschläge“ unmittelbar die Summe der Dekremente mit für einen hinreichenden Genauigkeit entnehmen.

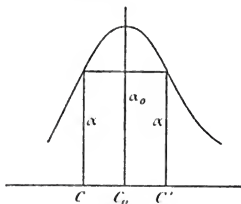


Fig. 2.

Die Fig. 2 stelle eine derartige Kurve dar. Wir schreiben α einen bestimmten Wert $\alpha = \alpha_0/k$, wo $k > 1$, vor und suchen die zu diesem Wert gehörige Kapazität C auf, dann ist

$$b_1 + b_2 = \frac{C_0 - C}{C_0} \pi \sqrt{\frac{1}{k-1}}.$$

Bei symmetrisch verlaufender Kurve möge demselben α ein zweiter Wert C' entsprechen. Es ist dann $C' > C_0 > C$ und $C_0 - C = C' - C_0$ und somit weiter

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= \frac{C' - C}{C_0} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{k-1}} \\ &= \frac{C' - C}{C_0} K. \end{aligned}$$

Der Faktor K hängt von dem willkürlichen Parameter k ab. Wir stellen ihn für verschiedene uns passend erscheinende Werte k tabellarisch dar:

$\frac{1}{k} = \frac{\alpha}{\alpha_0}$	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50
$\frac{1}{k-1}$	9	4	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
K	4,712	3,142	2,721	2,399	1,924	1,571

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß eine angenäherte Bestimmung des Dekrements mit für die Praxis hinreichender Genauigkeit nach dem beschriebenen Verfahren auch möglich ist, ohne daß die Kurve der Ausschläge direkt gezeichnet vorzuliegen braucht. Zu diesem Ende bestimmt man zunächst den Resonanzausschlag α_0 und die Resonanzkapazität C_0 , ändert die

Kapazität zuerst nach kleineren, dann nach größeren Werten als C_0 so lange, bis das Galvanometer einen bestimmten Bruchteil des Resonanzausschlages angibt — etwa $\alpha = 0,75 \alpha_0$ — und hat damit alle Daten, um aus der Beziehung

$$b_1 + b_2 = \frac{C' - C}{C_0} K$$

die Summe der Dekremente zu berechnen.¹⁾

6. Die Kapazität des Ölkondensators C_2 ließ sich ausdrücken durch $C_1 = (5,3 + a)38$ cm, wobei a die Einstellung und daher 5,3.38 cm die Anfangskapazität bei der Stellung 0 des Kondensators bedeutet. Auch die Kapazität der Leidener Flaschen C_1 wurde in Skalenteilen des Ölkondensators gemessen, so daß in den folgenden Tabellen den Kapazitätsangaben die willkürliche Einheit von 38 cm zugrunde liegt.

Bei den Messungen selbst wurde in der Weise verfahren, daß die Kapazität C_2 zuerst von größeren nach kleineren Werten variiert wurde, dann umgekehrt, so daß die angegebenen Ausschläge stets das Mittel aus mindestens zwei Meßreihen darstellen.

Ob bei den Bestimmungen an einem Draht die anderen in der Nähe waren oder nicht, machte keinen merklichen Unterschied für das Dekrement. Selbstredend durften sie nicht geerdet oder mit ihrem Symmetriedraht verbunden sein.

Die mitgeteilten Versuche wurden sämtlich an trockenen Tagen vorgenommen. Sie zeigten alsdann gute Übereinstimmung untereinander.

Für jeden der untersuchten Fälle soll im folgenden eine Meßreihe mitgeteilt werden.

Die Wellenlänge änderte sich bei den mehrfachen Drähten gegenüber dem einfachen Draht, bei zwei Drähten etwa um 10 Proz., bei drei Drähten etwa um 18 Proz. Es ist dies wohl wesentlich darauf zurückzuführen, daß etwa 5—6 m einfachen Drahtes zwischen den Verzweigungspunkten der mehrfachen Sender- und Symmetriedrähte lagen. Um mit der Regulierbarkeit des Ölkondensators auszukommen, der aus Isolationsgründen nur etwa vom Skalenteil 100 an benutzt wurde, mußte deshalb bei mehrfachen Sendern gegenüber

1) Ein dem beschriebenen Verfahren ähnliches wurde von P. Drude verwandt und beschrieben: Ann. d. Phys. 15. p. 709—724. 1904.

dem einfachen die Selbstinduktion des Primärkreises etwas verändert werden.

I. Ein Sender, Drahtdurchmesser 1,4 mm.

<i>C</i> in Skt.	43,5	44,5	45,5	46,4	47,2	48	48,8	49,6	50,3	51
α	31,7	47,5	64,5	73,5	74	65	54	43	35	29

$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	$b_1 + b_2$
0,90	0,211
0,80	0,215
0,75	0,215
0,70	0,218
0,60	0,212

Mittel: 0,21₄

II. Ein Sender, Drahtdurchmesser 2 mm.

<i>C</i> in Skt.	42,4	43,5	44,5	45,5	46,4	47,2	48	48,8	49,6	50,3
α	27	40,5	56	64	65	57,2	47	38,2	31	26

$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	$b_1 + b_2$
0,90	0,226
0,80	0,226
0,75	0,225
0,70	0,232
0,60	0,230

Mittel: 0,22₃

III. Zwei Sender, 7 m Abstand, Durchmesser 1,4 mm.

<i>C</i> in Skt.	44,5	45,5	46,4	47,2	48	48,8	49,6
α	23,4	30,6	38,8	44,4	49,7	52,6	52,8
<i>C</i> in Skt.	50,3	51	51,6	52,8	53,9	54,9	55,8
α	49,2	45,4	41,8	34,2	27,3	23,4	20,5

$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	$b_1 + b_2$
0,90	0,277
0,80	0,281
0,75	0,301
0,70	0,297
0,60	0,303

Mittel: 0,29₄

IV. Zwei Sender, 3,5 m Abstand, Durchmesser 1,4 und 2 mm.

C in Skt.	46,6	47,2	48	48,8	49,6	50,8	51	51,6
α	28,8	35,8	41,4	49,4	54	56	57,4	55,2
C in Skt.	52,2	52,8	53,9	54,9	55,8			
α	53,1	49,4	43,5	34,3	30			

$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	$b_1 + b_2$
0,90	0,296
0,80	0,309
0,75	0,305
0,70	0,304
0,60	0,299

Mittel: 0,30₃

V. Drei Sender, Durchmesser je zwei 1,4 mm, einer 2 mm, Abstand je 3,5 m.

C in Skt.	45,5	46,4	47,2	48	48,8	49,6	50,8	51
α	47	57	67	74	80	87	88	87,7
C in Skt.	51,6	52,2	52,8	53,9	54,9	55,8		
α	84	80	74	63,5	54	48,3		

$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	$b_1 + b_2$
0,90	0,351
0,80	0,349
0,75	0,346
0,70	0,348
0,60	—

Mittel: 0,34₈

7. In gleicher Weise wurde mit Hilfe eines geschlossenen Resonanzkreises mit Luftkondensator die Summe der Dekremente des Schwingungskreises gleich b_2 und des Resonanzkreises gleich b_3 bestimmt. Es ergab sich

$$b_2 + b_3 = 0,112.$$

Das Dekrement des geschlossenen Resonanzkreises läßt sich abschätzen auf etwa $b_3 = 0,012$, so daß sich als Dekrement des verwandten Kondensatorkreises ergibt

$$b_2 = 0,100.$$

Unter Berücksichtigung dieses Wertes erhalten wir folgende Zusammenstellung für die Dekremente der untersuchten Senderanordnungen:

	1. Sender		2. Sender		3. Sender
	I	II	III	IV	V
b	0,11 ₄	0,12 ₈	0,19 ₂	0,20 ₈	0,24 ₈

8. Die Zahlen für die Dekremente zeigen

1. daß das logarithmische Dekrement eines einfachen linearen Senders unter Verhältnissen, mit denen praktisch zu rechnen ist, wesentlich kleiner sein kann, als es die Theorie für einen linearen Sender im freien Raume ergibt.

Die Rechnungen von M. Abraham würden für den Sender von 37 m Länge und 1,4 mm Durchmesser ein Dekrement von $b = 0,224$ verlangen, für den von 2 mm Durchmesser ein solches von $b = 0,232$.

Sie zeigen ferner

2. daß das Strahlungsdekrement durch Verwendung mehrfacher Sender nicht unwesentlich gesteigert werden kann.

9. Das letztere Ergebnis läßt sich aus den Untersuchungen M. Abrahams über einen einfachen linearen Sender voraussehen. Denken wir uns zwei gleiche Sender in mäßigem Abstand (jedenfalls klein gegen die Wellenlänge) voneinander angebracht, so ist deren Kapazität größer als die eines einzelnen Senders. Wir betrachten die Energieströmung an einer Stelle, deren Entfernung groß gegen die Wellenlänge ist. Bezeichnen wir mit i_0 die Amplitude im Strombauch bei einem Sender allein, so ist nach Abraham die Energie, welche in der Zeit einer ganzen Schwingung dem Felde entzogen wird, gleich $w i_0^2$, wenn w eine Konstante bedeutet. Bei zwei Sendern würde sich in unserem Falle entsprechend der Wert $w(i_0 + i_0')^2$ ergeben, wo $i_0' \leq i_0$ ist.

Die gesamte magnetische Energie ist bei einem Sender, wenn sinusförmige Verteilung des Stromes angenommen und mit p der Selbstinduktionskoeffizient bezeichnet wird, gleich $\frac{1}{2} p i_0^2$; entsprechend würde bei zwei Drähten zu setzen sein $\frac{1}{2} p'(i_0 + i_0')^2$, wo aber infolge der gegenseitigen Induktion

$p > p' \geq p/2$ ist. Bildet man das Verhältnis der während einer Schwingung ausgestrahlten zur gesamten Energie, so findet sich $w/p' \geq w/p$, d. h. das Dekrement bei zwei und (analog zu schließen) bei mehrfachen Sendern ist größer zu erwarten als bei einem Sender. Dies gilt freilich nur so lange, als die Sender gleichphasig erregt werden. Anders liegen die Verhältnisse bei Sendern, die, wie in der Braunschen gerichteten Telegraphie, phasenverschoben¹⁾ schwingen. Hier ist natürlich die vorstehende einfache Überlegung nicht mehr zulässig.

Zweiter Abschnitt.

Energieausnutzung in mit Braunschem Schwingungskreis gekoppelten Systemen.

10. Die nachstehend beschriebenen Untersuchungen beschäftigen sich mit der Frage, welcher Bruchteil der Energie eines Braunschen Schwingungskreises durch ein mit diesem gekoppeltes offenes System in den Raum hinausgestrahlt werden kann.

Schaltet man in den Schwingungskreis ein Hitzdrahtinstrument mit sehr dünnem Hitzdraht, so sind dessen Angaben, wie bereits unter 5. erwähnt, proportional mit $\int_0^{\infty} i^2 dt$.

Bei einem geschlossenen Schwingungskreise wird nun fast die gesamte Energie in Joulesche Wärme umgesetzt, wenn man von den jedenfalls geringen Verlusten durch Strahlung und dergleichen, sowie von der etwaigen Energieabsorption in Flaschen von bestem englischen Flintglas absieht. Es gilt deshalb für den Schwingungskreis ohne Sendersystem

$$(1) \quad w \int_0^{\infty} i^2 dt - \frac{1}{2} \frac{q^2}{c} = 0.$$

w bezeichnet den Widerstand des Schwingungskreises, q die Ladung des Kondensators, c dessen Kapazität.

1) F. Braun, Physik. Zeitschr. 5. p. 196. 1904; Electrician 56. 1906; L. Mandelstam u. N. Papalexi, Physik. Zeitschr. 7. p. 303 bis 306. 1906.

Legt man jetzt das Sekundärsystem direkt oder induktiv an den Primärkreis, so wird in dem angelegten System Energie durch Strahlung und als Joulesche Wärme dissipiert; den Hauptbetrag macht die durch Strahlung abgegebene Energie aus. Wir bezeichnen die gesamte vom Sekundärsystem verbrauchte und dem Primärsystem entzogene Energie mit W .

Werden zwei Systeme miteinander gekoppelt, so entstehen im allgemeinen zwei Schwingungen mit verschiedener Periode, Dämpfung und Phase. Wir beschäftigen uns mit solchen Fällen, bei denen die Schwingungszahlen der gekoppelten Systeme sich von derjenigen der ungekoppelten nur so weit unterscheiden, daß die Theorie für jede der beiden Schwingungen keine wesentliche Änderung des Widerstandes des Schließungsbogens erwarten läßt. Wir behandeln weiter den sogenannten Funkenwiderstand zunächst wie den übrigen metallischen Widerstand und nehmen an, daß wir unter den vorerwähnten Verhältnissen von einem Widerstand w für beide Schwingungen sprechen können, der also dann identisch wäre mit dem Widerstand des noch nicht verkoppelten Schwingungskreises.

Sind i_1 und i_2 die Stromintensitäten der beiden Schwingungen im gekoppelten Primärkreis, so gilt jetzt

$$(2) \quad w \int_0^{\infty} (i_1 + i_2)^2 dt + W - \frac{1}{2} \frac{q^2}{c} = 0.$$

Subtrahiert man (2) von (1), so folgt

$$(3) \quad w \left\{ \int_0^{\infty} i^2 dt - \int_0^{\infty} (i_1 + i_2)^2 dt \right\} = W.$$

Nun ist

$$\int_0^{\infty} i^2 dt = c a, \quad \int_0^{\infty} (i_1 + i_2)^2 dt = c a_1,$$

wenn c eine Konstante und a bez. a_1 die Angaben des Hitzinstrumentes bedeuten.

$$(4) \quad \frac{a - a_1}{a_1} = \eta_1$$

ergibt uns also den Bruchteil der Energie des Schwingungs-

kreises, welche vom Sender dem Primärkreise entnommen wurde und im wesentlichen somit die ausgestrahlte Energie.

Man könnte η_1 als den Wirkungsgrad einer speziellen Senderanordnung der drahtlosen Telegraphie bezeichnen, hätte hiervon dann aber den Gesamtwirkungsgrad für die Zeichenübertragung noch wohl zu unterscheiden, da dieser außerdem wesentlich von der Empfängeranordnung selbst abhängt. Dieser Gesamtwirkungsgrad könnte sogar höher werden, wenn infolge loserer Koppelung bei den Systemen des Senders der Senderwirkungsgrad herabgeht.

11. Wir haben bisher den Funkenwiderstand als einen mit dem metallischen völlig gleichartigen Widerstand behandelt. Wie von anderen und wie neuerdings von Hrn. G. Rempp¹⁾ im hiesigen Institut festgestellt wurde, ist dies indessen im allgemeinen nicht zulässig. Man kann von einem Funkenwiderstand eventuell und nur unter ganz bestimmten Bedingungen reden. Für uns ist wichtig, daß der Widerstand des Funkens nach G. Rempp wächst, wenn man in einen gegebenen Kondensatorkreis außer dem Funken noch weiteren metallischen Dämpfungswiderstand einführt. Analoges müssen wir jedenfalls für den Funken eines Kondensatorkreises annehmen, dem Energie durch ein offenes, strahlungsfähiges Gebilde entzogen wird. Leider läßt sich nun im Falle zweier Schwingungen und damit komplizierter Verteilung des Stromes im Sender nicht in gleich bestimmter und einfacher Weise wie beim Vorhandensein einer Schwingung mit sinusförmiger Verteilung im Sender ein „Strahlungswiderstand“ definieren, der dann etwa gestatten würde, die Änderungen des Funkenwiderstandes aus den Beobachtungen des Hrn. Rempp zu entnehmen.

Wir dürfen aber wohl, ohne uns allzuweit von den wahren Verhältnissen zu entfernen, für unseren Zweck der Energiemessung die Annahme machen, daß der Funkenwiderstand sich in gleicher Weise ändert, einerlei ob der Flaschenkreis einen Teil seiner Energie an das Sekundärsystem abgibt oder ob der gleiche Betrag in seiner eigenen Strombahn in Joule-

1) G. Rempp, Straßburger Dissertation, Leipzig 1905; vgl. dort die übrige Literatur.

Wärme umgesetzt wird, wenn also nur das dem Flaschenkreis verbleibende $\int_0^{\infty} i^2 dt$ in beiden Fällen dasselbe ist.

Unter dieser Annahme möge der Funkenwiderstand für den Fall der gekoppelten Systeme bekannt sein als w' . Unsere Gleichung (3) geht dann über in

$$(3a) \quad w \left\{ \int_0^{\infty} i^2 dt - \frac{w'}{w} \int_0^{\infty} (i_1 + i_2)^2 dt \right\} = W$$

und Gleichung (4), wenn außerdem noch $w'/w = r$ gesetzt wird, in

$$(4a) \quad \frac{a - r a_1}{a} = \eta.$$

12. Die Versuchsanordnung ist aus Fig. 3 ersichtlich. C_1 sind zwei Leidener Flaschen von 1540 und 1900 cm Kapa-

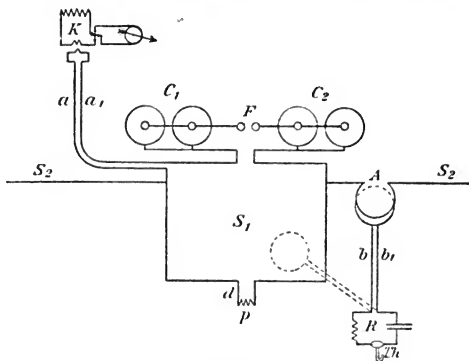


Fig. 3.

azität, C_2 zwei solche von 1530 und 2040 cm, so daß die resultierende Kapazität sich zu 1750 cm ergibt. Diese Flaschen sind mit einem Drahtrechteck zum Schwingungskreis S_1 geschlossen. S_1 enthält bei p noch eine variable Selbstinduktion und gestattet bei d dünne Drähte aus Nickelin im Petroleumbad einzuschalten ohne Änderung der Konfiguration des Drahtrechtecks mit p . Aus dem Drahtrechteck sind zwei sehr vor-

züglich mit Kautschuk isolierte Drähte aa' aufeinandergelegt hinausgeführt zu einem kleinen Meßtransformator K , dessen Sekundärkreis ein Thermoelement Th enthält und außerdem noch eine Selbstinduktion von etwa 6000 cm.

Das Sendersystem S_2 ist das aus Abschnitt 1 bekannte. Es wird in direkter Schaltung an das Primärsystem S_1 angeschlossen und enthält bei A zwei Windungen von 10 cm Windungsdurchmesser, aus denen auf einen Resonanzkreis induziert werden kann. Der Resonanzkreis R enthält einen regulierbaren Luftkondensator und, wenn es sich nur um Bestimmung von Wellenlängen handelt, ein Luftthermometer von 0,5 Ohm Widerstand oder, wenn der Kreis zur Bestimmung von logarithmischen Dekrementen verwandt wird, ein sehr empfindliches Thermoelement¹⁾ in einem induktiv mit ihm gekoppelten einfachen Stromkreise. Als Galvanometer diente ein Zeigergalvanometer von Siemens & Halske mit 80 Ohm Widerstand und mit einer Empfindlichkeit von ungefähr $3 \cdot 10^{-7}$ Amp. pro Skalenteil.

13. Die Messungen wurden in der Weise vorgenommen, daß zuerst das Sendersystem S_2 in Markonischaltung erregt und der Kreis R in Resonanz gebracht wurde. Dann konnte der Teil des Resonanzkreises, auf den induziert wurde, in die gestrichelte Lage gebracht werden. Die Selbstinduktion p des Schwingungskreises S_1 war nun so lange zu ändern, bis letzterer die gleiche Periode mit dem Resonanzkreis und damit auch mit dem Sekundärsystem S_2 hatte. Jetzt las man das Galvanometer im Meßkreis K ab und erhielt so den Wert a . Nachdem nunmehr das Sendersystem gekoppelt war, wurde in K der Wert a' abgelesen. Die Ablesungen sind öfter wiederholt und befanden sich in guter Übereinstimmung. Die Unterschiede betrugen bei den kleinsten Ausschlägen von 10 Skt. höchstens $\pm 0,25$ Skt.

Es wurde darauf geachtet, daß keine Partialfunken in dem Schwingungskreise vor der Koppelung mit dem Sekundärsystem auftraten.

1) H. Brandes, l. c. Das im ersten Teile dieser Arbeit verwandte Thermoelement hatte stärkere Konstantan- und Eisendrähte und war deshalb unempfindlicher. Dieser Nachteil wurde jedoch durch größere Galvanometerempfindlichkeit aufgewogen.

Weiter wurden mit dem Resonanzkreise R die beiden Resonanzstellen der gekoppelten Systeme aufgesucht, um ein Urteil über den Koppelungsgrad zu gewinnen. Der Koppelungsgrad k wurde berechnet aus der von P. Drude¹⁾ für geschlossene Systeme angegebenen Beziehung

$$\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} = k \quad \text{oder} \quad \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = k,$$

wenn n_1 und n_2 die Periodenzahlen der beiden Schwingungen und C_1 und C_2 die Kapazitäten im Resonanzkreis bedeuten, welche den Periodenzahlen n_1 und n_2 bei ungeänderter Selbstinduktion entsprechen.

14. Es folgte nun die Messung der Größe $r = w'/w$. Zu diesem Zweck wurde, wie bemerkt, das Thermometer durch das Thermoelement mit Galvanometer ersetzt. Die Summe der logarithmischen Dekremente des Schwingungskreises S_1 , wenn er für einen einfachen Sender abgestimmt war, und des Resonanzkreises $b_1 + b_2$ wurde wie in Abschnitt 1 ermittelt. Das Dekrement b_2 wurde mit Hilfe eines Zusatzdekrementes ($w = 1,40$ Ohm) und Vergleichung der Maximalausschläge nach V. Bjerknes²⁾ bestimmt.

Es ergab sich

$$b_1 + b_2 = 0,135,$$

$$b_2 = 0,0149,$$

folglich

$$b_1 = 0,120.$$

Die Periodenzahl war vorher mit Hilfe eines variablen Drahtrechtecks und eines variablen Kondensators zu $1,76 \cdot 10^6$ gefunden.

Da die Kapazität bekannt war, so ließ sich jetzt die Selbstinduktion zu 4200 cm angeben und damit der Widerstand des Kondensatorkreises zu

$$w = 1,77_3 \text{ Ohm}.$$

Nunmehr wurden bei d Widerstände eingeschaltet, die bewirkten, daß man im Kreis K von einem Anfangsausschlag, welcher etwa ebenso groß wie der ohne angelegtes Sendersystem war, zu den gleichen Ausschlägen gelangte, wie mit angelegtem Sender.

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 545. 1904.

2) V. Bjerknes, l. c. p. 153.

Nachstehend finden sich die Meßergebnisse zusammen-
gestellt:

Mit Sendern				Mit Widerstand			
ohne Sender	mit 1 Send.	mit 2 Send.	mit 3 Send.	ohne w	mit 1,61 Ohm	mit 2,81 Ohm	mit 4,32 Ohm
52,2	21,9			49,3	22		
51,3		15,6		49,3		15,8	
47,5			11,5	49,3			12,0

Die Angaben des Thermoelementes wurden vorher mit Gleichstrom auf Proportionalität mit i^2 geprüft und sind entsprechend reduziert.

Da bei den Messungen mit und ohne Widerstand die Energie des Schwingungskreises dieselbe bleibt und der Eigenwiderstand des Kondensatorkreises für die Messung ohne w bekannt ist, kann aus den vorstehenden Zahlen der neue Gesamtwiderstand abgeleitet werden, und da weiter auch der Zusatzwiderstand vorher gemessen ist, das w' unserer Rechnung in 11. und damit auch $r = w'/w$.

Das Ergebnis ist folgendes:

Zusatzwiderstand			
Ohm	1,61	2,81	4,32
w'	2,86	2,72	2,96
$r = \frac{w'}{w}$	1,33	1,53	1,67

15. Wir haben jetzt alle Werte zur Berechnung von η .
Es ergibt sich

$$1 \text{ Sender: } \eta_1 = \frac{52,2 - 29,1}{52,2} = 0,44,$$

$$2 \text{ Sender: } \eta_2 = \frac{51,3 - 23,8}{51,3} = 0,53,$$

$$3 \text{ Sender: } \eta_3 = \frac{47,5 - 18,9}{47,5} = 0,60.$$

Die Koppelung wurde von vornherein möglichst fest gewählt und dann allmählich gelockert, bis die im Schwingungskreis verbleibende Energie — oder richtiger — bis das $\int_0^{\infty} (i_1 + i_2)^2 dt$ sich vergrößerte. Während bei Koppelung mit einem Sender der Koppelungsgrad von 0,13₅ kaum gelockert werden konnte,

durfte er bei zwei Sendern von 0,19—0,15, bei drei Sendern von 0,27—0,22 geändert werden.

16. Die Messungen zeigen:

1. daß sich mit mehrfachen Sendern die Energie des Braunschens Schwingungskreises vorteilhafter ausnutzen läßt, als mit einfachen Sendern;

2. da jedoch hierbei der Funkenwiderstand des Braunschens Schwingungskreises beträchtlich wächst, falls die hierüber gemachten Annahmen zulässig sind, und da dies Anwachsen nach den Resultaten von G. Rempp¹⁾ um so kleiner wird, je größer die Kapazitäten sind, so empfiehlt sich aus diesem Gesichtspunkt bei praktischen Anordnungen im allgemeinen die Wahl möglichst großer Kapazitäten;

3. da nun aber weiter hierdurch die koppelbare Selbstinduktion reduziert wird, hingegen auf der anderen Seite bei mehrfachen Sendern der Koppelungsgrad für beste Energieübertragung mit der Anzahl der Sender wachsen muß, so empfiehlt sich gerade hier die von F. Braun²⁾ angegebene sog. direkte Schaltung in Verbindung mit einer induktiven Koppelung.

Es möge jedoch hier nochmals betont werden, daß diese Betrachtungen keine Rücksicht auf die Empfängeranordnung nehmen, daß sie sich nicht auf den Gesamtwirkungsgrad der Zeichenübertragung, sondern lediglich auf den Senderwirkungsgrad beziehen.

Das Ergebnis des ersten Teiles der im vorstehenden berichteten Untersuchungen findet sich unter 8., dem vorletzten Paragraphen des ersten Abschnittes, angeführt.

Es sei mir schließlich noch an dieser Stelle gestattet, Hrn. Prof. F. Braun für sein freundliches und entgegenkommendes Interesse, sowie für seine wiederholten Ratschläge meinen aufrichtigen und verbindlichsten Dank auszusprechen.

1) G. Rempp, l. c. p. 29 u. 30.

2) F. Braun, Physik. Zeitschr. f. p. 194—199. 1904.

(Eingegangen 23. Januar 1907.)

**4. Über Messung
des Strahlungsdekrementes stabförmiger Leiter;
von F. Conrat.**

Auf Grund der Maxwellschen Theorie berechnet sich nach Hrn. Abraham¹⁾ das logarithmische Dekrement σ infolge Hertzscher Strahlung für die Grundschiwingung auf einem stabförmigen, sehr gestreckten Leiter der Länge l und Dicke $2r$ nach der Formel

$$(1) \quad \sigma = 9,74 \cdot \frac{1}{4 \log \text{nat } l/r}.$$

Einzelne Beobachtungen über die Dämpfung stabförmiger Leiter, meist allerdings mit Funkenstrecke — also einem unbekannten Widerstandsdekrement neben ihrer Strahlung σ — wurden mittels Bjerknes' geometrischer Methode von Hrn. Kiebitz²⁾ und Lindman³⁾ ausgeführt. Kiebitz findet die Gesamtdämpfung γ_1 (Strahlungs- plus Funkendekrement) kleiner als die theoretische Strahlung, außerdem Abhängigkeit von der Nähe und Beschaffenheit des Resonators (ob gestreckt oder geschlossen).

Auf Anregung von Hrn. Drude(†) begann ich Messungen der Strahlung in folgender Weise.⁴⁾ Der stabförmige Leiter wird ohne Funkenstrecke als Empfänger benutzt und durch einen geschlossenen Oszillator der Gesamtdämpfung γ_0 (wesentlich Funkendämpfung) erregt. Variation der Periode des letzteren führt mittels Drudes analytischem Verfahren⁵⁾ zur bequemen Bestimmung der Dekrementsumme $\gamma_{01} = \gamma_0 + \gamma_1$. Zur Ermittlung und Elimination von γ_0 dienen daneben ausgeführte Resonanzversuche zwischen demselben Erreger und einem

1) M. Abraham, Wied. Ann. 66. p. 435. 1898.

2) F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 5. p. 884. 1901.

3) K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 7. p. 835. 1902.

4) P. Drude, Ann. d. Phys. 21. p. 840. 1906.

5) P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 512. 1904; 15. p. 709. 1904.

zweiten Resonator, der, frei von Strahlung und Absorption, eine nach der Formel

$$(2) \quad \vartheta = \pi w \sqrt{C/L} = \frac{w}{cL} \cdot \lambda/2$$

zu berechnende Widerstandsämpfung $\vartheta = \gamma_2$ in der analogen Dekrementsumme γ_{02} besitzt. w ist Leitungswiderstand für Schwingungen, deren Wellenlänge λ , L Selbstinduktion, C Kapazität elektromagnetisch, c das Verhältnis der Maßsysteme. Die in dem so erhaltenen γ_1 neben der Strahlung σ_1 noch vorhandene Dämpfung ϑ_1 infolge Leitungswiderstandes ist bei dem unbekannten Verlauf der Verschiebungsströme nach Formel (2) nicht exakt, aber doch schätzungsweise zu berechnen¹⁾, und wie sich alsdann zeigt, genügend klein, um ganz vernachlässigt werden zu können.

Eine größere Anzahl in dieser Weise an Drähten verschiedener Länge und Dicke erfolgter Messungen führte bisher zu keinem befriedigenden Resultat. Verschiebungen auch der Mittelwerte aus längeren Versuchsreihen, anscheinend im Zusammenhang mit Änderungen im Aufbau der Apparate, machten es wahrscheinlich, daß von dem Versuchsraum mit seinen Leitungen nicht zu vernachlässigende störende Einflüsse ausgingen. Was sich bei Versuchen daraufhin ergab, ist im folgenden kurz mitgeteilt. Es kommt hierbei in erster Linie nur auf die Änderung $\Delta\sigma$ an, welche die Stabstrahlung σ_1 unter gegebenen äußeren Bedingungen erfährt, weniger auf ihren absoluten Wert zum Vergleich mit der Theorie, auf den die ursprünglich unternommenen Messungen hinzielten. Wo diese erwähnt werden, sind sie als „ σ Bestimmungen“ im Gegensatz zu den „ $\Delta\sigma$ Versuchen“ bezeichnet.

Apparate.

Der *Primärkreis* besaß eine variierbare Kapazität in Form eines Präzisionskondensators mit kreisförmigen Platten von 10 cm Durchmesser. Die Selbstinduktion bestand in einem je nach der benutzten Wellengröße verschieden großen Schließungskreis. Die Konstruktion, die er bei den letzten Versuchen besaß, zeigt Fig. 1. Die Ebonitplatte H trägt in parallelen,

1) P. Drude, Physik des Äthers p. 396. 1894.

um 3 cm voneinander entfernten Bohrungen die gestreckten, vorne rechtwinklig umgebogenen 3 mm dicken Kupferdrähte kk mit den Messingelektroden f unter Petroleum. Schraubchen ss dienen zur Befestigung von kk , eine dünne Ebonitstange G zur Regulierung der Funkenstrecke. Über die hinteren Drahtenden übergeschobene, aufgeschlitzte Röhrchen rr tragen weiche, zu den Kondensatorplatten führende Drähte d . Das Holzstativ S und der Kondensator, dessen Platten in Petroleum tauchen, stehen auf einem verstellbaren Holztisch. Die Horizontalebene des Erregers liegt ca. 25 cm über ihm, $1\frac{1}{2}$ m über dem Fußboden. Zur Erregung dienten verschiedene Induktorien, zuletzt Levyscher Konstruktion, teils mit Deprez-, teils kleinem Wehneltunterbrecher, und gespeist je nachdem mit ca. 8 bez. 30 Volt. Von der Sekundärspule führten die Drähte ohne Transformator aber mit Zwischenfunkenstrecke zu den Funkenpolen, die, wenn zerfressen, rund gelötet wurden. Die Wellenlängen des Erregers wurden empirisch nach der von Drude angegebenen Resonanzmethode für kürzere Wellen ermittelt.¹⁾ Die einzelnen Einstellungen des Bügels stimmten hierbei auf 1 bis 2 Proz. überein, desgleichen die Mittelwerte der etwa alle Monat nachgeprüften Eichung.

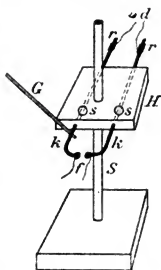


Fig. 1.

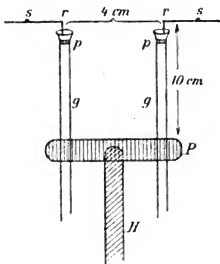


Fig. 2.

Bei den beiden *Sekundärkreisen* ermöglichte die in Fig. 2 wiedergegebene Vorrichtung leichtes Ein- und Ausschalten der zur Energiemessung dienenden Thermokreuze (aus Kupfer und Konstantan). Die Ebonitstange H , von einem Stativ gehalten, trägt die Paraffinplatte P mit den in 4 cm Abstand eingeschmolzenen Glasröhrchen g von reichlich 3 mm Öffnung.

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 611. 1902.

Die über den Paraffinfropfen pp sich bildenden Bassins wurden mit Quecksilber gefüllt. Sie dienten zur Aufnahme der rechtwinklig umgebogenen, verzinn- oder amalgamierten Enden: einerseits der im Strombauch auf einer Strecke von 4 cm unterbrochenen Empfängerleitung rr , andererseits des sie schließenden Thermoelementes. Die als stabförmige Empfänger dienenden Drähte wurden, nach Möglichkeit frei von Knickungen, mittels Bindfäden zwischen vertikalen, auf Stelltischen befestigten Eisenstativen horizontal aufgespannt. Ihr Abstand von den äußeren Drahtenden betrug gegen 1 m. Die beiden durch die Unterbrechung in der Mitte entstandenen Drahthälften mit den inneren, einander zugewandten Enden rr (Fig. 2) wurden gleichfalls durch Bindfäden miteinander verbunden, dessen Abgleiten kleine Siegellacktropfen ss verhinderten. Unter einem stabförmigen Empfänger „200/0,05“ etc. ist im folgenden ein Draht der Länge 200 cm (die Strecke rr mit eingeschlossen), der Dicke 0,1 cm verstanden. Wurde der Einfluß paralleler Drähte untersucht, die hierbei (bis auf die Unterbrechungsstelle in der Mitte) ähnlich wie der gestreckte Empfänger beschaffen und aufgehängt waren, so sind sie, obwohl beides Drähte, der Kürze halber als „Draht“ und „Stab“ unterschieden. Der als Standard zur Messung der jedesmaligen Erregerdämpfung γ_0 dienende zweite strahlungsfreie Empfänger bestand aus einem nur roh einstellbaren Kondensator mit 10 cm großen Platten in Luft und (bis auf den geradlinigen Abschluß zwischen rr) kreisförmig verlaufenden, 1 mm dickem Schließungsdrahte. Während der Beobachtungen an einem Sekundärkreis war meist das Thermoelement aus der Mitte des anderen ausgehoben.

Als Galvanometer wurde anfangs ein Spuleninstrument der Firma Hartmann & Braun mit 4 Ohm innerem Widerstand benutzt, in dem ein Strom von $1,7 \cdot 10^{-8}$ Amp. bei 10 Ohm günstigem Vorschaltwiderstand und 2 m Skalenabstand 1 mm Ausschlag gab. Bei der angewandten Koppelung betragen die Ausschläge der Resonatoren 25–250 mm. Wegen der großen Schließungsdauer (8 Sek., wenn man die Umkehr abwartete) wurde bei den $\Delta\sigma$ Messungen ein in ähnlicher Weise konstruiertes, aber günstiger arbeitendes, von Hrn. Zahn ersonnenes und mir gütigst zur Verfügung gestelltes Spulen-

galvanometer benutzt, ferner ein Panzergalvanometer von du Bois-Rubens in Juliusscher Aufhängung, nur mäßig astasiert. Bei der kürzeren Schwingungs- und Schließungsdauer blieb die Funkenstrecke länger konstant.

Verfahren bei Bestimmung der Dekremente.

Bedeutet λ^m die Wellenlänge des Erregers, bei der die Integraleffekte eines mit ihm gekoppelten Empfängers bez. die ihnen entsprechenden Galvanometerausschläge ihr Maximum s^m erreichen, λ' bez. λ'' diejenigen nach oben bez. unten variierten Wellenlängen λ^h des Erregers, deren zugehörige Ausschläge s' bez. s'' möglichst einander gleich und gleich $s^m/2$ sind, ist endlich γ_0 die Dämpfung des Erregers, γ die eines beliebigen Empfängers, so ist nach Drude¹⁾

$$(3) \quad \gamma_0 + \gamma = \pi \frac{\lambda' - \lambda''}{\lambda^m} \sqrt{\frac{s' + s''}{2 s^m - (s' + s'')}}.$$

Bei der Kombination zweier oder mehreren Resonanzbeobachtungen zu σ bez. $\Delta\sigma$ Messungen kommt es auf deren möglichste gegenseitige Durchdringung an, damit wenigstens der mittlere Wert der ständig veränderlichen Funkendämpfung γ_0 den verschiedenen Dekrementsummen gemeinsam ist. In zunehmendem Maße erfüllen diese Forderung die durch je ein Beispiel veranschaulichten als „Methode 1 bis 3“ bezeichneten Wege.

1. Während der σ Messungen wurde an einem 631/0,05 Stabe untersucht, ob nicht vielleicht allmähliche Änderungen von γ_{01} mit einer Änderung in der Oberflächenbeschaffenheit der Drähte zusammenhängen, wie sie in der Bildung einer Oxydschicht nach anfänglichem Abschmirlgeln gegeben war. Das Ergebnis war negativ, denn während ein allmähliches Ansteigen der von γ_0 befreiten Differenz $\gamma_{12} = \gamma_{01} - \gamma_{02}$ von 0,081 auf 0,153, also um 0,072 in Frage stand, lagen die kurz vor und kurz nach neuem Schmirlgeln (nur des Stabempfängers) vorgenommenen Messungen einander viel näher. In nachstehender Zusammenstellung, nur der zwei letzten Messungen vor und der zwei ersten nach Beseitigung der Oxydschicht

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 15. p. 716 ff. 1904.

(Tab. I), liegen jeder Zeile selber 3 bis 5 symmetrisch angeordnete Bestimmungen von γ_{01} und γ_{02} zugrunde, von denen jede die für Formel (3) maßgebenden Einstellungen des Er-

Tabelle I.

Nr.	γ_{01}	γ_{12}	
1	0,288	0,106	} nach dem Schmirkeln
2	0,293	0,100	
3	0,292	0,111	} vor dem Schmirkeln
4	0,298	0,125	

regerkondensators zweimal in entgegengesetzter Richtung durchläuft. So sind z. B. die Einzelbestimmungen von γ_{01} und γ_{02} , deren Mittelwerte der zweiten Zeile zugrunde liegen, in der durch die Buchstaben gekennzeichneten Reihenfolge folgende:

γ_{01}	a) 0,301	c) 0,291	e) 0,288
γ_{02}	b) 0,192		d) 0,195

2. In dem nächsten Beispiel (Tab. II) für Methode 2 sind die Dekrementsummen zwischen Erreger und vier Arten des Empfängers beobachtet worden: dem Stabempfänger 200/0,05 I. ohne Paralleldraht, II., III. mit gleichlangem Paralleldraht in den Abständen 190 bez. 143 cm, IV. dem Kreiseempfänger (p. 683). Die mit den Zahlen 1 bis 8 bezeichneten Zahlenreihen enthalten die entsprechenden Ausschläge, die bei der unter p angegebenen Einstellung des Erregerkondensators (annähernd Plattenabstand in Millimetern) erhalten wurden. Diese Einstellungen wurden in den Reihen 1 bis 4 von links nach rechts, in den Reihen 5 bis 8 von rechts nach links durchlaufen, bei jeder Einstellung zwei Ablesungen hintereinander vorgenommen. Der Versuch besteht aus Hin- und Rückweg, die in entgegengesetzter Richtung eine Folge von Anordnungen durch-eilen, bei der mit dem benutzten Empfänger nach dem Durch-laufen aller in Betracht kommenden Plattenabstände p ge-wechselt wird. Die bei ein und derselben Einstellung hinter-einander abgelesenen Ausschläge zeigen gute Übereinstimmung. Das arithmetische Mittel ζ aus den prozentischen Abweichungen

Tabelle II.

	Maximalstellungen p^m					Seitenstellungen p^s					Benutzter Empfänger	Dem Stab paralleler Draht
	p_1	6,50	6,60	6,70	6,80	5,30	5,20	5,10	8,50	8,60	9,10	
$\lambda/2$		216	214,7	213,4	212,2	232,5	234,3	236,2	195,8	194,8	190,8	
I	1	137	141	141	140	70,5			72			Stab-empfänger
	8	137	139	139	140	72,5			73			
		124,5	124	129	127	71			66			
	S	522	534	537	534	281			279			
II	2	118	117,5	119	114,5	68,5			66		60	Stab-empfänger
	7	117	115	119	115,5	66		59	69		56	
		109	115	115	120	65		62	68		58	
	S	457	459,5	468	466	266		237	271		230	
III	3	130	131,5	127	127	72	65		68	63,5		Stab-empfänger
	6	129	127	129	125	72	65		66	62		
		127	126	133	124	76	70		64	68		
	S	515	512	522	502	293	270		262	256		
p_2		6,20	6,30	6,40	6,50		5,45			7,30		
$\lambda/2$		220	219	217,8	216		230,5			206,8		
IV	4	125	123	122	122		63			64		Kreis-empfänger
	5	121	123	120	122		63			62		
		121	121	121	117		69			68		
	S	487	489	480	476		263			260		

solcher Paare aufeinanderfolgender Ausschläge, als relatives Maß für das Gewicht der Einzelmessung betrachtet, sofern sie bloß von der Konstanz der Ausschläge abhängt, beträgt im obigen Fall nur 2 Proz. Da man trotzdem für $\gamma_0 + \gamma$ häufig stark untereinander abweichende Werte erhält, je nach den verschiedenen in Formel (3) eingesetzten, allerdings oft weniger geeigneten maximalen und annähernd halben Ausschlägen s^m und s^h , wurden möglichst mehrere Werte aus einer Resonanzbeobachtung berechnet. Der Grad ihrer Übereinstimmung und der Sinn ihrer Abweichung ist für die Frage wichtig, ob auch die beobachteten $\Delta\sigma$ nicht innerhalb der Versuchsgenauigkeit liegen. So erhält man aus dem Beispiel bei Anordnung II für die Maximalstellung 6,7 die Dekremente 0,667 bez. 0,627, also um 0,04 differierende Werte, je nachdem man als Seitenstellungen p^h 5,1 und 9,1 oder 5,3 und 8,5 benutzt. Die den Kondensatorstellungen entsprechenden halben Wellenlängen finden sich unter ihnen angegeben, in den Horizontalreihen S die Summen der Ausschläge von Hin- und Rückweg. Ein Beispiel besserer Übereinstimmung in sich bietet die Anwendung von Formel (3) auf III; man erhält für γ_{01} je nach den benutzten, unter p^h bez. p^m angegebenen Plattenstellungen:

p^h	$p^m = 6,7$	$p^m = 6,5$
5,2 8,5	0,578	0,579
5,2 8,6	0,586	0,587
5,3 8,6	0,576	0,577

Man wird also z. B. darüber nicht im Zweifel sein, daß die Stabstrahlung im Falle II größer ist als im Falle III.

3. Die beste Verschmelzung mehrerer Resonanzbeobachtungen erhält man, wenn man beim Hin- und Rückweg eine Plattenstellung p erst variiert, nachdem man bei ihr sämtliche Empfänger benutzt hat: die Umkehrung von Methode 2. In dem beigegebenen Beispiel (Tab. III) sind nur zwei Dekrementsummen miteinander verglichen (p. 677): ein stabförmiger

Tabelle III.

Maximalstellungen p^m								
p	4,95		5,10		5,25		5,40	
	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne
1	46	25	47	26	42	26	40	27
	42	25	45	28	39	29	37	26
	41	26	42	26	45	27,5	38	26
4	78	45	78	51	77	49	73	49
	78	46	78	48	72	51	71	49
	79	48	77	46	76	53	69	51
S	364	215	367	225	351	235,5	328	228
$\lambda/2$	408		402		397		392	

Seitenstellungen p^h								
p	6,10		4,50		4,20		6,60	
	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne
2	20	21,5	21	18	17	14	13	14
	21	20,5	21	20	16	13	13	13
	22	19	19	21	17	14	12	12
3	35	37	51	34	28	26	23	23
	38	37	54	34	29	23	22	21
	38	38	55	34	28	25	21	24
S	174	173	221	161	135	115	104	107
$\lambda/2$	374		423		437		360	

Empfänger 380/0,05 wird „mit“ und „ohne“ einen gleichlangen Paralleldraht im Abstand 215 cm benutzt, der kreisförmige Empfänger nicht hinzugezogen. Die Reihen 1, 2 wurden von links nach rechts, 3, 4 von rechts nach links durchlaufen, jede Einstellung mit drei Ablesungen. Aus den 64 vorhandenen Paaren aufeinanderfolgender Ausschläge berechnet, beträgt ζ hier 5 Proz.¹⁾ Zwischen Hin- und Rückweg liegt hier wie in

1) Es scheint nichts auszumachen, ob ζ aus den ersten Paaren mehrerer aufeinanderfolgender Ausschläge, oder aus späteren berechnet wird, d. h. ob die Funkenstrecke die längere Zeit, die der Abänderung des Resonators entsprach, untätig oder noch kurz vorher tätig war.

Methode 2 ein natürlicher Einschnitt, der (wie in Tab. II) zu einer zeitlichen Unterbrechung oder (wie hier) einer Änderung der Koppelung zwischen Erreger und Empfänger dienen kann. Bei Methode 3 läßt sich auch der bloße Hinweg einer nicht zu Ende geführten Versuchsreihe mindestens qualitativ verwerten. Denn wenn sich auch γ_0 während ihrer Aufnahme in unkontrollierbarer Weise geändert hat, so wird doch das *Verhältnis* zwischen den ein und derselben Erregerperiode entsprechenden Integraleffekten der verschiedenen Resonatoren richtig wiedergegeben, und (besonders nach der Zeichnung) ein Urteil über den verschieden flachen Verlauf der Resonanzkurven ermöglicht. Veranlassung zu der zwischen Hin- und Rückweg herbeigeführten Verstärkung der Koppelung bot die anfängliche Kleinheit der seitlichen Ausschläge s^h , die nicht bloß durchweg größeres ζ ergibt als beim Operieren mit größeren Ausschlägen, sondern auch aus folgenden Gründen leicht zu große Differenzen $\Delta\gamma$ von Dekrementsummen vortäuschen kann. Es gelingt nicht immer vollständig, zu verhindern, daß auch ohne induktive Erregung der Resonatoren durch den Primärkreis das Thermoelement schwache anderweitig erregte Oszillationen anzeigt. Superponiert sich über die Ausschläge, die allein für die Berechnung der Dekremente maßgebend sind, unbemerkt ein kleiner, gleichgerichteter, konstanter „Zusatzausschlag“ z , so ergeben sich zu große Werte, und zwar kann man sich leicht davon überzeugen, daß die an ihnen anzubringende Korrektur, in Bruchteilen von ihnen ausgedrückt, numerisch gleich dem in Bruchteilen des Maximalausschlages s^m angegebenen Zusatzausschlag ist. Dies gilt jedenfalls genügend genau, solange nicht z 10 Proz. von s^m überschreitet. Bei zwei ohne Änderung der Koppelung aufgenommenen Resonanzkurven entspricht zumeist dem größeren Dekrement γ' der kleinere Maximalausschlag $s^{m'}$, der kleineren Summe γ'' das größere $s^{m''}$. Die Differenz $\Delta\gamma$ zwischen beiden ohne Rücksicht auf z berechneten Dekrementen fällt dadurch um einen Betrag δ zu groß aus, der ausgesprochen kleiner sein muß als $\Delta\gamma$, soll anders dieses als objektive Änderung gelten. Man findet:

$$(4) \quad \delta = z(\gamma'/s^{m'} - \gamma''/s^{m''}).$$

Die Zusatzausschläge wurden nur von Zeit zu Zeit beob-

achtet und, gute Lagerung der Zuführungsdrähte vorausgesetzt, nur einige Millimeter groß befunden. Aus dem letzten Beispiel (Tab. III) erhält man für die Dekrementsumme bei Stab mit Draht je nach den benutzten Seitenstellungen: 0,419, 0,418, 0,413; bei Stab ohne Draht: 0,575, 0,605, 0,594. Diese Differenz kann nicht durch das Auftreten eines Zusatzausschlages vorgetäuscht sein, denn für $z = 5$ mm beträgt δ , selbst wenn unter Zugrundelegung nur des kleinen s^m des Hinweges berechnet, 0,06. Sind auch späterhin für eine Dekrementsumme mehrere Werte angegeben, so liegt dem ersten die beste Kombination von Maximal- und halben Ausschlägen zugrunde.

Versuchsraum und σ Messungen.

Den Versuchsraum im Berliner Institut der Universität gibt Fig. 3 im Grundriß wieder. Die Länge betrug 9,5 m, Breite und Höhe 4 m. M sind drei gemauerte Blöcke von

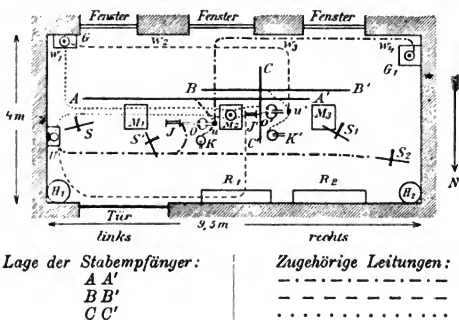


Fig. 3.

80 cm Höhe und etwas kleinerer Seitenlänge, H zwei hohe zylindrische Öfen der Dampfheizung, R zwei hohe 40 cm breite Holzregale, w vier hölzerne Konsolen in 80 cm Höhe an der Fensterwand. Die Türwand trägt nahe H_1 in etwa 3 m Höhe Schaltbretter, von denen aus Drähte horizontal an der linken Querwand und der Türwand entlang ziehen, an letzterer zwischen R_2 und H_2 frei endigend. Fortlaufende Leitungen befanden

sich auf ihrer Außenseite (Korridor). Über M hängen lotrecht Gasrohre (Lampen) bis auf ca. 2 m Höhe (über dem Fußboden, wie stets gemeint) herab. Sie gehen von Leitungen aus, die nahe unter der Decke den Querwänden parallel und an der rechten Querwand und der Fensterwand senkrecht hinablaufen und an letzterer zum Teil über w in $1\frac{1}{2}$ m Höhe enden. Ferner verläuft nahe ihrer unteren Kante ein horizontales Rohr. Unter dem Fußboden, an der Decke des Kellerraumes, in dem die Wechselstrommaschine stand, verliefen längs und quer teilweise sehr mächtige Rohre.

Zum Überblick über sämtliche in diesem Zimmer ausgeführte σ Messungen diene Tab. IV. Unter l ist die Länge,

Tabelle IV.

Nr.	l	$2r$	l/r	σ ber.	σ beob.	$\sigma_{\min.}$	$\sigma_{\max.}$	Z	$\vartheta_2 - \vartheta_1$	$\lambda^m/2$	K
1	631	0,1	12620	0,257	0,164	0,083	0,244	49	0,038	669	$\left. \begin{array}{l} l=62; 2R=19,7 \\ 2r=0,1 \end{array} \right\}$
2	—	0,05	25240	0,240	0,131	0,113	0,158	16	0,035	—	
3	—	0,3	4207	0,291	0,156	0,123	0,186	23	0,040	—	
4	550	—	3660	0,297	0,279	0,249	0,313	19	0,033	600	
5	400	0,1	8000	0,270	0,444	0,364	0,503	18	0,121	420	$\left. \begin{array}{l} l=14,8 \\ 2R=4,7 \end{array} \right\}$
6	384	—	7680	0,274	0,549	0,521	0,602	7	0,117	400	
7	200	— ¹⁾	4030	0,299	0,192	0,030	0,453	30	0,061	210	

unter r der Querschnittsradius der stabförmigen Leiter in cm, unter „ σ ber.“ die Strahlung nach Formel (1) angegeben. In den drei folgenden Kolumnen stehen die beobachteten Werte: zunächst der Mittelwert, unter $\sigma_{\min.}$ und $\sigma_{\max.}$ der im Lauf aller Messungen, deren Anzahl Z angibt, erhaltene kleinste und größte Wert. Die Abweichungen zwischen aufeinanderfolgenden Messungen, die bloß Folge der Ungenauigkeit der Einzelbeobachtung sind, waren durchweg kleiner (z. B. Tab. I, p. 664). Bei Stab Nr. 1 wurde anfangs Methode 1, bei den übrigen fast ausschließlich Methode 2 und 3 angewandt. Die Messungen einer jeden Nummer wurden nicht in einem Zuge ausgeführt,

1) Einige zu Anfang mit einem Stabe dieser Größe in einem kleineren Versuchsraum in Gießen ausgeführte Messungen ergaben für σ ca. 0,80!

sondern alle 5—12 Beobachtungen ein neuer Stabempfänger vorgenommen und später wieder auf den ersten zurückgegriffen. Um die beobachteten Strahlungen zu erhalten, wurden den aus den kombinierten Resonanzversuchen gewonnenen Differenzen $\gamma_{12} = \gamma_1 - \gamma_2$ die unter $\vartheta_2 - \vartheta_1$ angegebenen, nach Formel (2) berechneten Differenzen der Jouleschen Dekremente hinzugezählt. Bei der Anwendung der Formel auf den stabförmigen Empfänger ist folgendes zu beachten. Selbstinduktion und reziproke Kapazität pro Längeneinheit (letztere elektrostatisch, betragen bei einem System von zwei im Abstand a parallelen Drähten vom Radius r , längs deren sich Schwingungen der Wellenlänge λ fortpflanzen, für den einzelnen Draht $2 \log \text{nat } a/r$. Sollen diese Ausdrücke auf ein beiderseitig frei endendes Stück der Länge l angewandt werden, so müssen sie, wie auch der Rayleighsche Widerstand des Drahtes, mit dem Faktor $2/\pi$ multipliziert werden, dem Mittelwert der nicht mehr quasi-stationären, doch annähernd sinusförmigen Stromverteilung.¹⁾ Es wird so aus Formel (2):

$$(5) \quad \vartheta_1 = \frac{w^\theta + \frac{l}{r} \sqrt{1720 \, c/\lambda} \cdot 2/\pi}{c \cdot 2 l \log \text{nat } a/r \cdot 2/\pi} \cdot \lambda/2,$$

wobei w^θ den Widerstand des Thermokreuzes bedeutet, und im zweiten Summand des Zählers, dem Rayleighschen Widerstand, 1720 der spezifische Widerstand σ des hier ausschließlich verwandten Kupfers ist. Alle Größen gelten in absolutem Maß. Ist, wie bei den σ Messungen, das Fehlen eines zweiten Drahtes Voraussetzung, so kann man sich nur überzeugen, daß für größeres a der $\log \text{nat } a/r$ nicht so stark mit der über a gemachten Annahme variiert, und in Formel (5) (die in diesem Falle allerdings zugleich ungenau wird) l für a setzen, als wenn „die den Strom schließenden Verschiebungsströme in ihrer Wirkung gleichkommen einem im Abstände l parallel

1) Es folgt dann, der Wirklichkeit entsprechend, $\lambda = 2l$, wenn man noch berücksichtigt, daß bei einem gestreckten Leiter, dessen Hälften nicht influenzierend aufeinander einwirken, statt der Kirchhoff-Thomson'schen Formel gilt: $\lambda = \pi \sqrt{2LC}$, und daß C sich nicht wie L auf den ganzen Draht bezieht, sondern Kapazität einer Drahthälfte ist (vgl. Hertz, Wied. Ann. 31. p. 421. 1887).

geführten Drahte¹⁾ In den vorliegenden Fällen überschreitet ϑ , nicht die dritte Dezimale. Die für $\lambda/2$ eingesetzten und in Tab. I angeführten halben Wellenlängen des Erregers, bei denen die Integraleffekte des Stabes im Mittel ihr Maximum erreichten, und auf die auch der Kreisresonator annähernd abgestimmt wurde, sind um 5—8 Proz. größer als nach der Stablänge zu erwarten ist.²⁾ Die Periode eines Systems, bei der ein zweites die stärksten erzwungenen Schwingungen vollführt, ist stets größer als dessen freie Eigenperiode, um so mehr, je gedämpfter es schwingt.³⁾ Die Selbstinduktion des Kreisempfängers, dessen Dimensionen unter K (letzte Kolumne) angegeben und beim Übergang von Nr. 4 auf 5 verkleinert wurden, ist nach der Wienschen Formel:

$$L = 4 \pi R \left(\log \text{nat} \frac{8R}{r} - 2 \right)$$

berechnet, wo R der Radius des von dem Schließungsdrahte gebildeten Kreises, r seine halbe Dicke. Der Widerstand der für Stab- bez. Kreisempfänger zuerst gesondert benutzten Thermoelemente stieg im Lauf der Versuche von 1,04 bez. 0,87 auf 1,12 bez. 1,02 Ohm. Mit dem Element des zuletzt genannten Widerstandes wurden in Reihe 7 beide Empfänger gemeinsam bedient.

Die im Lauf der Versuche den Apparaten gegebene, wechselnde Aufstellung ist aus dem Grundriß (Fig. 3) zu sehen.

A. Die Stabempfänger Nr. 1—5 wurden ihrer Länge wegen parallel den Längswänden angebracht, etwa bei $A A'$ 120 bis 150 cm von der Wand, auf der einen Seite des vor dem mittleren Block M_2 stehenden Erregers O , auf dessen anderer, nach der Türwand gelegenen Seite der Kreisempfänger K zu stehen pflegte, alle drei Systeme 140 bis 150 cm über dem Fußboden. Die Leitungen der Thermoelemente führten zu

1) P. Drude, Physik des Äthers p. 396.

2) Eine nach M. Abraham an l anzubringende Korrektur, die $\lambda/2$ liefert, kommt nur für Stäbe von kleinem Quotienten l/r in Betracht, für die auch Formel (1) ungenau wird.

3) Vgl. z. B. R. Helmholtz' Vorlesungen I, 2. p. 126.

dem Umschalter u rechts vom Oszillator, mittels dessen beide Resonatoren abwechselnd an die *strichpunktierte* Leitung angelegt wurden, die zur Fensterwand und zu dem an der rechten Schmalwand stehenden Hartmann & Braunschen Spulengalvanometer G_1 lief. Zu dem Induktorium J in 70 cm Höhe links von O führte die strichpunktierte Speiseleitung von einem Schaltbrett an der linken Querwand aus, an der auch meist der Wehneltunterbrecher bei U stand; weiter zu den Ablesestellungen S_1 bez. S_2 mit Stromschlüssel, deren Abstand von dem rechten Ende A' der längsten Drähte $1\frac{1}{2}$ bez. $2\frac{1}{2}$ m betrug. Die parallelen Abschnitte beider Leitungen lagen von den Stabempfängern $1\frac{1}{2}$ —2 m, d. h. um nur ein Drittel ihrer Länge entfernt. Mit Stab Nr. 1 wurden am Ende der Reihen 1—4 auch einige Kontrollmessungen im Freien, d. h. in dem Hofe des Institutskomplexes angestellt. Sie ergaben für σ Werte, die (im Mittel 0,21) um rund 0,045 größer als die vorher und nachher im Zimmer erhaltenen, noch um ebensoviel kleiner blieben als der Abrahamsche Wert. Vermutlich war auch noch bei diesen Messungen die Anordnung der Leitungsdrähte unvollkommen, auf die erst seitdem mehr geachtet wurde.

B. In Nr. 5—7 sind die parallelen Abschnitte der Leitungen, die jetzt *gestrichelt* wiedergegeben sind, vergrößert. Die Speiseleitung läuft an der unteren Kante der Türwand, von dort quer zum Induktorium J' , das mit dem Erreger O' rechts von M_2 steht. Von dem Kreisempfänger bei K' und dem längsgerichteten Stabe BB' führen wieder die Leitungen zu dem Umschalter u' ; die gemeinsame Leitung läuft zur Fensterwand und an dem Gasrohr ihrer unteren Kante entlang zu dem Panzergalvanometer G über w_1 . Die Ablesestellung befindet sich bei S . Von den beiden parallelen Leitungen in den unteren Kanten der Fenster- bez. Türwand hatten die Stäbe 2 bez. 2,5 m Abstand. Während dieser Messungen wurde mit den $\Delta\sigma$ Versuchen begonnen.

C. Der kleinste Stab Nr. 7 wurde daneben (bei den $\Delta\sigma$ Messungen ausschließlich) in der unter den gegebenen Verhältnissen bestmöglichen Anordnung parallel den Querwänden verwendet, die in der Nähe alle Zuleitungen (auf der Figur *punktiert*) senkrecht zu ihm zu legen erlaubte. Induktorium

und Erreger¹⁾ behalten ungefähr ihre letzte Stellung bei, der Stab liegt bei CC' . Die Speiseleitung lief von U am Fußboden in der Längslinie des Zimmers. Benutzt wurde 1. das Galvanometer über w_1 , zu dem die Leitung von dem Thermoelement erst senkrecht aufwärts, dann in 2 m Höhe in der Längslinie des Zimmers verlief (befestigt an den Lampen über M_2 und M_1), um nahe der Querwand, 5 m vom Stabe entfernt, nach w_1 umzubiegen. 2. Dieselbe lange Leitung wurde in einer zu den Längswänden parallelen Vertikalebene zurückgeführt und an das p. 662 erwähnte zweite Spulengalvanometer angeschlossen, das auf M_2 stand. 3. Daneben wurde letzteres auch durch eine direkte 1,2 m lange Leitung mit dem Thermoelement verbunden. 4. Während einzelner Messungen bei Anordnung 3. wurde die lange Zuleitung von 2. nicht abgenommen, sondern blieb, an beiden Enden ohne Kontakt, in ihrer Lage.

Auf diese anscheinend gleichgültigen Details in der Anordnung wird nur hingewiesen, weil auch bei quer gestelltem Drahte die absoluten Werte der Strahlung (σ Messungen) große Abweichungen zeigten, die vielleicht indirekt mit der oft gewechselten Galvanometeranordnung in Zusammenhang stehen (ungenügend senkrechte Führung der Zuleitung?). Dagegen erwiesen sich die $\Delta\sigma$ Ergebnisse hiervon als zum mindesten qualitativ unabhängig.

Resultate der $\Delta\sigma$ Messungen.

1. Es folge jetzt die Beschreibung der $\Delta\sigma$ Versuche, deren Tab. V einige vereinigt, die das Vorhandensein einer *Abnahme* der Stabstrahlung bei Anwesenheit verschieden beschaffener paralleler Drähte in verschiedener Entfernung und Lage zeigen. Der Stab (wie stets im folgenden) 1 mm dick, wurde zwischen Versuch 3 und 4 von 400 auf 385 cm verkürzt und liegt stets bald in, bald einige Zentimeter über der ca. 145 cm hohen Erregerebene. Die Versuchsanordnung ist die unter B. beschriebene. Im Abstand a vom Stabe, annähernd symmetrisch zu ihm, wurde ein Draht²⁾, über den

1) Der Erreger ist, wie vieles andere, in Fig. 3 nur schematisch angedeutet, seine Orientierung im Zimmer wechselnd.

2) In Nr. 1—4 blank und 3 mm dick, in 5—8 umspinnen und 1 mm dick, weiterhin stets 1 mm dick und blank.

Tabelle V.

Nr.	a	Paralleldraht	h	n	γ_{01}	γ'_{01}	$\Delta\sigma$	s^m	$s^{m'}$
I. Auf der Fensterseite (Erreger außenständig).									
1	30	460 cm langer Draht, am einen Ende geerdet	150	4	b) 0,522	a) 0,262 c) 0,258	-0,26	b) 45	a) 121 c) 134
2	75	Desgl. an beiden Enden geerdet	150	4	b) 0,565 d) 0,508	a) 0,374 c) 0,385	-0,18 -0,15	b) 49 d) 46	a) 80 c) 113
3	150	Desgl.	170	4	a) 0,554 c) 0,590	b) 0,506	-0,06	a) 39 c) 48	b) 49
4	—	Desgl. ungeerdet und in der Mitte unterbrochen	150	4	{ 0,585 0,597	0,516	-0,07	64	68
II. Auf der Türseite (Erreger zwischenständig).									
5	200	810 cm langer Draht	150	8—12	{ 0,666 0,676 0,675	{ 0,591 0,589 0,598	-0,07	61	68
6	220	Desgl.	150	6	{ 0,704 0,740	{ 0,659 0,716	-0,04 -0,08	42	43
7	240	860 cm langer Draht	280	6	{ 0,603 0,610	{ 0,614 0,630	+0,01 +0,02	84,5	82,5
8	—	Desgl. mit aufgerollten ca. 4,40 cm langem Ansatzstück	280	12	0,614	0,619	+0,005	85,5	81,2

die folgende Kolumne weiteres enthält, h cm hoch parallel angebracht. Die Dämpfung, ohne ihn γ_{01} (Maximalausschlag s^m), wird durch ihn zu γ'_{01} (Maximalausschlag s^m); $\Delta\sigma$ ist die durch ihn bewirkte Änderung der Dämpfung, d. h. der Strahlung des Stabes. In Nr. 1—3 sind beide Bestimmungen nach Methode 1 kombiniert, und wie in dem Beispiel p. 664 die Beobachtungen, deren Reihenfolge die Buchstaben andeuten, einzeln aufgeführt. Von Nr. 4 ab wurde Methode 3 angewandt. Mehrere aus einer Beobachtung berechnete Werte sind durch eine kleine Akkolade verbunden; der oberste Wert ist entsprechend p. 669 der beste. Die Anzahl der im ganzen bei einer Einstellung vorgenommenen Ablesungen gibt n an (für gewöhnlich gleich 4).

Für das Eintreten des Effektes überhaupt war es gleichgültig, ob der störende Draht auf der Fenster- oder Türseite des Stabes lag, d. h. der Erreger, dessen Mitte 10—25 cm Abstand von der Stabmitte hatte, sich außerhalb des von beiden gebildeten Viereckes oder zwischen ihnen befand. Die Länge (Periode) der ungeerdeten Paralleldrähte weicht in verschiedenem Sinne von der des Stabes ab; in Nr. 4 ist sie über halb so groß, in Nr. 5 und 6 gegen $2\frac{1}{2}$ mal so groß. In letztgenanntem Versuche liegt der Paralleldraht bereits an den Holzregalen R (Fig. 3) an und kommt bei weiterer Vergrößerung der Periode und des Abstandes a annähernd in die Luftlinie zwischen dem Stab und der oben an der Türwand verlaufenden elektrischen Leitung zu liegen, von der er 40—50 cm Abstand hat. Der nicht mehr deutliche Einfluß auf die Strahlung (womöglich Erhöhung) ist in diesem Falle in seiner Herkunft fraglich. Jedenfalls dürften bei den σ Messungen an diesen und um so mehr an den längeren Stäben bei Anordnung A parallele Leitungen sich störend geltend gemacht haben, wenn man annimmt, daß mit der Stablänge auch der Bereich einer merklichen Einwirkung wächst. Der Effekt kann endlich auch von *geerdeten* Paralleldrähten ausgehen (Nr. 1—3); die Erdung bestand darin, daß ein paralleles Drahtstück von 460 cm Länge an einem bez. beiden Enden durch ziemlich senkrecht zu ihm geführte Drähte mit den Gasröhren über w_2 und w_3 verbunden wurde. Der Vergleich von $\Delta\sigma$ in 2 und 3 zeigt noch besonders die nach der ganzen Tabelle wahrscheinliche Abnahme des Einflusses mit der Entfernung a .

Wenn auch in der *drahtlosen Telegraphie* die Verhältnisse zum Teil andere sind, so ist doch die wohl von Hrn. Zenneck¹⁾ gefundene Schwächung der Übertragung durch einen den Antennen nahen parallelen Draht wohl teilweise auf Verminderung ihrer Strahlung zurückzuführen; denn nach Messungen von Hrn. Sachs zeigte diese „Schirmwirkung“ ein geerdeter Draht, sowohl — wenn auch in verschiedenem Grade — wenn er beim Sender oder Empfänger auf der Verbindungslinie beider als auch wenn er auf deren äußerer Verlängerung lag.²⁾

2. Die Vermutung, daß bei der drahtlosen Telegraphie von der Erde isolierte Drähte nur wegen des Mißverhältnisses zwischen ihrer und der benutzten Wellenlänge die Übertragung viel weniger schwächen, erhält Wahrscheinlichkeit durch das Ergebnis der folgenden Versuche, daß der beobachtete *Effekt* um so *schwächer* hervortritt, je mehr die *Periode* (Länge) des Paralleldrahtes nach oben oder unten hin von der des Stabes *abweicht*. Hierzu wurde, bei Benutzung des 385/0,05 Stabes, das eine Mal (Tab. VI, 1) von einem gleichlangen Paralleldraht ausgegangen, der durch Anfügen von einem bez. zwei 40 cm langen Drahtstücken (mittels Klemmschrauben) an ein bez. beide Enden auf 425 bez. 465 cm Länge (l') gebracht wurde; das andere Mal (VI, 2) von einem 305 cm langen Drahte, der in derselben Weise um 40 cm verlängert bez. dem Stabe gleich gemacht wurde. Es wurden so (nach Methode 3) die Dekrementsummen (unter γ'_{01}) miteinander verglichen, wenn der Paralleldraht gleiche oder rund 10 und 20 Proz. größere bez. kleinere Periode hatte als der Stab oder endlich ganz entfernt wurde (γ_{01}). Auf diesen Fall beziehen sich wieder die Abnahmen $\Delta\sigma$.³⁾ Der Abstand a , in Nr. 1 100 cm (0,26 l) bei zwischenständigem Erreger, ist in Nr. 2 auf 200 cm (0,52 l) erhöht, nachdem festgestellt worden war, daß auch in noch größerer Entfernung ein abgestimmter Draht deutliche Einwirkung zeigte (Beispiel zu Methode 3, p. 667).

1) F. Braun, Physik. Zeitschr. 4. p. 361. 1902.

2) J. S. Sachs, Ann. d. Phys. 18. p. 348. 1905.

3) In Nr. 1 ist γ_{01} erst nach Beendigung des Versuches bestimmt, daher die $\Delta\sigma$ nur relativ richtig.

Tabelle VI.

Nr.	a	l'	$(l' - l) \cdot 100/l$	γ'_{01}	$-\Delta\sigma$	$s_{m'}$	γ_{01}, s_m
1	100 cm	385	0	0,30	(0,23)	182	$\left. \begin{array}{l} \gamma_{01} = 0,53 \\ s_m = 39 \end{array} \right\}$
		425	+10 Proz.	0,38	(0,15)	82	
		465	+20	0,50	(0,03)	54	
2	200 cm	385	0	$\begin{Bmatrix} 0,474 \\ 0,488 \end{Bmatrix}$	0,227	77,5	$\left. \begin{array}{l} \gamma_{01} \begin{Bmatrix} 0,701 \\ 0,726 \end{Bmatrix} \\ s_m = 48 \end{array} \right\}$
		345	-10	0,503	0,198	75	
		305	-20	$\begin{Bmatrix} 0,618 \\ 0,630 \end{Bmatrix}$	0,083	57	

Es zeigte sich ferner in diesen und anderen Versuchen eine von der Verstimmung des Paralleldrahtes abhängige Verschiebung der Resonanzwellenlänge bis um 2 Proz., die sich folgendermaßen charakterisieren läßt. Geht man von der Wellenlänge $\lambda_{m'}$ des Erregers aus, bei der in Anwesenheit des abgestimmten Drahtes die Integraleffekte im Stabe ihr Maximum erreichen, so ändert sich $\lambda_{m'}$ in dem Sinne, in dem der Paralleldraht gegenüber dem Stabe verstimmt wird. Dabei dürfte $\lambda_{m'}$ bei abgestimmtem Draht mit λ_m ohne Draht merklich übereinstimmen, solange nicht a zu klein und $-\Delta\sigma$ zu groß wird (vgl. p. 672 u. 686).

Eine merkliche Einwirkung des 40 cm langen eisernen Armes, der Schlittenführung und Kapazität des Erregers trug, wie sie immerhin bei seiner Nähe (bis 30 cm) im Fall paralleler Lage denkbar erschien, ergab sich für beide Empfänger nicht. Hierzu wurde ihnen ein gleichgebautes zweites Stativ auf noch kleinere Distanz genähert.

3. Die weiteren Versuche beziehen sich auf einen *abgestimmten* Paralleldraht, da dieser den bestdefinierten Fall bildet und die deutlichsten Wirkungen liefert. Wurde ein solcher (auf der Türseite) in 2 m Abstand von dem 385/0,05 Stabe, aber in verschiedener Höhe angebracht, so war der Effekt ein merklich verschiedener (Methode 3):

h	γ'_{01}	$-\Delta\sigma$	γ_{01}, s_m
145	0,36	0,32	0,68; 64
10	0,556	0,12	

Die kleinere Wirkung bei seiner tieferen Lage kommt, da bei diesen Entfernungen der Erreger kaum die um den Stab zu erwartende Symmetrie stören wird, wohl auf Rechnung der Nähe der Fußbodenleitungen (p. 670). In der Tat bringt ein zweiter, dem ersten Draht genäherter Paralleldraht eine entsprechende Wirkung hervor, wie die folgenden Versuche (Tab. VII) zeigen (Methode 2).

Tabelle VII.

Nr.	a	α	γ'_{01}	γ''_{01}	s'_m	s''_m
1	200	22	$\begin{Bmatrix} 0,360 \\ 0,369 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,378 \\ 0,380 \end{Bmatrix}$	153	151
2	215	60	0,430	0,461	69	60

Die Dämpfung γ_{01} ohne Draht, nicht mit beobachtet, beträgt 0,60 bis 0,70; γ'_{01} bezieht sich auf die Anwesenheit eines Drahtes in Höhe des Stabes (ca. 150 cm). Bei dem größeren γ''_{01} ist etwas tiefer gleichzeitig ein zweiter Draht im Abstand α vom ersten angebracht; ihre Entfernungen vom Stabe sind die gleichen (a). In solcher Weise könnten auch die positiven $\Delta\sigma$ in Nr. 7 u. 8, p. 675 entstanden sein. Ein zweiter Paralleldraht nahe dem Fußboden und weiter von dem ersten entfernt, so daß im Gegensatz zu Tab. VII $\alpha > a$, schwächte seinen Einfluß nicht, der um so reiner hervortreten wird, je größer die Entfernungen störender paralleler Leiter vom Stab und Draht gegenüber deren gegenseitigem Abstand sind. In $\Delta\sigma$ Erscheinungen, die sich auf größere Entfernungen der Paralleldrähte beziehen, bringen daher die störenden Leitungen des Versuchsraumes selber eine gewisse Unsicherheit, was beim folgenden stets im Auge zu behalten ist.

4. Als im Abstand von rund 2 m dem 2 m-Stabe bei der möglichst einwandfreien Aufstellung C senkrecht zu den Längswänden *parallel* ein abgestimmter Draht aufgehängt wurde, *wuchs* die Dämpfung im Gegensatz zu den bisherigen Erfahrungen. In den Versuchen der Tab. VIII (Meth. 3; in Nr. 6:2) sind wieder die Bedingungen variiert; zumal sich der positive Effekt des abgestimmten Drahtes auf die Strahlung auch bei Hebung der Erreger-Stabebene auf 170 cm zeigte, ist eine nur *scheinbare*

Tabelle VIII.

A. Erregerebene 140 cm über dem Fußboden.

I. Paralleldraht auf der entgegengesetzten Seite wie der Erreger (Err. außenständig).

Nr.	a	b	n	γ_{01}	γ'_{01}	$\Delta \sigma$	s^m_1	$s^{m'}$	C (p. 674)	γ_{02}
1	200	145	4	$\begin{cases} 0,499 \\ 0,509 \end{cases}$	0,515	+0,015	104,5	100,5	1	0,386
2	200	145	6	0,518	0,538	0,020	108	101	1	0,378
II. Paralleldraht auf derselben Seite wie der Erreger (Err. zwischenständig).										
3	200	145	4	0,495	0,576	0,081	147	123	1	0,373
4	200 250	145	4		0,411 0,398			117 127	1	
5	200 250	145	4	$\begin{cases} 0,512 \\ 0,515 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,577 \\ 0,561 \end{cases}$ $\begin{cases} 0,526 \\ 0,521 \end{cases}$	0,065 0,014	133	113,5 127,5	1	
6	200 110	15 40	4	0,435	0,438 0,370	0,003 -0,065	161	159 195	1	

B. Erregerebene 170 cm über dem Fußboden.

7	180	145	8-12	$\begin{cases} 0,508 \\ 0,508 \\ 0,519 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,561 \\ 0,555 \\ 0,579 \end{cases}$	+0,05	224,5	198	2	Erreger zwischen- ständig
8	180	85	4	$\begin{cases} 0,534 \\ 0,522 \\ 0,516 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,602 \\ 0,566 \\ 0,555 \end{cases}$	ca. 0,05	211	197	3	
9	180	155	6	$\begin{cases} 0,566 \\ 0,545 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,584 \\ 0,580 \end{cases}$	0,02	203	198	3	

außenst.

Entstehung nach Analogie von Tab. VII nicht wahrscheinlich. In Versuch 5, der für $a=250$ kleineres $+ \Delta \sigma$ zeigt als für $a=200$ (entsprechend Nr. 4, wo aber γ_{01} nicht mit beobachtet ist), wurde auch γ_{02} bei denselben drei Kombinationen gemessen. Der Abstand des Drahtes von der Mitte des Kreiseempfängers ist 20 cm kleiner als a , sein Abstand von dem (während der Messung in der Mitte offenen) Stabempfänger. Es betrug γ_{02} 0,370, 0,366, 0,370, und der Maximalausschlag s_2^m 97, 96,5, 97,25, je nachdem der Paralleldraht fehlte, bez. 230

und 180 cm Abstand von dem Kreiseempfänger hatte. Er wirkt also nicht auf ihn ein, und umgekehrt zeigt die gute Übereinstimmung der einzelnen Werte, daß in den teilweise sehr glatten Versuchen $\gamma'_{01} - \gamma_{01}$ trotz der relativen Kleinheit gegenüber den früher beobachteten Strahlungsabnahmen nicht innerhalb der Versuchsgenauigkeit liegt, und wegen der Konstanz von γ_{02} , also auch von γ_0 , wirklich als

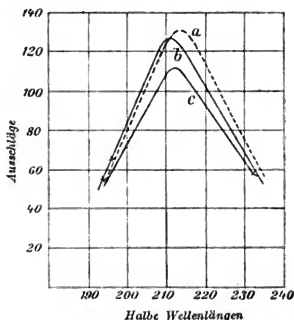


Fig. 4.

Strahlungszunahme zu interpretieren ist. Die dem Versuch VIII,5 entsprechenden drei Resonanzkurven des Stabempfängers gibt Fig. 4 wieder: a ohne Paralleldraht, b und c mit Draht im Abstand 250 und 200 cm.

5. Versuch Nr. 6 (Tab. VIII) zeigt für $a=110$ wieder Strahlungsabnahme, die sich also auf kleinere Abstände zurückgezogen hat. Umgekehrt erscheint es nicht verwunderlich, wenn bei dem 385 cm-Stabe eine Strahlungszunahme nicht mehr einwandfrei zur Beobachtung gelangte. Den näheren Verlauf in beiden Gebieten, in denen die beiden entgegengesetzten Effekte auf σ eintreten, zeigt Tab. IX, die einem einzigen Versuch mit zwölf Dekrementsummenbestimmungen nach Methode 2 entspricht (Erreger zwischenständig ca. 145 cm, Stab und Draht 150 cm hoch, Galvanometeranordnung p. 674 C_2 ; $n=4$, $\zeta < 3$ Proz.). Die erste Kolumne gibt an, in welcher Reihenfolge auf dem

Tabelle IX.

Nr.	a	a/l	γ_{01}	$\Delta \sigma$	s^m	$\lambda^m / 2$
4	∞	∞	0,516	0	113	213,5
5	250	$1\frac{1}{4}$	0,586	+0,020	109	212,5
6	200	1	0,586	+0,070	93	213,5
7	175	$\frac{7}{8}$	0,576	+0,060	94	214,5
8	150	$\frac{3}{4}$	0,589	+0,023	101	217
9	125	$\frac{5}{8}$	0,476	-0,040	120	214,5
10	100	$\frac{1}{2}$	0,445	-0,071	145	214,5
1	100	$\frac{1}{2}$	0,432	-0,084	160	212,5
2	75	$\frac{3}{8}$	0,396	-0,120	214	210
3	50	$\frac{1}{4}$	0,354	-0,162	364	208
11	γ_{02} beträgt:		0,361	am Ende des Hinwegs	98	213,5
12			0,348	am Anfang des Rückwegs	100	213,5

Hinwege die Empfängeranordnungen aufeinander folgen. Am Ende des Hinwegs und Anfang des Rückwegs, zwischen die eine Mittagspause fällt, liegen je eine vollständige (Hin- und Rückweg umfassende) Bestimmung von γ_{02} (Nr. 11 und 12), aus deren Übereinstimmung sich ergibt, daß γ_0 sich während der Unter-

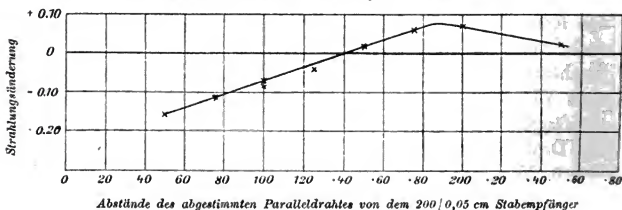


Fig. 5.

brechung nicht zu sehr geändert hat. Während der Bestimmungen von γ_{01} mit und ohne Draht (unter $a = \infty$) wurde der Kreisempfänger ganz entfernt. Zur Kontrolle, ob das mittlere γ_0 während der langen Hin- und Rückwege sich verändert hat, kommt eine Kombination (γ_{01} für $a = 100$) zweimal, am Anfang und Ende des Hinweges vor (Nr. 1 und 10). In der Kurve Fig. 5 sind die Abstände a des abgestimmten

Drahtes als Abszissen, die Strahlungsänderungen $\Delta\sigma$ als Ordinaten aufgetragen; sie zeigt auf weiter Strecke einen jedenfalls annähernd *linearen* Verlauf, mit einer Neigung $\Delta\sigma/\Delta a$ von etwa 0,0018.

6. Auf den aus Fig. 5 interpolierten Wert für a , bei dem die Strahlung des Stabes ihr Maximum, wie das Maximum ihrer Zunahme erfährt (± 190), und denjenigen Abstand, in dem der Draht σ überhaupt nicht beeinflußt (Indifferenzlage ± 142), beziehen sich folgende drei Versuche (Tab. X).

Tabelle X.

Nr.	a	γ_{01}	$\Delta\sigma$	s_m	Bemerkungen
1 (C_1)	190	{0,661	{+0,101	117	} $\gamma_{01} = 0,347$ $\gamma_{12} = 0,213$
	143	{0,624	{+0,064	130	
		0,570	+0,010	134	
	∞	0,560	—	134	
2 (C_2)	142	0,442	-0,014	114	} $\gamma_{01} = 0,318$ $\gamma_{12} = 0,188$
	∞	0,456	—	115	
3 (C_3)	143	{0,498	{-0,004	148	} Draht wie bisher; auf der anderen Seite; auf beiden Seiten; Drähte entfernt.
		{0,511	{+0,009	148	
	143	0,469	-0,033	159	
	143	{0,432	{-0,070	167	
		{0,445	{-0,057	167	
	∞	0,502	—	153	

Die Resonanzkurven des Stabes ohne und mit Stab in den Abständen 142 und 143 fallen, besonders in dem zweiten Versuche nach Methode 3 ($n=8$) nahezu zusammen. Versuch 1 (Beispiel p. 665 für Methode 2) ergibt im Einklang mit der Kurve eine maximale Strahlungserhöhung von etwa 0,08, d. h. von reichlich 25 Proz. des ursprünglichen oder Abrahamschen Wertes. Im dritten Versuch (Methode 3, $n=4$) wird der Stab auch im Abstand 143 cm auf der entgegengesetzten Seite wie zuletzt angebracht, so daß der Erreger außenständig ist; der Abstand könnte hier noch dem Gebiet der negativen Effekte angehören. Wurde jetzt (Zeile 3) noch ein zweiter Draht auf der ursprünglichen Seite angebracht, so nahm σ weiter ab; der Abstand 143 auf der Seite des Erregers ist bei den ver-

änderten Verhältnissen möglicherweise nicht mehr Indifferenzlage des Stabes.

7. In Tab. IX ist σ bei $a = 50$ schon auf etwa 0,10, rund $\frac{1}{3}$ des ursprünglichen Wertes gesunken, da γ_0 ca. 0,29. Zur Verfolgung des Verlaufs bei großer Annäherung ist der abgestimmte Draht in dem ganz ähnlich angeordneten Versuch Tab. XI (Methode 2, $n = 4$, Galvanometer C_2) auf der anderen

Tabelle XI.

Nr.	a	a/l	γ_{01}	$-\Delta\sigma$	s^m	$\lambda^m/2$
2	∞	∞	0,486	—	116	210
3	50	0,250	0,269	0,217	194	208
4	35	0,175	0,241	0,245	272	205,5
5	25	0,125	0,213	0,273	365	204,5
6	5,5	0,127	0,218	0,268	265	199,5
7	2,6	0,013	0,248	0,238	119	199,5
1	γ_{02} beträgt: {		0,279	am Anfang des Versuches	124	217
8			0,272	am Ende des Versuches	155	219

Seite als der Erreger angebracht, um nicht mit diesem in Kollision zu geraten. Es zeigt sich γ_{01} von $a = 50$ cm an kleiner als γ_{02} , also $\vartheta_1 < \vartheta_2$; da letzteres 0,067, die Funkendämpfung γ_0 also etwa 0,21 beträgt, ergibt sich, daß von dem Drahtabstande 25 cm (= rund $l/8$) an die Strahlung nur *verschwindend klein* sein kann. Bis zu diesem Verschwinden zeigt auch hier σ annähernd lineare Abhängigkeit von a ; man findet z. B. für den nach Tab. X, 3 jenseits 143 cm anzunehmenden Indifferenzabstand $a_i = 150$ cm:

a	$\Delta\sigma / (a_i - a) = \Delta\sigma / \Delta a$
50	$0,217 : (150 - 50) = 0,00217$
35	$0,245 : (150 - 35) = 0,00213$
25	$0,273 : (150 - 25) = 0,00220$

Umfassendere Prüfung der Konstanz der Strahlungsänderung pro Zentimeter Annäherung des abgestimmten Paralleldrahtes war leider nicht mehr vorzunehmen.

8. Beim Übergang von $a = 25$ oder $5,5$ auf $a = 2,6$ cm zeigt Tab. XI Zunahme der Dämpfung $\Delta' \gamma$ um $0,03$. Berechnet man nach Formel (5) $\mathcal{G}_1$ für verschiedene Abstände a , so erhält man:

a	200	8	4	1
$\mathcal{G}_1$	0,006	0,011	0,011	0,017

Es ist also $\Delta' \mathcal{G}_1$ kleiner als die Dämpfungszunahme $\Delta' \gamma$ bei großer Annäherung, wie auch im Versuch Tab. XII, in der die Dekremente aus Hin- und Rückweg gesondert berechnet wurden; eine gleichsinnige Änderung in beiden Fällen sagt offenbar mehr, als wenn sie nur aus der Vereinigung beider hervorgeht. Auch mußte hier (wie schon Tab. XI zwischen 2 und 3) der Abstand des Stabes vom Erreger zwischen 1 und 2 geändert werden, um nicht in beiden Fällen zu ungleiche Ausschläge zu erhalten; endlich konnten auf dem Rückwege die Stellungen des Hinweges nur auf etwa 1 mm genau reproduziert werden, was sich bei kleinem a geltend machen kann.

Tabelle XII.

Nr.	a	γ_{01}		s_1^m	
		Hinweg	Rückweg	Hinweg	Rückweg
4	22	0,209	0,200	380	277
3	13	0,219	0,193	436	272
2	4,3	0,218	0,229	232	118
1	1	0,426	0,363	58	114
		0,408			
$\Delta' \gamma$: Zunahme von Nr. 2 auf 1		0,092	0,139	—	—

Bei anderer, im Gegensatz zu bisher vertikaler Orientierung der Ebene von Stab und Draht (wobei der letztere unter dem ersteren senkrecht auf und ab geschoben wurde, und der von beiden Drähten stärker mit dem Erreger gekoppelte war) machte sich die starke Abnahme der Ausschläge für $a = 1$ cm, wo nur sehr wenige Kraftlinien den Raum zwischen beiden Drähten durchsetzten, noch unangenehmer bemerkbar.

Tabelle XIII.

Nr.	a	γ_{01}		δ_1^m	
		Hinweg	Rückweg	Hinweg	Rückweg
1	8	0,178	0,181	175	177
2	4	0,168	0,187	198	205
3	1	0,214	0,213	68	69
	$\Delta' \gamma$	0,046	0,026	—	—

Diesen Versuchen, deren Tab. XIII ein Beispiel enthält, haftet wegen (des erst nachher erkannten) Einflusses eines möglichen Zusatzausschlages (p. 668) eine gewisse Unsicherheit an. Immerhin ist auch hier für $z = 5 \text{ mm}$ $\delta (= 0,011)$ plus $\Delta' \vartheta_1 (= 0,006)$ kleiner als $\Delta' \gamma$.

9. In den Versuchen (Tabb. IX, 2, 3 u. XI) nimmt λ_1^m in dem Maße ab, als die Strahlung verschwindet, und nähert sich λ , was nicht anders zu erwarten ist, da die Wellenlängen des Erregers durch Resonanz eines dem System Stab-Draht ähnlichen, nur mit Querbrücken versehenen Paralleldrahtsystems (von 36 mm Seitenabstand) bestimmt wurden (p. 661). Wie auch nicht anders zu erwarten, da man von jeher die Strahlung geschlossener Drahtvierecke als verschwindend klein annahm (Hertzsche Resonatoren), ergab sich die Dämpfung für ein solches durch Brücken an den Enden der parallelen Drähte *geschlossenes* System zu 0,230 und 0,234¹⁾, d. h. gleich γ'_{01} , bei dem an den Enden *offenen*, aus Stabempfänger und Paralleldraht für $a = 36 \text{ mm}$ bestehenden System ($\gamma'_{01} = 0,225$).²⁾ Beide unterscheiden sich nur dadurch voneinander, daß die Enden der parallelen Drähte bei dem Eichsystem (mit Brücken) Bäuche der Strömung, bei den unüberbrückten Drähten Bäuche der Ladung waren, welchem Unterschied auch die verschiedene Lage zum Erreger entsprach, bei der sie ansprachen.

Wegen des Verschwindens der Strahlung bildet der Stabempfänger mit geeignet genähertem Paralleldraht einen *natür-*

1) Zur Kontrolle wurde der eine Wert wie bisher durch Variierung der Erregerperiode bestimmt, der andere durch solche der Rechteckperiode, indem der Erreger auf $\lambda/2 = 200$ stehen blieb, und die durch das Thermoelement ersetzte Brücke verschoben wurde.

2) Mutatis mutandis ein Lechersches System.

lichen, leicht zu improvisierenden *Standardresonator* von sehr kleinem Jouleschen Dekrement zur Elimination der Erregerdämpfung, mag man ihn nun an Stelle des bisher hier verwendeten kreisförmigen Empfängers mit Kapazität und größerem ϑ oder beide zur gegenseitigen Kontrolle nebeneinander benutzen. Die beiden einzigen Messungen der letzteren Art (in Tab. XI und der zuletzt erwähnte Versuch) sind (Tab. XIV):

Tabelle XIV.

	γ_{01}	γ_{02}	σ	γ'_{01}	σ	a	Versuch
1	0,486	0,275	0,272	0,213	0,276	25	Tab. XI
2	0,503	0,306	0,258	0,225	0,283	3,6	p. 684
Mittel:			0,265		0,28		

wo die σ der dritten Kolumne mit Hilfe von γ_{02} , die der letzten Kolumne mit Hilfe der Dämpfung γ'_{01} des Stabes bei 25 und 3,6 cm nahe Drahte bestimmt sind. Wegen dieser gegenseitigen Kontrolle und genügenden Übereinstimmung verdienen beide Versuche aus der Zahl der zum Teil stark voneinander abweichenden σ Messungen am ehesten Vertrauen. Die mittels γ'_{01} im geschlossenen Raum gefundene Strahlung 0,28 für den 200/0,05 Stab (ϑ , anscheinend zu klein berechnet?) ist noch um 7 Proz. kleiner als der Abrahamsche Wert 0,299.

10. Es versteht sich von selbst, daß eine Einwirkung nicht bloß von parallelen Leitern, sondern allgemein von deren parallelen Komponenten ausgeht. Ein naher abgestimmter Draht möglichst *senkrecht* zum Stabe über seiner Mitte oder weiter von ihr entfernt, der um 90° gedreht seine Strahlung aufgehoben haben würde, zeigte höchstens kleine Einwirkungen, wie sie bei der Schwierigkeit absoluter senkrechter Orientierung nicht anders zu erwarten sind.

Hinsichtlich der Frage einer Einwirkung *isolierter* und *geerdeter* Leiter, soweit sie nicht unter die Klasse der gestreckten parallelen Leiter fallen, ergab sich ein für die Praxis der σ Messungen beruhigendes Resultat. Selbst innerhalb solcher Abstände (1/8), bei denen ein abgestimmter Paralleldraht die Strahlung aufhebt, sind isolierte und geerdete Metallkörper an den Stabenden (an denen wegen der Bäuche elek-

trischer Ladung am ehesten eine Einwirkung durch Influenz stattfinden könnte) einflußlos. Es wurde hierzu dem einen Ende der 385 und 200 cm langen Stäbe bei Aufstellung *B* bis auf 3 cm eine quadratische Zinkplatte von 40 cm Seitenlänge genähert, die auf einem Holzschemel oder, sorgfältiger isoliert, noch erst auf Paraffinklötzen auflag.

Die Resonanzkurve im Falle der anwesenden Platte zeigte gegen diejenige bei bloß anwesendem Holzträger regelmäßig eine eigentümliche Verschiebung, indem bei merklich identischen s^m und λ^m die Ausschläge, die den größeren λ' entsprachen, wuchsen, die den kleineren λ'' entsprechenden, abnahmen. Trotz dieser Verschiebungen (die bis zu 15 Proz. beobachtet wurden) ergab sich eine merkliche eindeutige Änderung von γ_{01} nicht. Wurde eine solche Platte durch einen senkrecht zum Stab nach der Gasleitung der Fensterwand führenden Draht (wie Tab. V, 1—3) geerdet, oder der Fall der geerdeten Platte mit dem der abwesenden verglichen, oder wurde der senkrechte Draht gar nicht mit ihr verbunden, sondern nur über dem Stabende vorbeigeführt, und fehlte daher auch die Platte ganz, so wurde Abnahme sämtlicher Ausschläge beobachtet.¹⁾ Wenn dieser eine Zunahme der Dämpfung entspricht, so bleibt sie jedenfalls, wie beispielsweise folgende drei Versuche (Tab. XV, Methode 3, $n = 4$) zeigen, relativ klein. Die Platte befindet sich horizontal a cm unter dem einen (linken) Stabende; γ_{01} ist die Dämpfung ohne sie, γ'_{01} mit ihr.

Tabelle XV.

Nr.	a	γ_{01}	γ'_{01}	$\Delta \gamma_1$	s_1^m	$s_1^{m'}$
1	13	0,434	0,443	0,009	99	83
2	6,5	0,432	0,443	0,011	145	117
		0,439	0,473	0,034	101,5	75,5
3	3,8	0,431				
		0,430	Holzschemel entfernt		103,5	
		0,434				

1) Hinsichtlich s^m auch in den p. 673 erwähnten Versuchen im Freien bei Annäherung von Personen beobachtet; vgl. auch J. Sachs, Ann. d. Phys. 18. p. 348. 1905.

Da der Holzschemel, auf den die Platte aufgelegt wurde, nach der Entfernung der Platte stehen blieb, so ist in Nr. 3, bei der größten Annäherung, γ_{01} auch noch für den Fall bestimmt, daß der Holzträger entfernt wurde. Die Werte mit und ohne ihn stimmen gut überein.

11. Berührt sei noch die für die σ Messungen bei Hinzuziehung des kreisförmigen Empfängers wichtige Frage, ob nicht beide Empfänger durch ihre gleichzeitige Anwesenheit auf verschiedenen Seiten des Erregers ihre beiderseitigen Resonanzkurven beeinflussen, falls nicht durch Ausheben des Thermoelements (p. 661) in dem gerade nicht benutzten Resonator die Ausbildung von Schwingungen nahezu unmöglich gemacht worden war.¹⁾ Die Größe der Ausschläge zeigte sich nicht unabhängig davon, ob der zweite Resonator in der Mitte offen oder (durch das Thermoelement) geschlossen war. Dieser Einfluß äußerte sich bei beiden Resonatoren in entgegengesetzter Weise und verschiedener Stärke: die Ausschläge im Stabempfänger nahmen für alle Erregerperioden um etwas (1—4 Proz.) *ab*, wenn der vorher offene Kreisresonator geschlossen wurde. Die Ausschläge des letzteren nahmen umgekehrt sehr deutlich (um 50 und mehr Prozent) *zu*, wenn die unterbrochenen Stabhälften miteinander verbunden wurden. Beide Resonatoren waren annähernd aufeinander abgestimmt und lagen in der Ebene des Erregers auf entgegengesetzten Seiten in solchem Abstände, daß sie bei offenem Gegenresonator gleiche Maximalausschläge ergaben. So lieferte der Kreisempfänger, bei 55 cm Abstand seines Mittelpunktes von dem des Erregers, die Resonanzkurven *a* bez. *b* (Fig. 6), je nachdem der Stabempfänger 631/0,15, dessen Mitte von der Mitte des Erregers 38, also von der des Kreisempfängers 93 cm Abstand hatte, offen oder geschlossen war (Methode 3, mit vielen Einstellungen, aber nur je einer Ablesung auf Hin- und Rückweg). Die entsprechenden Werte für γ_{02} sind 0,186 und 0,176; eine sichere und eindeutige Änderung der Dekrementsummen ergab sich im allgemeinen nicht, jedenfalls steht sie für den Kreisempfänger in keinem Verhältnis zu der Zunahme der Ausschläge.²⁾ Wurden die beiden Hälften des in der Mitte

1) Geschah meist bei den σ Messungen.

2) Stab und Erreger bilden zusammen einen Braunschen Sender loser induktiver Koppelung, der Erreger seinen „Flaschenkreis“.

offenen Stabes ganz entfernt, so blieb die Dämpfung γ_{02} erst recht merklich dieselbe (0,173 und 0,175, Methode 3), doch wuchsen die Ausschläge alsdann um etwa 2 Proz. Da der geschlossene (abgestimmte) Stab die Ausschläge im Kreisempfänger vergrößert, der offene (verstimmte) sie verkleinert,

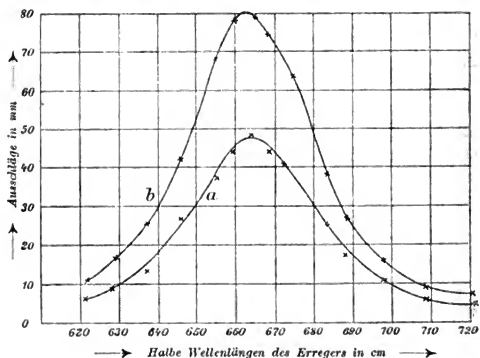


Fig. 6.

so wird man annehmen, daß seine Ausschläge zugleich abnehmen, sofern der Stab dem Erreger Energie entzieht, wie zunehmen, sofern er ihm Energie zuführt, und daß es von dem Verhältnis der Eigenperioden und der gegenseitigen Orientierung der Systeme abhängt, welcher Einfluß überwiegt. So wurde z. B. eine Abnahme der Effekte des Kreisresonators auch beobachtet, wenn der offene, mit halber Periode schwingende Stab so angebracht wurde, daß der *Kreisempfänger zwischen* Erreger und Stab lag, desgleichen wenn in dieser Lage der Stab geschlossen, aber durch Erdung an der Gasleitung in entgegengesetztem Sinne verstimmt wurde. Die in den übrigen Fällen beobachtete Zunahme der Ausschläge war am deutlichsten, wenn der Stabempfänger, sei es offen, sei es geschlossen, sei es außerdem geerdet, *zwischen* dem Kreisempfänger und Erreger lag, im Falle der Abstimmung natürlich am größten (Steigen der Ausschläge bis über das Vierfache).¹⁾

1) Näheres wird vielleicht noch anderen Ortes berichtet werden.

Daß die bei den Messungen benutzte Koppelung nicht zu stark war, wurde daran geprüft, ob sich die Dämpfungen mit der Ausschlaggröße änderten. Z. B. wurden Versuche an dem 200/0,05 Stab bei Anordnung B. in der Weise vorgenommen, daß beide Resonatoren stets annähernd gleiche s^m ergaben, diese aber durch Verstärkung der Koppelung im Verhältnis 1:5 variiert wurden; sie schließen nicht aus, daß γ_{12} alsdann bis um 0,05 zunahm, als wenn die Resonanzkurve des gestreckten Empfängers schneller abflacht als die des geschlossenen, bei Koppelung beider auf gleiche Effekte.¹⁾ Daß hiermit die großen Schwankungen in den σ Beobachtungen in Zusammenhang stehen, ist wegen der meist innerhalb viel engerer Grenzen variierten Maximalausschläge nicht wahrscheinlich.

Zusammenfassung.

1. Bei Messungen der Strahlung stabförmiger Leiter können (von etwaigem Einfluß der Wände abgesehen) in der Umgebung verlaufende parallele Leiter die Resultate je nach ihrer Entfernung, Eigenperiode und gegenseitigen Lage in verschieden starkem Maße beeinflussen. Ist ein Anschluß der Messungen an die Theorie beabsichtigt, so sollte möglichst ein um den Stab mit seiner anderthalbfachen Länge l als Radius beschriebener Raum von parallelen Drähten frei sein.

2. Das durch einen parallelen Leiter bewirkte Sinken der Strahlung eines stabförmigen Leiters ist um so größer, je genauer beide in ihren Eigenperioden (bez. Längen) übereinstimmen, zeigt sich aber noch bei Verstimmung durch Erdung.

3. Die Strahlung eines stabförmigen Leiters verschwindet, wenn ein (abgestimmter) Paralleldraht ihm genügend nahe kommt; bei 200 cm langen Drähten auf rund $l/8$ und näher. Bei sehr starker Annäherung (2 cm), bei der die induktive Erregung sehr mühsam wird, nimmt vielleicht die Dämpfung von neuem zu.

4. Für Messungen der Strahlung eines gestreckten als Empfänger benutzten Leiters erhält man durch Anbringen eines Paralleldrahtes in geeigneter Nähe wegen des Ver-

1) Starkes Abflachen der Resonanzkurve bei Annäherung für die umgekehrte Anordnung (stabförmiger Erreger, geschlossener Empfänger) bei F. Kiebitz, l. c. p. 896.

schwindens der Strahlung einen leicht zu improvisierenden Standard kleiner Widerstandsdämpfung zur Bestimmung der jeweiligen Dämpfung des Primärkreises.

5. Parallele Leiter können nicht nur Abnahme, sondern bei größerem Abstand auch Zunahme der Strahlung bewirken, ehe sich mit weiterer Entfernung ihr Einfluß verliert. Für einen 2 m langen Draht ergab ein abgestimmter Draht im Abstand von rund einer Stablänge ein Maximum der Zunahme von reichlich 25 Proz. Durch parallele Leiter können also Messungen sowohl zu klein, als zu groß ausfallen, doch scheint ersterer Einfluß zu überwiegen.

6. Zwischen der Entfernung eines parallelen abgestimmten Drahtes, bei der die Strahlung des stabförmigen Leiters eben verschwindet (rund $1/8$) und derjenigen, bei der ihr Maximum liegt (rund 1), ist seine Strahlung (wenigstens angenähert) eine lineare Funktion des beiderseitigen Abstandes. Entsprechendes gilt wegen der Gleichartigkeit von Empfänger und Paralleldraht überhaupt von einem System von zwei parallelen Leitern verschiedener Entfernung.

7. Die Entfernung, in der zwei gleichlange Drähte die Strahlung, die sie ohne einander besitzen (desgleichen ihre Integraleffekte) weder verkleinern noch vergrößern (Indifferenzabstand), ergab sich bei 2 m langen Drähten zu rund $3/4$ ihrer Länge.

8. Die Einwirkungen eines parallelen Leiters auf den Stab bei bestimmter Entfernung nehmen bei seiner Annäherung an andere parallele Leiter ab. Je weniger ein System selber strahlt, um so weniger beeinflusst es die Strahlung eines anderen stark strahlenden. Wegen der im Versuchsraum verlaufenden Leitungen haftet den Beobachtungen bei relativ großen Drahtabständen eine auch durch Variierung der Versuchsbedingungen nicht ganz zu behebende Unsicherheit an.

9. Die Nähe geerdeter und erst recht isolierter nicht paralleler Leiter an einem Ende des stabförmigen Leiters übt noch in der Entfernung $1/8$, in der ein abgestimmter Paralleldraht seine Strahlung aufhebt, kaum merklichen Einfluß auf die Dämpfung, die wohl bei äußerster Annäherung wächst.

10. Der unter möglichst günstigen Bedingungen an einem 200 cm langen, 1 mm dicken Draht erhaltene Wert für seine

Strahlung (0,28) blieb noch ca. 7 Proz. unterhalb des theoretischen Wertes.

Vorderhand leider nicht in der Lage, vorstehende Versuche wieder aufzunehmen, die Ende März 1906 beendet wurden, habe ich mich zur Veröffentlichung entschlossen. Gerne spreche ich den Herren Dr. W. Schmidt, Dr. Zahn, Prof. Starke auch an dieser Stelle für mannigfache Förderung meinen freundlichsten Dank aus. Wie schmerzlich ist es mir, daß mein verehrter Lehrer, Hr. Prof. Drude, den Dank, der vor allem ihm gebührte, an dieser Stelle nicht mehr entgegennehmen kann.

Amsterdam, Dezember 1906.

(Eingegangen 1. Januar 1907.)

**5. Über die innere Reibung
zäher und plastisch-fester Körper und
die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes¹⁾;
von Heinrich Glaser.**

Einleitung.

Unter plastisch-festen Körpern verstehen wir solche, die sich gegen schnelle Deformationen wie feste Körper, gegen langsame dagegen wie plastische verhalten. Man kann sie als Flüssigkeiten mit sehr großer innerer Reibung auffassen. Ihr Verhalten ist unter anderem deshalb wichtig, weil neuere Untersuchungen gezeigt haben, daß das glühende Magma im Erdinnern wahrscheinlich Eigenschaften besitzt, die mit denen einer solchen Substanz in vielen Punkten übereinstimmen.²⁾

Zur Bestimmung ihrer inneren Reibung ist unter anderem auch die Poiseuillesche Strömungsmethode angewandt worden von C. Barus³⁾, A. Heydweiller⁴⁾, und in neuester Zeit von R. Ladenburg.⁵⁾ Letzterer hat Gemische von Kolophonium und Terpentinöl, deren Zähigkeit von der Größenordnung 10^3 war, teils nach der Stokesschen Methode der fallenden Kugeln, teils nach der Poiseuilleschen Methode untersucht.

Kurz vorher hat R. Reiger⁶⁾ Untersuchungen über die Anwendbarkeit der Poiseuilleschen Methode auf plastisch-feste Körper veröffentlicht. Als Versuchssubstanz benutzte er Kolophonium, dem er durch wechselnde Zusätze von Terpen-

1) Auszug aus einer Erlanger Inaugural-Dissertation.

2) Vgl. Doelter, Petrogenesis, erschienen in den Monographien der Wissenschaft, Heft 13. p. 3 ff.

3) C. Barus, Phil. Mag. (5) 29. p. 337. 1890.

4) A. Heydweiller, Wied. Ann. 63. p. 56. 1897.

5) R. Ladenburg, Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck, Münchner Diss. 1906; neuerdings im Auszug erschienen Ann. d. Phys. 22. p. 287. 1907.

6) R. Reiger, Über die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes bei zähflüssigen und festen Körpern, Ann. d. Phys. 19. p. 985—1006. 1906.

tinöl verschiedene Zähigkeitsgrade erteilte. Er untersuchte diese Gemische unter den verschiedensten Verhältnissen und fand, daß das Poiseuillesche Gesetz in erster Annäherung auch bei sehr zähen und plastisch-festen Körpern gilt. Bei seinen Gemischen ergaben sich Reibungskoeffizienten von

$$\eta = 3,01 \cdot 10^6 \text{ bis } \eta = 1,32 \cdot 10^9,$$

bei Temperaturen von 8,2 bis 9,0°.

Er kontrollierte die Ergebnisse seiner Versuche durch die Ermittlung von η aus der Gestalt der Stromflächen und fand dabei die nach Poiseuille gefundenen Werte bestätigt. Die Abweichung betrug nur 3,4 Proz.

Sowohl die Untersuchungen von R. Reiger als auch die besonders sorgfältigen Messungen von R. Ladenburg hatten vermuten lassen, daß Abweichungen vom Poiseuilleschen Gesetz auftreten. Zweck der vorliegenden Arbeit war es nun, zu untersuchen, ob und wie weit die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes bei sehr zähen und plastisch-festen Körpern von bestimmten Bedingungen abhängt.

Über die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes bei Flüssigkeiten liegt eine Anzahl Untersuchungen vor. So hat schon Poiseuille gefunden, daß nur sehr lange Röhren konstante Resultate für η ergaben. E. Hagenbach¹⁾ hat dann eine Formel aufgestellt, um die bei kurzen Röhren zu groß erscheinenden Reibungskoeffizienten zu korrigieren. Dieselbe lautet:

$$\eta = \frac{p \cdot \pi \cdot R^4 \cdot t}{8 \cdot l \cdot V} - \frac{s \cdot V}{\sqrt[3]{2^{10} \cdot \pi \cdot g \cdot l}}.$$

Hierin, sowie in allen folgenden Formeln und Tabellen, bedeutet:

- η = Koeffizient der inneren Reibung,
- p = Druck, unter dem das Durchfließen erfolgt,
- R = Radius der Durchflußröhre,
- V = Durchflußvolumen,
- t = Durchflußzeit,
- s = spezifisches Gewicht der Flüssigkeit,
- g = Beschleunigung der Erdschwere.

1) E. Hagenbach, Über die Bestimmung der Zähigkeit, Pogg. Ann. 109. p. 358 ff. 1860.

Dann ist von O. Reynolds¹⁾ eine Arbeit erschienen, in der er theoretische und experimentelle Untersuchungen anstellt über die Gesetze der Flüssigkeitsströmung in Röhren. Er findet, daß nur in sehr engen Röhren die Theorie der ineinander gleitenden Flüssigkeitszylinder zutrifft, während bei größeren Durchmessern energieverzehrende Wirbel auftreten, welche die Durchflußgeschwindigkeit herabsetzen und die innere Reibung zu groß erscheinen lassen.

In neuester Zeit ist eine Arbeit von A. Fausten²⁾ veröffentlicht worden, die als unteren Grenzwert für die Länge ca. 45 cm findet; bei kürzeren Röhren muß die Hagenbachsche Korrektur eintreten, da sich sonst zu große Werte ergeben würden.

Die bisher gefundenen Abweichungen vom Poiseuilleschen Gesetz lassen sich aus Umständen ableiten, die bei der Aufstellung der Poiseuilleschen Formel vernachlässigt wurden. Dagegen steht in Frage, ob nicht irgendwelche prinzipielle Abweichungen vorhanden sind. Zur Prüfung dieser Frage erscheinen die sehr zähen und plastisch-festen Körper als besonders geeignet, da bei ihnen die innere Reibung so groß wird, daß zu ihrer Bestimmung verhältnismäßig weite Röhren verwandt werden müssen. Dadurch wird man unabhängig von zahlreichen Fehlerquellen.

Da als zähe Versuchssubstanzen Gemische von Kolophonium mit Terpentinöl dienen sollten, war es wichtig, zunächst das Verhalten des letzteren in bezug auf innere Reibung zu prüfen.

I. Terpentinöl.

Zur Untersuchung des Terpentinöls wurde im wesentlichen die Anordnung benutzt, wie sie G. Wiedemann, Sprung, Pribram, Handl, Wagner u. a. und zuletzt G. Haffner³⁾

1) O. Reynolds, Trans. Lond. Roy. Soc. 174. p. 935. 1883.

2) A. Fausten, Versuche zur Bestimmung einer allgemeinen Formel zum Berechnen der Ausflußgeschwindigkeit beim Fließen des Wassers durch Röhren, Bonn. Diss. 1906.

3) Vgl. hierüber G. Haffner, Über die innere Reibung von alkoholischen Lösungen, Erlanger Diss. 1902.

angewendet und beschrieben haben (über die kleinen Abweichungen ist die Dissertation¹⁾ zu vergleichen).

Die Berechnung der Resultate erfolgte nach der Poiseuille-Hagenbachschen Formel.

Zunächst untersuchte ich die innere Reibung des Terpentins von 0 bis 85°, von 5 zu 5° fortschreitend. Die Apparatkonstanten waren:

$$R = 0,027 \text{ cm}; \quad l = 10,2 \text{ cm};$$

$$V = 28,41 \text{ cm}^3; \quad p = 142 \text{ cm Wassersäule}; \quad s = 0,87.$$

Danach wurde die Hagenbachsche Formel:

$$t' = t - \frac{660}{t}.$$

Bei jeder Temperatur wurden fünf Versuche angestellt und aus ihnen das Mittel genommen. Die erhaltenen Werte geben Tab. 1 und Fig. 1.

Tabelle 1.

τ^0	t	t'	$\eta \cdot 10^{-5}$	τ_0	t	t'	$\eta \cdot 10^{-5}$
0	386,8	385,1	2248	45	173,8	170,0	989
5	342,1	340,2	1981	50	163,2	159,2	926
10	308,7	306,7	1783	55	154,7	150,4	879
15	281,9	279,6	1626	60	144,8	140,3	821
20	257,5	255,0	1487	65	137,4	132,6	772
25	237,1	234,3	1364	70	130,1	125,0	728
30	218,6	215,6	1272	75	124,9	119,6	696
35	201,9	198,6	1163	80	120,7	115,2	671
40	187,2	183,7	1071	85	117,3	111,6	648

Die Tabelle und die Kurven lassen erkennen, daß mit steigender Temperatur die innere Reibung zuerst schnell und

1) H. Glaser, Über die innere Reibung zäher und plastisch-fester Körper und die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes, Erlanger Diss. 1906.

2) t' ist die mittels der Hagenbachschen Formel korrigierte Ausflußzeit.

dann immer langsamer abnimmt; der Verlauf der Kurven entspricht dem beim Wasser und sonstigen Flüssigkeiten beobachteten.

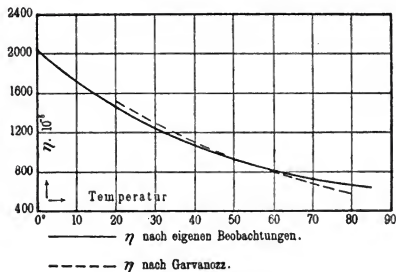


Fig. 1.

Die Resultate stimmen gut überein mit denen von Garvanoff¹⁾, die jedoch nur von 20—80° reichen, von 10 zu 10° fortschreitend. Die Abweichung meiner Werte von den Garvanoffschen beträgt bei 20°: —4 Proz. und bei 80°: +8 Proz., so daß eine Kurve, die auf Grund der Garvanoffschen Messungen konstruiert wird, einen etwas steileren Verlauf zeigt, als die von mir gefundene, — ein Umstand, der auf die chemische Undefiniertheit des käuflichen Terpentins zurückzuführen ist.

Die folgenden Versuche hatten den Zweck, nach einer Gültigkeitsgrenze des Poiseuilleschen Gesetzes zu suchen. Es wurden deshalb der Reihe nach die Durchflußgeschwindigkeit, die Röhrenlänge und der Röhrenradius variiert.

a) Die Durchflußgeschwindigkeit.

Reynolds hat in seiner oben erwähnten Arbeit gefunden, daß eine Vergrößerung der Durchflußgeschwindigkeit Wirbel erzeugt. Bei den Drucken, welche mein Apparat anzuwenden erlaubte, konnte ich dieses Resultat nicht beobachten. Erst bei Röhren von beträchtlicher Weite traten Wirbel auf (vgl. weiter unten), während bei der Röhre, die zu dem

1) J. H. Garvanoff, Wien. Ber. 103. IIa. p. 873. 1894.

vorliegenden Versuch verwandt wurde, kein Einfluß der Durchströmungsgeschwindigkeit festgestellt werden konnte.

Die Apparatkonstanten waren:

$$V = 28,41 \text{ cm}^3; \quad l = 19,2 \text{ cm}; \quad R = 0,027 \text{ cm};$$

$$\tau = 7,1^0; \quad p \text{ wurde von } 5\text{--}240 \text{ cm Wassersäule geändert.}$$

Die gefundenen Werte gibt Tab. 2, und zwar wieder als das arithmetische Mittel aus je fünf Versuchen.

Tabelle 2.

p	5	10	20	40	80	160	240
η'	9152	4571	2286	1143	572,1	286,3	143,4
v	1,78	3,61	7,12	14,20	28,50	56,90	85,40
$p \cdot \eta'$	45760	45710	45720	45760	45768	45771	45776

v ist hierin die Durchflußgeschwindigkeit in cm pro Sek. Trotzdem dieselbe von 1,78 cm auf 85,4 cm anwächst, ist ein Einfluß derselben nicht zu bemerken; das Produkt $p \cdot \eta'$ bleibt innerhalb der Fehlergrenze konstant; die maximale Abweichung beträgt 0,14 Proz. Leider gestattete der Apparat keine weitere Erhöhung des Druckes; immerhin aber wurde dargetan, daß die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes in sehr weiten Grenzen von dem angewandten Druck¹⁾ und damit der Durchflußgeschwindigkeit unabhängig ist.

1) Eine ganz andere Frage ist, wie sich die innere Reibung ändert, wenn man die zu untersuchende Substanz selbst unter hohen Druck setzt. So haben E. Warburg u. L. v. Babo (Wied. Ann. 17. p. 390. 1882) gefunden, daß unter hohem Druck (105 Atm.) die Zähigkeit der Kohlensäure steigt. Dagegen fand W. C. Röntgen (Wied. Ann. 22. p. 510. 1884) für Wasser die umgekehrte Erscheinung, ebenso E. Warburg u. J. S. Sachs (ebenda p. 518), die außerdem für Benzol und Äther eine Zunahme der Zähigkeit feststellten. Später fand W. C. Röntgen (Wied. Ann. 44. p. 98 ff. 1891) durch vergleichende Messungen, daß auch bei plastisch-festen Körpern durch hohen Druck eine Steigerung der Zähigkeit stattfindet; er konstatierte bei Marincleim unter 500 Atm. Druck eine Zunahme der Zähigkeit um 20 Proz. gegen diejenige beim Atmosphärendruck. In neuester Zeit hat R. Ladenburg in seiner bereits mehrfach erwähnten Arbeit nachgewiesen, daß für eine ziemlich zähe Mischung von Kolophonium und Terpentinöl durch eine Drucksteigerung von 100 Atm. die Zähigkeit um 112 Proz. wächst.

b) Die Länge der Röhre.

Bei dem folgenden Versuche sollte festgestellt werden, ob nicht bei sehr kurzen Rohrlängen Umstände auftreten, zu deren Korrektur die Hagenbachsche Formel nicht mehr ausreicht. Es wurden deshalb in den Apparat nacheinander Röhren verschiedener Länge eingesetzt, die von derselben ausgesucht gleichmäßigen Kapillare¹⁾ heruntergeschnitten waren. Druck und Radius blieben konstant. Da der Apparat durch das Einsetzen der langen Röhren so lang wurde, daß er in dem Wasserbad nicht mehr untergebracht werden konnte, wurden die Versuche im Keller vorgenommen, der — es war Mitte Winter — eine konstante Temperatur von $7,1^{\circ}$ hatte.²⁾ Um nicht unnötig im Versuchsraum weilen zu müssen, wurde aus ihm durch ein dazwischenliegendes Isolierzimmer hindurch nach dem vordersten Zimmer, das geheizt werden konnte, eine elektrische Leitung gelegt, die mit einem Haffnerschen Weckapparat³⁾ in Verbindung stand. Derselbe machte den Beobachter auf den bevorstehenden Durchgang der Flüssigkeit durch die Marke aufmerksam.

Untersucht wurden Röhren von 2–128 cm Länge. Tab. 3 gibt die gefundenen Werte, die wieder die Mittel aus je fünf Beobachtungen sind.

Die Apparatkonstanten waren:

$$V = 55,53 \text{ cm}^3; \quad R = 0,029 \text{ cm}, \\ p = 142 \text{ cm Wassersäule}; \quad l = \text{variabel.}$$

Tabelle 3.

l	2,1	4,1	5,9	8,1	16,1	31,9	63,9	128,2
l'	69,8	123,1	169,2	217,9	438,1	875,3	1454	3506
$\frac{l}{l'}$	0,0286	0,0325	0,0354	0,0367	0,0365	0,0365	0,0366	0,0364

1) Solche liefert in vorzüglicher Güte die Firma E. Gundelach in Gehlberg (Thüringen).

2) Beschreibung des Versuchsraumes vgl. weiter unten.

3) G. Haffner, l. c. p. 14.

Nach der Tabelle liegt also die untere Grenze der Röhrenlänge bei ca. 6 cm; darunter erhält man zu große Werte, selbst unter Anwendung der Hagenbachschen Korrektur.

c) Der Radius der Röhre.

Was den Einfluß der Röhrenweite anlangt, so hat wie erwähnt, O. Reynolds¹⁾ bei größeren Durchmessern das Auftreten von Wirbeln festgestellt, die den Durchfluß verlangsamen. Diese Erscheinung wurde näher untersucht und besonders eine obere Grenze festgelegt, von der ab infolge Wirbelbildung das Poiseuillesche Gesetz nicht mehr galt. Die Versuche, eine untere Grenze zu finden, ergaben wohl ein Ansteigen der Ausflußzeiten; diesen Ergebnissen kann jedoch vorläufig kein entscheidendes Gewicht beigelegt werden, da bei den äußerst engen Kapillaren, die hier in Frage kommen, das kleinste Staubteilchen das Resultat in unkontrollierbarer Weise beeinflusst. Solche kleinste Staubteilchen zu vermeiden, ist jedoch selbst bei der größten Sorgfalt fast unmöglich. Es wurde daher davon abgesehen, die Ergebnisse der betreffenden Versuche zu verwerten. Im folgenden sind nur die Resultate wiedergegeben, die bei den Untersuchungen gefunden wurden, welche auf die Auffindung einer oberen Grenze gerichtet waren. Auch diese Beobachtungen wurden im Keller vorgenommen.

Es war

$$\tau = 7,1^{\circ}; \quad V = 55,53 \text{ cm}^3; \quad l = 15,1 \text{ cm}; \quad R = \text{variabel};$$

$$p = 142 \text{ cm Wassersäule.}$$

Tab. 4 gibt die gefundenen Werte, die wieder die Mittel aus je fünf Ablesungen sind.

Tabelle 4.

R	0,004	0,015	0,020	0,032	0,041	0,063
t'	289 000	6090	1820	357,1	117,8	22,4
$\eta \cdot 10^{-5}$	1943	1918	1911	1914	1941	2563

1) O. Reynolds, l. c. p. 935 ff.

Die Tabelle läßt deutlich erkennen, daß bis zu einem Radius von etwa 0,04 cm das Poiseuillesche Gesetz gut gilt, während darüber die Werte zu hoch werden. Um zu versuchen, ob durch eine Verlängerung von solchen Röhren, die eben an der Grenze stehen, das Poiseuillesche Gesetz wieder zur Geltung gebracht wird, wurde eine Röhre von $R = 0,061$ cm und $l = 100$ cm untersucht, ohne daß jedoch irgend ein Erfolg in der angedeuteten Richtung erzielt wurde. η war gleich $2551 \cdot 10^{-5}$, gegenüber dem richtigen Wert gleich $1912 \cdot 10^{-5}$.

Resultate: Die innere Reibung des Terpentinsöls nimmt wie bei vielen anderen Flüssigkeiten stetig mit der Temperatur ab, ohne Maxima und Minima aufzuweisen.

Die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes hängt in erster Linie vom Röhrendurchmesser ab: zu weite Röhren — über 0,08 cm Durchmesser — geben zu große Werte für η . Erst in zweiter Linie kommt der Einfluß der Röhrenlänge und eventuell sehr hohe Durchflußgeschwindigkeit in Betracht. Bei sehr kleinen Durchmessern wurde ein Ansteigen von η beobachtet, das jedoch wegen der großen Fehlerquellen noch nicht als einwandfreies Ergebnis angesehen werden kann.

II. Gemische von Kolophonium und Terpentinsöl.

Nachdem die Versuche bei Terpentinsöl Aufschluß über die Verhältnisse bei einer Substanz geringer Zähigkeit gegeben hatten, wurde dazu übergegangen, solche von höherem η zu untersuchen und schließlich die plastisch-festen Körper in den Kreis der Beobachtungen zu ziehen.

1. Die Versuchssubstanz.

Als Versuchssubstanz wählte ich Gemische von Kolophonium und Terpentinsöl, die mit abnehmender Größe des Terpentinsölzusatzes immer zäher werden und schließlich die Eigenschaften eines plastisch-festen Körpers erlangen. Ein Nachteil des Kolophoniums ist seine chemische undefiniertheit. Es wird bei der Destillation von Harz als Nebenprodukt des Terpentinsöls gewonnen und kommt in meistens sehr verunreinigtem Zustand in den Handel. Dabei schwankt sein Gehalt an leichtflüchtigen Bestandteilen und somit seine Zähigkeit sehr stark.

Bei der Filtration vor der Verwendung verdampft außerdem ein Teil der ersteren, wodurch es wesentlich zäher wird. Auch bei dem Bereiten der Gemische und beim Einbringen derselben in den Versuchsapparat kann trotz aller Vorsicht immer etwas verdampfen.

Diesen Nachteilen stehen als Vorteile gegenüber die verhältnismäßig leichte Herstellung und Behandlung der Gemische sowie die leichte Veränderlichkeit der Zähigkeit durch Terpentinölzusatz. Die oben erwähnten Nachteile konnte ich meistens durch geeignete Vorsichtsmaßregeln unschädlich machen.¹⁾

2. Apparate und Methoden.

a) Das Filtrieren.

Das Filtrieren des auf einmal in größerer Menge bezogenen Kolophoniums geschah in einem eigens konstruierten Heißfilter bei ca. 200°. Fig. 2 gibt den Filtrierapparat wieder, an dem alle Nähte durch doppeltes Falzen oder Hartlöten hergestellt wurden. Als Material diente dünnes Schwarzblech. Der Apparat bestand aus einem zylindrischen, oben offenen Mantel *A*. Am unteren Teil war eine Öffnung eingeschnitten zum Einbringen eines Bunsenbrenners, und unter dem oberen Rand waren ringsum verteilt sechs kreisförmige Löcher *L* eingestanzt, um den sich entwickelnden Dämpfen freien Abzug zu gestatten. In ungefähr einem Drittel der Höhe war quer durch den Mantel *A* ein Drahtnetz gelegt, um ein direktes

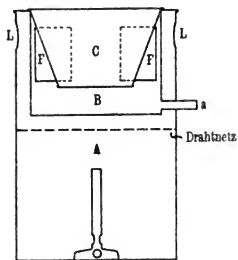


Fig. 2.

1) Versuche mit Gelatine hatten ergeben, daß dieselbe beim Durchpressen durch die Röhre nicht strömte, sondern nur ein gewisses Stück dem Drucke nachgab. War dann der Druck genügend hoch, um den Zusammenhang der Gelatine zu zerstören, so erfolgte ein plötzliches Reißen und Hindurchschießen durch den Apparat. Es sind jedoch im hiesigen physikalischen Institut Versuche im Gang, diese Schwierigkeiten zu überwinden.

Anschlagen der Bunsenflamme an die oberen Teile des Apparates zu verhindern. In dem Mantel *A* von oben eingehängt war das Einsatzstück *B*, ebenfalls oben offen und unter dem oberen Rand mit vier reichlich großen, fensterartigen Öffnungen *F* versehen, um ein Zirkulieren der heißen Luft durch den ganzen Apparat zu ermöglichen. Seitwärts war an *B* ein Ablaufstutzen *a* für das filtrierte Kolophonium hart angelötet, der durch *A* ins Freie reichte. In *B* lose eingehängt war der eigentliche Filter *C*, ein oben und unten offenes konisches Gefäß, dessen unterer Rand einen Wulst trug, um den ein Filtriertuch gebunden wurde. Dieses Filter funktionierte sehr gleichmäßig und verarbeitete jeweils in gleichen Zeiten gleiche Mengen Kolophonium, so daß immer die Filtrierzeit und damit das Verdampfen flüchtiger Bestandteile ziemlich konstant blieb. Die Leistungsfähigkeit des Filters betrug $2\frac{1}{2}$ kg pro Stunde. Das Endprodukt war ein Kolophonium von recht konstanter Zähigkeit.

b) Das Bereiten der Gemische.

Beim Bereiten der Gemische war besondere Vorsicht erforderlich, damit von dem zugesetzten Terpentinöl möglichst wenig verdampfte. Deshalb wurden die abgewogenen Mengen von Kolophonium und Terpentinöl in einem Kolben erhitzt, der in einem Heißluftbad von ca. 250° stand, und auf den oben eine wassergekühlte Röhre, ein Liebig'scher Kühler, aufgesetzt war, in der sich die aufsteigenden Dämpfe kondensierten, worauf sie wieder in den Kolben zurückfielen. Dieses Verfahren bewährte sich sehr gut; ein Versuch zeigte, daß aus einer Lösung mit 50 Proz. Terpentinölgehalt nach einstündigem scharfem Kochen nur $\frac{1}{4}$ Proz. verdampft war.

Die Erhitzung wurde der Gleichmäßigkeit der Erwärmung halber in dem Heißluftofen vorgenommen. Denn bei der großen Zähigkeit und dem schlechten Wärmeleitungsvermögen der Substanz bewirkte das Fehlen von Konvektionsströmungen sehr leicht ein ungleichmäßiges Erhitzen des Kolbens, die einen Bruch desselben zur Folge hatten. Ferner gebot die starke Feuergefährlichkeit der Substanz größte Vorsicht.

c) Der Reibungsapparat und das Füllen desselben.

C_1 , C_2 , D in der Gesamtzeichnung des Versuchsapparates (Fig. 3) stellt die Durchflußröhre dar. Zwischen zwei weitere Glasröhren von ca. 5 cm Durchmesser (C_1 und C_2) war die engere Durchflußröhre D eingeschmolzen. An C_2 war seitlich ein enges Röhrchen E angesetzt, aus dem das Quecksilber ausfloß, das C_2 bis zu Anfang der Verengung nach D hin

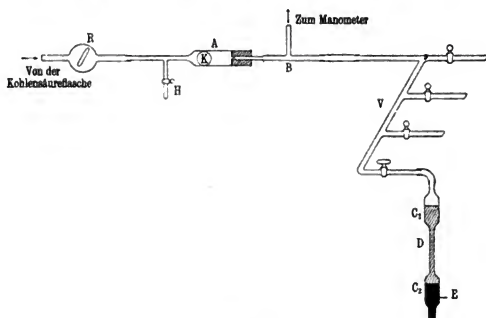


Fig. 3.

füllte. Unten war C_2 mit einem Kork verschlossen. In D und darüber in C_1 befand sich die Substanz, welche während des Versuches langsam von C_1 durch D nach C_2 gepreßt wurde, dabei in C_2 das Quecksilber durch E nach außen schiebend, wo es aufgefangen und dem Volumen nach durch Wägung bestimmt wurde.

War ein Versuch in Gang gesetzt, so mußte mit der ersten Ablesung gewartet werden, bis ein konstanter Zustand eingetreten war, da im Anfang die Durchflußvolumina zu groß ausfielen — eine Erscheinung, die auf elastische Kräfte zurückzuführen ist.

Das Einbringen der Substanz in den Reibungsapparat war dadurch sehr schwierig, daß es bei mindestens 150° geschehen mußte. Dabei mußte der Apparat vorher auf diese Temperatur erwärmt werden, damit die Substanz an den Wänden haftete. Erhitzte man die Röhren mittels eines Bunsenbrenners,

so sprangen sie sehr leicht, besonders an den Übergangsstellen von C_1 und C_2 zu D . Außerdem war es bei engen Röhren unmöglich, die Substanz von oben ohne weiteres durch D nach C_2 auf den Quecksilberspiegel zu bringen. Ich nahm deshalb das Einfüllen der Substanz in einem elektrischen Ofen vor, der bei 110 Volt und 4 Amp. 180° gab. Das Rohr wurde bis in C_1 hinein mit Quecksilber gefüllt, in den vertikal stehenden Ofen gebracht und auf die nötige Temperatur erhitzt. Dann wurde die Substanz oben eingegossen und bei E soviel Quecksilber abgelassen, bis sein Spiegel in C_2 die nötige Höhe hatte, was durch zwei einander gegenüberliegende Glimmerfenster beobachtet werden konnte. Dem heruntersinkenden Quecksilberniveau folgte die flüssige Substanz, und das Rohr war in gewünschter Weise gefüllt. Nach dem Einfüllen wurde es in den Versuchsraum gebracht; dort ließ man es mindestens 24 Std. stehen, damit die Substanz die Temperatur der Umgebung annahm.

d) Der Druckapparat.

Zur Erzeugung des Druckes, der meistens ca. 150 cm Hg betrug, diente eine Kohlensäureflasche. Auf dieselbe wurde ein Reduzierventil (R) aufgeschraubt, das vom Drägerwerk in Lübeck bezogen war. Mittels desselben konnte man den Druck in beliebiger Höhe bis zu $2\frac{1}{2}$ Atm. = 190 cm Hg einstellen. Er blieb dann während des Versuches konstant bis auf ± 1 mm. An dem Reduzierventil selbst war ein Federmanometer angebracht; ich zog es jedoch vor, den Druck an einem offenen Quecksilbermanometer von ca. 2 m Schenkellänge abzulesen.

Von dem Druckapparat führte ein guter, umklöppelter Gasschlauch zu dem Verteiler (V). Dieser bestand aus einem Glasrohr, an das rechtwinklig vier durch Hähne verschließbare kürzere Röhren angeschmolzen waren. An diese Stutzen wurden die Durchflußröhren ebenfalls mittels kurzer Schlauchstückchen angeschlossen, so daß ich zu gleicher Zeit vier Röhren untersuchen konnte.

Um zu verhüten, daß bei etwaigen Brüchen am Apparat, während derselbe ohne Aufsicht war, der Inhalt der Kohlensäureflasche ausströmte, fügte ich in die Schlauchleitung, die vom Reduzierventil ausging, gleich hinter demselben ein „Rohr-

bruchventil“ ein. In dem weiten Teil einer Glasröhre (*A*) lag mit einigem Spielraum eine Kugel (*K*). Der vordere, weite Teil der Röhre war mit einem durchbohrten Stöpsel aus weichem Gummi verschlossen, in dessen Bohrung eine zweite, engere Röhre (*B*) gesteckt war, aber so, daß sie nicht nach *A* hineinragte, sondern um einige Millimeter in dem Stöpsel zurückblieb. An *B* war dann noch ein Stutzen angesetzt, der zum Manometer führte. Trat nun durch einen Bruch des Apparates oder sonstwie ein außergewöhnlich schnelles Ausströmen der Kohlensäure ein, so riß diese die Kugel *K* in *A* mit nach vorn und preßte sie kräftig auf die Bohrung des Stöpsels, die so augenblicklich und zuverlässig abgeschlossen wurde. War der Schaden bemerkt und behoben, so wurde nach Schließung des Reduzierventils der Entlüftungshahn (*H*) geöffnet, worauf Druckausgleich zwischen *A* und *B* eintrat, *K* von selbst zurückfiel und die Bohrung wieder freigab. Das Rohrbruchventil ist mehreremal in Tätigkeit getreten und hat jedesmal den Inhalt der Kohlensäureflasche gerettet.

e) Der Versuchsraum.

Da frühere Versuche gezeigt hatten, in welchem hohem Grade die innere Reibung der vorliegenden Versuchssubstanz von der Temperatur abhängt, mußte die größte Sorgfalt darauf verwandt werden, die Versuche, welche oft wochenlang dauerten, bei konstanter Temperatur anzustellen. Sie wurden deshalb im Nordwestkeller des physikalischen Instituts vorgenommen, dem ein Isolierraum vorgelagert war.¹⁾ Außerdem wurden die doppelten Kellerfenster dadurch gegen Strahlung und Wärmeleitung geschützt, daß sie außen mit Stanniol und innen mit einem dichten Strohpolster belegt wurden. Es war zwar unmöglich, die großen Temperaturänderungen der wechselnden Jahreszeiten von dem Versuchsraum abzuhalten; aber immerhin blieb mehrere Wochen hindurch die Temperatur bis auf $\pm \frac{1}{20}^{\circ}$ konstant. Abgelesen wurde die Temperatur an einem in $\frac{1}{10}^{\circ}$ geteilten Thermometer, das dicht beim Apparat aufgehängt war.

1) Vgl. hierzu die Institutsbeschreibung von E. Wiedemann p. 12, und Grundriß des Kellers, Taf. VI; erschien bei J. A. Barth, Leipzig 1906.

3. Die Berechnung der Versuchsergebnisse.

Die Berechnung der Versuchsergebnisse erfolgte nach der Poiseuilleschen Formel ohne Anwendung der Hagenbachschen Korrektur, da ein Einfluß der Rohrlänge auf die Durchflußzeiten nicht bemerkbar war (vgl. weiter unten). Dagegen mußte eine andere Korrektur eintreten, und zwar für den Einfluß der weiten Röhrenteile C_1 und C_2 , sowie der Übergangsstellen von denselben nach D . Die Korrektur geschah nach der von R. Reiger¹⁾ aufgestellten Formel.

Ist:

p = der abgelesene Druck in cm Hg,

p' = der korrigierte Druck, d. h. der auf D entfallende Anteil am Gesamtdruck,

r = Radius der beiden gleich weiten Teile C_1, C_2 ²⁾,

L = Länge der Substanzsäule in denselben,

R = Radius der engen Röhre D ,

l = Länge der engen Röhre D ,

Δ_1 = Länge der Übergangsstelle C_1 nach D ,

Δ_2 = Länge der Übergangsstelle von D nach C_2 ,

$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$,

dann ist:

$$p' = \frac{p}{1 + \frac{R^4}{r^4} \cdot \frac{L}{l} + \frac{R^4 \cdot \Delta}{8(r-R) \cdot l} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right)}.$$

Weiter war zu beachten, daß nicht nur der am Manometer abgegebene Druck p_1 zur Wirkung auf die Substanz gelangte, sondern auch der Druck p_2 der Quecksilbersäule in C_2 , der von E bis zum unteren Niveau der darauf ruhenden Substanzsäule reichte; ferner noch der Druck p_3 der Substanzsäule selbst, so daß p sich additiv ergab aus

$$p = p_1 + p_2 + p_3.$$

Diese Summierung der Drucke hätte vermieden werden können, indem man die Röhren statt vertikal horizontal anbrachte. Aber dann hätte man den weit größeren Nachteil gehabt, daß nach den Gesetzen der Hydrostatik die Grenzfläche zwischen dem spezifisch viel schwereren Quecksilber und

1) R. Reiger, l. c. p. 991.

2) Bei allen Röhren war $r = 2,5$ cm.

dem Kolophoniumgemisch sich ebenfalls im Laufe der langen Versuche horizontal einzustellen gesucht hätte, wie frühere Versuche gezeigt hatten. Bei Gemischen von weniger hoher Zähigkeit hätte das Quecksilber sogar in die Röhre D eindringen können. Auf alle Fälle hätten sich aber große Beobachtungsfehler ergeben, wie schon R. Reiger gezeigt hat. Im übrigen wurde p_2 immer gleich groß gemacht, so daß es von vornherein bei der Einstellung des Druckes berücksichtigt werden konnte. p_3 fiel prozentual sehr klein aus, da das spezifische Gewicht der Substanz nur rund 1 war. Die Änderung von p_2 während eines Versuches betrug gewöhnlich nur Bruchteile eines Millimeters, konnte daher vernachlässigt werden.

Im folgenden werden nun die Versuche und deren Ergebnisse mitgeteilt. Die Bezeichnungsweise ist dieselbe wie im ersten Abschnitt. Auch das Verfahren bei den Untersuchungen war dasselbe. Zuerst wurden die Reibungskoeffizienten bei einer Anzahl Konzentrationen festgestellt und dann zur Prüfung des Poiseuilleschen Gesetzes geschritten.

A. Bestimmung von η bei verschiedenen Konzentrationen.

Der Reibungskoeffizient wurde bestimmt bei Konzentrationen c von 30, 60, 70, 80 und 90 Gewichtsprozenten Kolophoniumgehalt. Die Gemische von 30 und 60 Proz. waren so wenig zähe, daß bei ihnen noch die Methode nach Haffner angewendet werden konnte. Bei 70 Proz. wurde zur Reibungsröhre nach R. Reiger gegriffen, und bei 80 Proz. mußte auch zu hohem Druck übergegangen werden, um nicht allzulange Ausflußzeiten zu erhalten. Reines Kolophonium (100 Proz.) konnte leider nicht untersucht werden, da es beim Erkalten in den Röhren regelmäßig sprang und seine Homogenität einbüßte. Doch ließ sich aus der Kurve, welche die Resultate bei niedrigen Konzentrationen wiedergibt, der Wert für η wenigstens der Größenordnung nach bestimmen. Bei jeder Konzentration wurden fünf Versuche ausgeführt, aus denen dann das arithmetische Mittel genommen wurde.

In der Tab. 5 ist $\eta = A \cdot 10^n$ dermaßen wiedergegeben, daß in einer Spalte A und in der darauffolgenden der Exponent n von 10 eingetragen ist.

Tabelle 5.

Proz.- Gehalt an Kolo- phonium	s	τ^0	R	l	p	t	V	A	n
0	0,870	7,1	0,0276	19,2	142	332,4	28,41	1,9	- 2
30	0,926	7,1	0,0803	30,1	142	110,6	55,53	1,5	- 1
60	0,995	7,1	0,152	30,0	142	1960	55,53	3,4	+ 1
70	1,016	7,1	0,23	20,1	142	600	2,10	2,2	+ 3
80	1,038	7,1	0,75	19,9	1324	3600	3,15	9,2	+ 6
90	1,058	7,1	1,26	20,2	1965	360 000	0,29	4,7	+ 11
100	1,078	7,1	—	—	—	—	—	1,0	+ 18

Die Kurve (Fig. 4) gibt „lg Brigg η “ als Funktion der Konzentration, da die Werte von η selbst sehr schnell so hoch werden, daß sie sich nicht mehr aufragen lassen. Die Kurve steigt zuerst langsam, dann sehr schnell an. Aus ihr wurde durch Extrapolation η bei reinem Kolophonium (100 Proz.) zu $1 \cdot 10^{18}$ gefunden. Der Wert stimmt der Größenordnung nach mit dem von R. Reiger¹⁾ aus dem Elastizitätskoeffizienten und der Relaxationszeit erhaltenen. Er fand für reines Kolophonium:

$$\eta = 6 \cdot 10^{15} \text{ bei } \tau = 20^{\circ},$$

$$\eta = 3 \cdot 10^{16} \text{ bei } \tau = 15^{\circ},$$

während der durch Extrapolation in Fig. 6 gefundene Wert ist

$$\eta = 1 \cdot 10^{18} \text{ bei } \tau = 7,1^{\circ}.$$

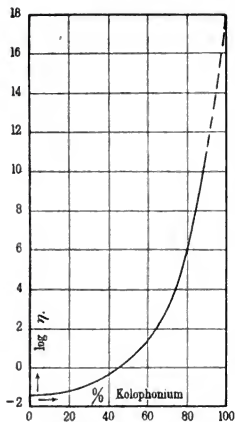


Fig. 4.

Berücksichtigt man, daß bei abnehmender Temperatur die innere Reibung von Kolophonium sehr stark zunimmt, so können diese nach verschiedenen Methoden gefundenen Werte als recht gut übereinstimmend bezeichnet werden.

1) R. Reiger, Über innere Reibung plastischer und fester Körper, Erlanger Diss. 1901.

Diese Versuche haben gezeigt, daß η mit dem Kolophonium-zusatz stark ansteigt, besonders bei höheren Konzentrationen.

B. Die Prüfung des Poiseuilleschen Gesetzes.

Es wurde jetzt das Poiseuillesche Gesetz geprüft. Dazu wurde nacheinander der Einfluß von Durchströmgeschwindigkeit, Rohrlänge und Röhrendurchmesser untersucht. Zunächst wurde ein Gemisch benutzt, dessen η bei der Versuchstemperatur von der Größenordnung 10^6 war. Als solches wurde ein Gemisch mit 80 Proz. Kolophoniumgehalt ermittelt.

a) Einfluß der Durchströmgeschwindigkeit.

Zur Prüfung derselben wurde eine Röhre von $R = 0,49$ cm und $l = 10,5$ cm an den Apparat angeschlossen, und die Ausflußmengen bei Drucken von 10 bis 160 cm Hg = 136 bis 2172 cm H₂O gemessen. Um möglichst übersichtliche Resultate zu erhalten, wurde vorläufig angenommen, daß das Poiseuillesche Gesetz vom Druck unabhängig sei. Wurde dann die Zeit t dem Druck umgekehrt proportional genommen, so mußten die Ausflußvolumina V bei jedem Druck gleich bleiben. Daß dem wirklich so ist, zeigt Tab. 6. Die Temperatur war $\tau = 11,6^\circ$. v ist die Durchströmgeschwindigkeit in der Röhrenachse in cm pro Sek.

Tabelle 6.

p	136	272	544	1088	2172
V	4,07	4,09	4,08	4,08	4,07
t	7200	3600	1800	900	450
$v \cdot 10^{-4}$	1,1	2,2	4,4	8,8	17,5

Die Ausflußmengen waren innerhalb der Versuchsfehler konstant. Ein Einfluß der Durchströmgeschwindigkeit konnte nicht ermittelt werden, trotzdem dieselben von $1,1 \cdot 10^{-4}$ bis auf $17,5 \cdot 10^{-4}$ cm pro Sek. anwuchs. Dieses Resultat stimmt mit dem bei Terpentinöl und anderen Flüssigkeiten gefundenen überein.

Die Durchströmgeschwindigkeit ist also bei dieser Mischung in sehr weiten Grenzen ohne Einfluß auf die Größe von η .

b) Einfluß der Röhrenlänge.

Um den Einfluß der Röhrenlänge zu prüfen, wurden von derselben Glasröhre vier Stücke von ca. 2,5, 5, 10, 20 cm Länge heruntergeschnitten und als Reibungsröhren eingeschmolzen. Sie wurden dann gleichzeitig gefüllt, an den Apparat angeschlossen und beobachtet. Um wieder möglichst gleiche Durchflußvolumina zu erhalten, wurden die Durchflußzeiten direkt proportional den Längen gewählt, so daß $t/l = \text{const.}$ war. Die Versuchsgrößen ergaben sich zu:

$$\tau = 11,5^\circ; \quad R = 0,49 \text{ cm}; \quad p = 144,4 \text{ cm Hg} = 1965 \text{ cm H}_2\text{O}.$$

In Tab. 7 sind die erhaltenen Werte niedergelegt, welche die Mittel aus je fünf Versuchen darstellen.

Tabelle 7.

l	2,4	5,8	10,1	20,6
t	225	450	900	1800
V	7,51	6,87	7,13	7,01
$\eta \cdot 10^5$	5,71	5,73	5,70	5,71

Ein Einfluß der Röhrenlänge ist nicht bemerkbar; die Reibungskoeffizienten zeigen nur Änderungen innerhalb der Beobachtungsfehler; ein Beweis, daß bei so hohen Zähigkeiten die Grenze der kritischen Länge jedenfalls so weit nach unten gerückt ist, daß sie praktisch überhaupt nicht mehr erkennbar ist.

c) Einfluß der Röhrenweite.

Der Einfluß der Röhrenweite war in zwei Richtungen zu untersuchen; einmal bei wachsendem Durchmesser zum Aufsuchen einer oberen Grenze, und dann bei abnehmendem Durchmesser zum Aufsuchen einer unteren Grenze.

 α) Aufsuchen einer oberen Grenze.

Zu diesen Beobachtungen wurde wieder ein Gemisch von 80 Proz. Kolophoniumgehalt benutzt, dessen η bei $11,8^\circ$ von der Größenordnung 10^6 war. Mit diesem Gemisch wurden vier Röhren von annähernd gleicher Länge, aber verschiedenem Durchmesser gleichzeitig gefüllt und an den Apparat gesetzt.

Die aus zahlreichen Beobachtungen gefundenen Mittelwerte sind in Tab. 8 verzeichnet.

Tabelle 8.

τ°	R	l	p	t	V	$\eta \cdot 10^5$
11,7	1,52	10,1	1965	60	49,10	4,91
11,7	1,01	10,2	1965	300	55,2	4,93
11,8	0,53	9,9	1965	600	7,25	4,72
11,8	0,34	9,8	1965	1200	2,52	4,76

Die Beobachtungen wurden zwar möglichst rasch hintereinander vorgenommen, um sie bei möglichst gleicher Temperatur zu machen; dennoch konnte nicht verhindert werden, daß die Versuche der 3. und 4. Reihe der Tabelle bei einer um $0,1^\circ$ höheren Temperatur vorgenommen werden mußten, da über Nacht ein starkes Steigen der Außentemperatur eingetreten war, das sich auch im Keller fühlbar machte. Dennoch erscheinen die Versuche als gut brauchbar, da sie deutlich erkennen lassen, daß im Gegensatz zu den Verhältnissen bei dem dünnflüssigen Terpentinöl bei wachsendem Radius kein Ansteigen von η stattfindet. Leider war es nicht möglich, den Durchmesser der Röhren über 3 cm zu steigern.

Immerhin wurde aber festgestellt, daß eine obere Grenze des Poiseuilleschen Gesetzes bei sehr zähen und plastisch-festen Substanzen jedenfalls sehr weit gesteckt ist. Das ist darauf zurückzuführen, daß hier keine Wirbel auftreten können, die bei dünnflüssigen Medien den Ausfluß verzögern.

β) Aufsuchen einer unteren Grenze.

Nun wurde versucht, eine untere Grenze aufzufinden. Die dahin zielenden Beobachtungen wurden bei drei Konzentrationen vorgenommen, deren η von der Größenordnung 10^5 , 10^7 und 10^9 war. Es waren dies Gemische von 80, 85 und 90 Proz. Kolophoniumgehalt. Da bei diesen Versuchen recht enge Röhren verwandt wurden, waren die Ausflußzeiten oft viele Tage, und es bot nicht geringe Schwierigkeiten, die Temperatur dabei konstant zu halten. Viele Versuchsreihen wurden trotz aller Vorsicht durch Temperaturschwankungen unbrauchbar gemacht.

Die zur Verwendung kommenden Röhren wurden sorgfältig ausgemessen, die weiteren mit einer Kolumbusschublehre mit feinen Meßschneiden, die an einer Mikrometerschraube geeicht war; die engeren in der üblichen Weise durch Auswägen mit Quecksilber.

Beim Einfüllen der Röhren wurde mit ganz besonderer Vorsicht verfahren, um zu vermeiden, daß verschieden zähe Gemische in die einzelnen Röhren gelangten. Deshalb wurde immer so viel Lösung zubereitet, daß sämtliche zu einer Versuchsreihe dienenden Röhren auf einmal gefüllt werden konnten, und dann das Einfüllen rasch hintereinander vorgenommen, damit möglichst wenig verdampfte. Zur Kontrolle wurde dann beim Beginn und am Ende des Einfüllens eine Probe der Lösung entnommen, deren spezifisches Gewicht bestimmt wurde. In keinem Fall ergab sich eine nennenswerte Abweichung. Nachstehend sei ein Beispiel einer solchen Kontrolle wiedergegeben, die bei einer 80proz. Lösung vorgenommen wurde. s_1 und s_2 sind die spezifischen Gewichte bei Beginn und beim Schluß des Einfüllens:

$$s_1 = 1,038; \quad s_2 = 1,038.$$

Die Konzentration hatte sich also nicht geändert.

Die Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Lösung diente aber nicht nur dazu, eine etwaige Änderung der Konzentration festzustellen, sondern auch um zu kontrollieren, ob die gewünschte Konzentration überhaupt vorhanden war. Da Versuche ergeben hatten, daß das spezifische Gewicht der Gemische eine geradlinige Funktion der Konzentration war, konnte auf graphischem Wege diese Kontrolle leicht vorgenommen werden.

Bei jeder Versuchsreihe, die zur Auffindung einer unteren Grenze des Poiseuilleschen Gesetzes gemacht wurde, kamen mindestens sechs Röhren zur Verwendung. Von der weitesten Röhre war aus früheren Versuchen bekannt, daß bei ihr das Poiseuillesche Gesetz noch sicher galt.

In den folgenden Tabellen und in Fig. 5 sind die Versuchsergebnisse wiedergegeben, bei $\eta = 10^5$ und 10^7 als Mittelwerte einer Reihe von Beobachtungen, bei 10^9 ausführlich.

1. $\eta = 10^5$.
Tabelle 9.

r_0	R	l	p	t	V	$\eta \cdot 10^5$
11,8	0,430	9,8	1965	1200	2,62	4,8
11,8	0,150	10,1	1965	216000	17,51	4,8
11,7	0,100	10,0	1965	216000	1,64	4,6
11,8	0,030	10,1	1965	720000	0,556	7,9
11,8	0,018	9,9	1965	1440000	0,0056	23
11,8	0,010	9,8	1965	8 Wochen	0,0000	∞^1

2. $\eta = 10^7$.
Tabelle 10.

r_0	R	l	p	t	V	$\eta \cdot 10^7$
11,3	1,525	25,1	2040	600	2,28	4,20
11,3	1,019	15,9	2040	1800	2,30	4,21
11,3	0,746	16,0	2040	900	0,329	4,25
11,3	0,576	15,1	2040	18000	1,972	4,22
11,3	0,364	15,8	2040	46800	0,755	5,22
11,3	0,257	15,2	2040	43200	0,149	6,59
11,3	0,158	15,1	2040	173500	0,023	19,9
11,3	0,117	15,4	2040	8 Wochen	0,000	∞^1

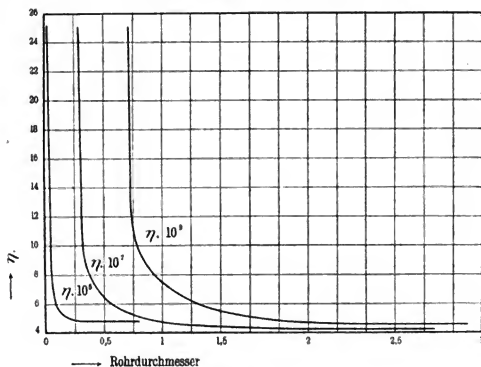


Fig. 5.

1) Das Experiment gibt hier lediglich $\eta > 23$; aus den weiter unten angeführten Gründen ist jedoch $\eta = \infty$ gesetzt.

3. $\eta = 10^\circ$.

Hier sollen die ausführlichen Tabellen der Versuche gegeben werden; η_m bedeutet den Mittelwert, der sich für η aus jeder Tabelle ergibt.

Tabelle 11.

$\tau = 12,2^\circ$; $R = 1,525$; $l = 25,1$;
 $p = 2040$.

t	V	$\eta \cdot 10^9$
16200	0,331	4,60
16200	0,330	4,60
16200	0,332	4,59
16200	0,332	4,59

$$\eta_m = 4,59 \cdot 10^9.$$

Tabelle 12.

$\tau = 12,3^\circ$; $R = 1,241$; $l = 15,9$;
 $p = 2040$.

t	V	$\eta \cdot 10^9$
43200	11,21	4,52
43200	11,22	4,51
43200	11,18	4,55
43200	11,20	4,53

$$\eta_m = 4,54 \cdot 10^9.$$

Tabelle 13.

$\tau = 12,3^\circ$; $R = 1,019$; $l = 15,9$;
 $p = 2040$.

t	V	$\eta \cdot 10^9$
86 400	1,006	4,65
173 000	2,060	4,58
173 000	2,059	4,57
173 000	2,060	4,58

$$\eta_m = 4,59 \cdot 10^9.$$

Tabelle 14.

$\tau = 12,3^\circ$; $R = 0,746$; $l = 16,0$;
 $p = 2040$.

t	V	$\eta \cdot 10^9$
258 000	0,747	5,70
258 000	0,756	5,61
258 000	0,761	5,58
258 000	0,761	5,58

$$\eta_m = 5,62 \cdot 10^9.$$

Tabelle 15.

$\tau = 12,3^\circ$; $R = 0,576$; $l = 15,1$;
 $p = 2040$.

t	V	$\eta \cdot 10^9$
171 000	0,129	7,91
171 000	0,130	7,88
171 000	0,129	7,91
171 000	0,128	7,93

$$\eta_m = 7,91 \cdot 10^9.$$

Tabelle 16.

$\tau = 12,3^\circ$; $R = 0,364$; $l = 15,8$;
 $p = 2040$.

t	V	$\eta \cdot 10^9$
350 000	0,0869	25,2
350 000	0,0863	25,3
350 000	0,0866	25,2
350 000	0,0868	25,2

$$\eta_m = 25,2 \cdot 10^9.$$

Tabelle 17.

$$\tau = 12,3^{\circ}; \quad R = 0,209; \quad l = 15,9; \quad p = 2040.$$

Nach drei Wochen war noch kein Durchfluß erfolgt; daher:

$$\eta = \infty.$$

Aus obigen Tabellen und aus Fig. 7 ergibt sich ein sehr starkes Ansteigen von η , sobald der Radius unter ein bestimmtes Maß sinkt.

Die betreffenden Grenzwerte der Radien sind:

$$\text{bei } \eta = 10^5 \quad R = 0,1; \quad \eta = 10^7 \quad R = 0,5; \quad \eta = 10^9 \quad R = 1,0.$$

Bis zu diesen Radien kann man das Poiseuillesche Gesetz als sicher gültig annehmen.

Daß wirklich der Radius und nicht die Durchströmgeschwindigkeit für die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes maßgebend ist, zeigen die

Versuche bei niederem Druck.

Frühere Versuche (vgl. oben) haben Unabhängigkeit vom Druck ergeben bei Röhrenweiten, die weit oberhalb der „kritischen“¹⁾ liegen. Im folgenden soll untersucht werden, ob diese Unabhängigkeit auch besteht bei Radien, die dicht an der Grenze stehen, und bei solchen, wo η bereits steigt, oder ob hier eine Änderung des Druckes ein Verschieben der Gültigkeitsgrenze hervorruft. Die Versuche, von denen im folgenden zwei wiedergegeben sind, wurden bei zwei Lösungen vorgenommen, bei denen $\eta = 10^9$ bez. 10^7 war. Es wurden schon bei hohem Druck beobachtete Röhren dazu verwandt. Die erste stand gerade an der Grenze, die zweite hatte schon einen zu hohen Wert ergeben. Beide wurden je drei Tage in vertikaler Lage aufbewahrt, damit etwa vorhandene innere Spannungen abklingen konnten, und dann beobachtet. Tab. 18 und 19 geben die gefundenen Werte.

1) Kritischer Radius = Radius, bei dem η zu steigen beginnt.

Tabelle 18.

 $\tau = 12,20^\circ$; $R = 1,019$; $l = 15,9$; $p = 256$.

t	V	$\eta \cdot 10^9$
84 600	0,129	4,35
169 200	0,253	4,37
169 200	0,256	4,36
169 200	0,257	4,36

$$\eta_m = 4,36 \cdot 10^9.$$

Unter hohem Druck war $\eta = 4,54 \cdot 10^9$, zieht man jedoch in Betracht, daß die Temperatur inzwischen um $1/10^\circ$ gefallen war, so stimmen die beiden Werte gut überein.

Tabelle 19.

 $\tau = 11,3^\circ$; $R = 0,257$; $l = 15,2$; $p = 256$.

t	V	$\eta \cdot 10^7$
42 300	0,0186	6,59
42 300	0,0187	6,59
42 300	0,0183	6,58
42 300	0,0185	6,59

$$\eta_m = 6,59 \cdot 10^7.$$

Auch hier hat sich nichts geändert; der Wert für $\eta = 6,59 \cdot 10^7$ bei $p = 2040$ cm H₂O wurde wieder genau erreicht, da die Temperatur keine Veränderung erlitten hatte. Es konnte also auch hier kein Einfluß des Druckes konstatiert werden, und die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes ist mithin allein abhängig vom Radius.

Dies läßt sich nach R. Reiger¹⁾ erklären auf Grund der Maxwellschen Relaxationshypothese unter Berücksichtigung der Elastizitätsverhältnisse der Wand.

Bezeichnet man den nach Poiseuille gefundenen Reibungskoeffizienten mit η' , so besteht zwischen diesem „scheinbaren

1) R. Reiger, Über die stationäre Strömung einer Substanz mit innerer Reibung und den Einfluß der Elastizität der Wand; Ber. der physik.-med. Soz. Erlangen, 38. p. 203. 1906.

Reibungskoeffizienten“ und dem mit η bezeichneten wahren die Beziehung:

$$\eta' = \frac{\eta}{1 - \frac{a}{R}};$$

R ist der Radius und a eine Konstante, die von den Elastizitätsmoduln von Röhrenwand und Flüssigkeit und von den Dimensionen der Wand abhängt. Man kann nun a aus zwei verschiedenen Werten von η' ermitteln und dann aus obiger Gleichung das wahre η bestimmen. Dann läßt sich wiederum aus der Gleichung für jeden Radius die Größe von η' berechnen. In der folgenden Tabelle ist für $\eta = 10^6$ dies durchgeführt.

Tabelle 20.

$a = 0,015$; $\eta = 3,92$.

R	0,15	0,10	0,03	0,018	0,015
$\eta'_{\text{beob.}}$	4,8	4,6	7,9	23	> 23
$\eta'_{\text{ber.}}$	4,36	4,61	7,83	23,1	∞

Abgesehen von dem ersten Wert stimmen die beobachteten und berechneten Werte von η' sehr gut miteinander überein. Bei $R = a$ wird in Übereinstimmung mit der Formel η' unendlich.

Resultate.

Die wichtigsten Resultate des zweiten Abschnittes lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Die innere Reibung von Kolophonium-Terpentinölgemischen nimmt mit dem Gehalt an Kolophonium außerordentlich schnell zu.

Zum Beispiel war bei

80 Proz. $\eta = 9,2 \cdot 10^6$,

90 Proz. $\eta = 4,7 \cdot 10^{11}$.

Die Temperatur ist von sehr großem Einfluß auf die innere Reibung sehr zäher und plastisch-fester Körper; bei einer Temperaturabnahme von 11,8 auf 7,1° stieg η um das 18fache, nämlich von $4,8 \cdot 10^5$ auf $92 \cdot 10^5$.

Auf die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes sind Durchströmungsgeschwindigkeit und Röhrenlänge ohne Einfluß. Ebenso

konnte, im Gegensatze zu dem dünnflüssigen Terpentinöl, keine obere Grenze für den Radius gefunden werden. Dagegen wurde eine untere Grenze ermittelt, bei der das Poiseuillesche Gesetz zu gelten aufhört. Diese Grenze liegt um so höher, je zäher die Versuchssubstanz ist. Schließlich wird bei einem bestimmten Radius $\eta' = \infty$.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Dr. E. Wiedemann auch hier meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen, ebenso Hrn. Prof. Dr. A. Wehnelt, jetzt in Berlin, und Hrn. Privatdozent Dr. R. Reiger.

Erlangen, Physik. Institut, Dezember 1906.

(Eingegangen 24. Januar 1907.)

**6. Spektralapparat für Polarisations- und
Phasendifferenzmessungen;
von O. Lummer und R. Kynast.**

Der im folgenden zu beschreibende Apparat, von Schmidt und Haensch, Berlin, geliefert, dient 1. zur Messung der Drehung der Polarisationssebene, 2. zur Messung von Phasendifferenzen, und zwar bei spektral zerlegtem einfallenden Lichte. Beide Zwecke, denen das Instrument dienen soll, verlangen eine vorzügliche dioptrische Abbildung des Spaltes und sind notwendig, um das von dem einen¹⁾ von uns beschriebene Halbschattenprinzip genauer zu untersuchen, sowie um die in der nächsten Arbeit ausgeführten Messungen über Phasendifferenz und Drehung der Polarisationssebene reflektierten monochromatischen Lichtes ausführen zu können.

Die einzelnen Teile dieses in der Fig. 1 abgebildeten Instrumentes sind:

1. *Das Kollimatorrohr* (*I* in Fig. 1). Die Objektivlinse desselben hat 4 cm Durchmesser und 50 cm Brennweite und ist aus den Steinheilschen Werkstätten hervorgegangen. Der Spalt (vgl. Fig. 1) ist durch die Schraube *a* gegen die Kollimatorlinse verschiebbar und kann mittels der Klemmvorrichtung *b*, welche darin besteht, daß ein breites Stahlband durch die Schraube *c* an den Tubus angepreßt wird, festgestellt werden. Die Spaltbacken sind symmetrisch zueinander verschiebbar, und zwar meßbar bis auf $\frac{1}{100}$ mm. Diese symmetrische Verschiebbarkeit ist besonders für Phasendifferenzmessungen von Wichtigkeit, da Hr. Schmidt²⁾ gezeigt hat, daß ein nicht ganz symmetrischer Strahlengang Fehler in diese Messungen hineinbringen kann. Bei geschlossenem Spalt sind die Spaltbacken dadurch entlastet, daß (vgl. Fig. 2) die

1) O. Lummer, Verh. d. Ges. Deutsch. Naturf. und Ärzte 2. [1]. p. 79. 1894.

2) K. E. F. Schmidt, Wied. Ann. 51. p. 423. 1894.

Spitze der Schraube den Backen *d* verläßt im Augenblick des Schließens.

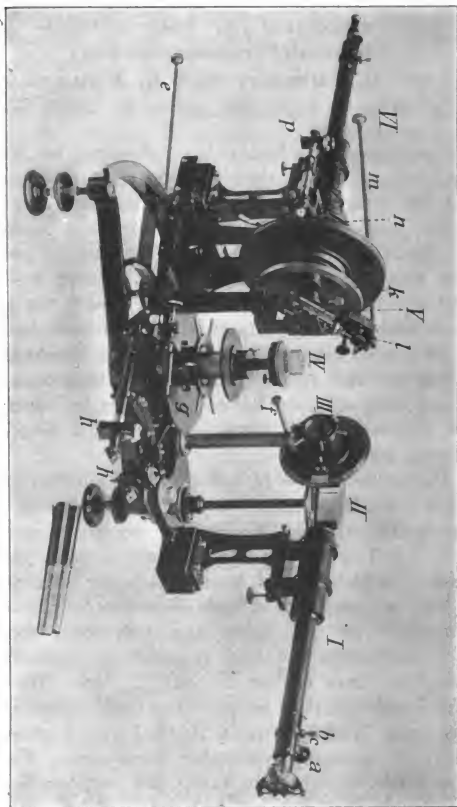


Fig. 1.

2. *Das Wadsworthsche Prisma (II in Fig. 1).* Dasselbe dient zur spektralen Zerlegung des Lichtes und ist auf einem besonderen Halter montiert, damit es vom Platze des Beob-

achters aus gedreht werden kann, und zwar geschieht dies durch das Gestänge *e*. Auf diese Weise wird es erreicht, daß man dieselbe Messung ohne Veränderung des Aufbaues bei feststehendem Fernrohr für monochromatisches Licht verschiedener Wellenlänge machen kann.

3. *Der Polarisator (III in Fig. 1).* Derselbe ist ein gewöhnliches Nicolsches Prisma mit vorzüglich planparallelen Flächen, so daß eine Drehung desselben um 180° keine merkliche Verschiebung des Spaltbildes hervorbringt. Sein Teilkreis ist vermöge zweier um 180° abstehenden Nonien bis auf Bogenminuten ablesbar. Das Polarisatorstativ trägt einen seitlichen Arm *f*, an welchem eine Asbestplatte befestigt werden kann. Um nämlich die zu untersuchenden Substanzen auf beliebiger konstanter Temperatur halten zu können, ist vorgesehen ein elektrischer Ofen, auf den sofort zu beschreibenden Prismen-tisch aufsetzbar, der so konstruiert ist, daß ein Heizmantel um die etwa in Prismenform untersuchte Substanz herumgeführt ist, der nur durch die beiden Öffnungen für die einfallenden und heraustretenden Strahlen unterbrochen ist. Jene Asbestplatte sowie eine vor dem Beobachtungsfernrohr angebrachte halten die gestrahlte Wärme vom Apparat ab.

4. *Der Prismen-tisch (IV in Fig. 1).* Das Tischchen kann mittels zweier Schrauben in zwei zueinander senkrechten Vertikalebene gegen die Horizontalebene geneigt werden. Es ist auswechselbar mit einem zweiten Tischchen, welches nach Herunternahme vermöge dreier auf schlitzzartige Vertiefungen in der Unterlage einpassender Kugeln bis auf wenige Bogensekunden genau wieder aufgesetzt werden kann. Fest verbunden mit dem Tischchen ist der Teilkreis *g*, der mit auf



Fig. 2.

der Unterseite befindlicher Teilung bis auf Bogensekunden ablesbar ist vermöge zweier um 180° abstehender Okularmikrometer h, h' , in welche man — durch Totalreflexion erreicht — von oben hineinsieht. Erleuchtet wird der Kreis durch zwei kleine Glühlampen. Die Feinverstellung desselben kann mittels Gestänge vom Beobachtungsplatze aus geschehen.

5. *Der Soleil-Babinetsche Kompensator* (V in Fig. 1). Er ist auf einem besonderen Stativ montiert, welches aufgesetzt ist auf den Arm, der Analysator und Beobachtungsfernrohr trägt. Er ist in der bekannten Weise für parallelen Strahlengang aus zwei Quarzkeilen und einer planparallelen Quarzplatte konstruiert und kann mittels einer kreisrunden Führung k unter jedem Winkel zur Horizontalebene festgeklemmt werden. Die Drehung seiner Trommel l erfolgt durch Zahnradübertragung vom Beobachterplatze aus mittels Gestänge m . Vor demselben können verschiedene Blenden angebracht werden, um bei hinreichender Lichtstärke seine Genauigkeit zu erhöhen. Die Nulllage des Kompensators ergibt sich zu 56,456, während einer Phasendifferenz von $\pm \lambda/2$ die Zahlen 40,919 bez. 71,999 entsprechen.¹⁾ Es sind dies Mittel aus je 40 Beobachtungen. Da die Differenzen, welche theoretisch gleich sein müssen, sich zu 15,537 bez. 15,543 ergeben, folgt hieraus die hervorragende Güte des Kompensators. Die Kompensatorteilung kann ebenfalls durch eine kleine Glühlampe beleuchtet werden.

6. *Der Analysator*. Hinter dem Kompensator befindet sich auf dem Fernrohrarm das Analysatorgestell n . Der Analysator ist ein Glanches Nicol von tadelloser Beschaffenheit. Sein Teilkreis ist durch die Hülle o völlig nach außen abgeschlossen. Er ist bis auf 3,6'' ablesbar mittels zweier Okularmikrometer p und wird ebenfalls durch kleine Glühlampen beleuchtet. Die Buchse, in welche der Analysator eingesetzt ist, ist sehr groß gewählt worden, um bei rein polarimetrischen Untersuchungen (unter Weglassung des Kompensators) die volle Öffnung des Apparates ausnutzen zu können.

7. *Das Beobachtungsfernrohr* (VI in Fig. 1). Die Objektlinse ist von derselben Beschaffenheit wie beim Kollimator.

1) Diese Zahlen gelten für die hellgrüne Quecksilberlinie $\lambda = 546 \mu\mu$.

Um die Auflösungskraft des Fernrohres bei fast gleichbleibender Länge desselben zu steigern, kann durch Einschaltung einer Zerstreuungslinse das gewöhnliche Objektiv in ein Teleobjektiv verwandelt werden, so daß die Brennweite auf das Doppelte, also 1 m steigt. Um innerhalb kleiner Einfallswinkelgebiete Messungsserien bei sehr kleinen Winkelabständen der Einzelbeobachtungen mit größter Genauigkeit vornehmen zu können, kann an Stelle des gewöhnlichen Okulars ein Okularmikrometer mit meßbar verschiebbarem Spalt auf das Fernrohr aufgesetzt werden, so daß von dem Gesichtsfelde des Fernrohres nur der kleine vom Okularspalt freigelassene Teil sichtbar ist. Dabei muß das Fernrohr natürlich festgeklemmt werden. Einem Trommelteilstrich des Mikrometers entspricht ohne vorgesetzte Zerstreuungslinse 1", mit Zerstreuungslinse $\frac{1}{2}$ ". Im letzteren Falle kann man für Messungen der Drehung der Polarisationsebene oder für Phasendifferenzmessungen den Okularspalt bis auf 10" verengen, ohne die Genauigkeit der Einstellung wesentlich herabzumindern.

Breslau, Physik. Institut d. Univ., im Januar 1907.

(Eingegangen 30. Januar 1907.)

**7. Über die
bei der Reflexion an isotropen, durchsichtigen
Medien auftretenden Phasenverschiebungen;
von R. Kynast.**

(Auszug aus der Inaugural-Dissertation.)

Da die neuesten Untersuchungen¹⁾ über den Einfluß von Oberflächenschichten bei der Reflexion an isotropen durchsichtigen Medien gezeigt haben, wie sehr die hierher gehörigen Fragen eines weiteren experimentellen Ausbaues bedürfen, so stellt sich die vorliegende Arbeit die Aufgabe, Drehung der Polarisationssebene und Phasendifferenz der Hauptkomponenten des reflektierten, natürlich homogenen Lichtes zu messen:

1. bei der gewöhnlichen Reflexion in Luft an festen, isotropen, durchsichtigen Substanzen von möglichst verschiedenem Brechungsindex; dabei und bei den unter 2. und 3. angeführten Problemstellungen soll insbesondere der Einfluß einer künstlichen Oberflächenschicht untersucht werden;

2. unter Anwendung einer besonders geeigneten Meßmethode in der unmittelbaren Umgebung der Grenze der Totalreflexion;

3. im ganzen Winkelgebiete der Totalreflexion an sehr niedrig-, sowie sehr hochbrechenden Substanzen, speziell an amorphem Siliciumdioxyd, um etwaige Abweichungen von der Fresnelschen Formel für die Phasendifferenz, die einer genauen Prüfung bisher nur selten unterzogen worden ist, zu konstatieren;

4. in Anknüpfung an die Untersuchungen von Hrn. G. Quincke²⁾ über das Eindringen „total“ reflektierten Lichtes in das dünnere Medium bei „total“ reflektiertem Lichte an

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 30. p. 457. 1887; P. Drude, Wied. Ann. 36. p. 532. 1889; K. E. F. Schmidt, Wied. Ann. 51. p. 417. 1894; 52. p. 75. 1894; 53. p. 769. 1894.

2) G. Quincke, Pogg. Ann. 127. p. 1 u. 199. 1866.

der Hypotenusenfläche eines Glasprismas, wenn parallel zu dieser Hypotenusenfläche in geringem Abstände von ihr eine andere Glasfläche angebracht wird.

5. An diese experimentellen Fragen soll sich eine theoretische Untersuchung der von L. Lorenz¹⁾ aufgestellten Reflexionstheorie anschließen.

Die Versuchsanordnung, die in verschiedenen Punkten von der bisher üblichen abwich, ist eingehend beschrieben in der vorangehenden Mitteilung von O. Lummer und R. Kynast; daher möge hier nur bemerkt werden, daß mit der hellgrünen Quecksilberlinie $\lambda = 546 \mu\mu$ gearbeitet wurde und ein Soleil-Babinetscher Kompensator zur Phasendifferenzmessung verwendet wurde.

Das benutzte *Prismenmaterial* ist folgendes:

Prisma I. Ein Prisma aus amorphem SiO_2 , dreiseitig geschliffen, jedoch so, daß der Grenzstrahl zwischen gewöhnlicher und totaler Reflexion die Kathetenflächen senkrecht durchsetzt; $n = 1,4605$.²⁾ Das Prisma wurde mit Schmirgel geschliffen und mit Pariser Rot poliert.

Prisma II. Ein rechtwinklig geschliffenes Glasprisma. $n = 1,5150$.

Prisma III. Ein rechtwinklig geschliffenes Glasprisma von Zeiss. $n = 1,5188$.

Prisma IV. Ein schweres Silicatflintglasprisma (Bestandteile 79 Proz. PbO , 21 Proz. SiO_2) von Zeiss. Dasselbe wurde mit Schmirgel geschliffen und mit Pariser Rot poliert. Für die Kathetenflächen gilt das bei Prisma I Gesagte. $n = 1,9166$.

Prisma V. Ein Zinkblendeprisma. Die Kathetenflächen waren analog denen bei Prisma I geschliffen (von Voigt und Hochgesang, Göttingen). Sie waren nicht sehr glatt, da das Material äußerst schwer zu bearbeiten war. $n = 2,3902$.

Die Justierung des Spektrometers, der Nicols und des Soleil-Babinetschen Kompensators wurden im wesentlichen nach der üblichen Methode ausgeführt. Die Nulllage des Kompensators war 56,456; Phasenverzögerungen zwischen den

1) L. Lorenz, Pogg. Ann. 111. p. 460. 1860.

2) Alle Brechungsindizes beziehen sich natürlich auf $\lambda = 546 \mu\mu$.

Hauptkomponenten vom Betrage $+\lambda/2$ bez. $-\lambda/2$ entsprachen die Werte 40,919 bez. 71,999, woraus folgt, daß die Beschaffenheit des Instrumentes eine vorzügliche ist, indem die $\lambda/2$ entsprechenden Differenzen obiger Zahlen 15,537 und 15,543 sind. Als Ausgangslagen wurden daher die Zahlen

$$40,92, \quad 56,46, \quad 72,00$$

angenommen, so daß die Verzögerung Δ zwischen der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponente durch

$$(1) \quad \Delta = \frac{\pi}{15,54} (56,46 - B)$$

gegeben ist, wenn B die vom Kompensator angezeigte Zahl ist. Nach R. Hennig¹⁾ übt ein nicht völlig genau orientierter Kompensator einen fälschenden Einfluß auf die zu messende Phasendifferenz aus, die bei kleinem Orientierungsfehler desselben eliminiert werden kann dadurch, daß man aus den bei zur Einfallsebene symmetrischen Einstellungen des Polarisators gemachten Ablesungen der Phasendifferenzen das arithmetische Mittel nimmt. Dieses Verfahren wurde bei allen Messungen angewendet. Für jeden Einfallswinkel wurden vier Kompensator- und zwei Analysatoreinstellungen gemacht. Eine besondere Untersuchungsmethode erheischte das schmale Gebiet an der Grenze der Totalreflexion, also bei den unter 2. angeführten Untersuchungen. Hier wurde das Fernrohr ein für allemal festgeklemmt und vor das Okular ein Okularmikrometer mit bis auf Bruchteile von Bogensekunden verschiebbarem Okularspalt, der etwa 20" breit gewählt werden mußte, aufgesetzt.

1. Für die gewöhnliche Reflexion in Luft wurden Prisma I, II, IV und V verwendet. I, IV und V wurden etwa 2 Monate nach dem Schleifen so, wie sie geliefert wurden, benutzt, nachdem sie mit einem weichen Lederlappen abgerieben worden waren. II war ein älteres Prisma und wurde mit Säuren, Alkohol und Benzin gereinigt. Dieser Zustand der Oberflächen sei kurz als der „natürliche“ bezeichnet. Das Einfallszimut war stets 5°. Die Resultate der hierauf bezüglichen Messungen stehen in Tab. A.

1) R. Hennig, Gött. Nachr. 3. p. 374. 1887.

Tabelle A.

I			II			IV			V		
$\delta_1 = 5,0$			$\delta_1 = 7,0$			$\delta_1 = 3,0$			$\delta_1 = 5,1$		
J	A	B	J	A	B	J	A	B	J	A	B
22° 22,7'	6,3	56,42	22° 51'	6,3	56,35	23° 8,7'	6,0	56,39	23° 15'	5,7	56,16
23 22,7	6,3	56,50	24 41	6,5	56,41	24 28,7	6,1	56,20	26 15	6,3	56,10
28 22,7	7,4	58,50	26 41	6,8	56,69	25 28,7	6,2	56,31	31 15	6,8	56,12
31 22,7	8,1	56,60	28 41	7,1	56,54	28 28,7	6,3	56,24	36 15	7,4	56,10
35 22,7	9,5	56,59	31 41	7,8	56,39	29 28,7	6,8	56,14	41 15	8,4	55,97
41 22,7	12,9	56,55	35 41	9,1	56,50	32 28,7	7,4	56,11	46 15	10,5	55,88
44 22,7	15,7	56,37	39 41	11,2	56,31	35 28,7	7,9	56,27	51 15	12,8	55,85
46 22,7	19,1	56,48	44 41	15,4	56,47	39 28,7	9,0	55,95	56 15	18,1	55,66
48 22,7	24,1	56,50	46 41	18,2	56,57	44 28,7	11,3	55,84	58 15	21,4	55,48
50 22,7	31,1	56,51	49 41	25,7	56,27	45 28,7	11,8	55,81	60 15	26,3	55,22
52 22,7	44,3	56,54	52 41	40,0	56,18	46 28,7	12,4	55,77	62 15	34,3	54,57
53 22,7	55,3	56,51	54 41	59,3	55,84	47 28,7	13,3	55,65	63 15	40,1	54,03
53 52,7	61,2	56,51	55 41	74,2	55,28	49 28,7	15,1	55,47	64 15	46,7	53,27
54 12,7	66,3	56,54	55 51	76,8	55,02	51 28,7	17,5	55,38	65 15	55,4	51,98
54 52,7	76,6	56,59	56 1	79,6	54,66	53 28,7	20,8	55,17	66 15	60,3	49,57
55 22,7	85,8	56,59	56 11	82,4	54,11	55 28,7	25,4	54,70	66 45	61,3	48,23
55 32,7	88,5	.	56 21	84,8	52,84	57 28,7	32,6	54,16	67 15	60,5	46,73
55 42,7	88,3	.	56 31	85,4	49,95	59 28,7	43,7	52,92	67 45	56,5	45,58
55 52,7	85,8	40,60	56 36	86,1	47,94	60 28,7	49,6	51,86	68 15	43,4	43,52
56 2,7	82,6	40,91	56 41	85,7	46,67	61 28,7	53,8	50,22	71 15	28,3	42,21
56 22,7	77,0	40,96	56 51	83,7	44,60	61 58,7	55,0	48,94	75 15	15,5	41,59
58 22,7	49,1	40,50	57 11	78,6	43,08	62 28,7	54,3	47,73			
63 22,7	22,5	41,02	57 41	70,9	41,88	63 28,7	50,6	45,87			
68 22,7	14,2	41,05	58 41	56,9	41,47	64 28,7	43,9	44,61			
71 22,7	11,1	41,05	63 41	24,5	41,23	65 28,7	37,6	43,79			
73 22,7	10,3	41,02	69 41	13,7	41,08	70 28,7	19,7	42,11			
						74 28,7	13,6	41,70			

I, II, III und IV sind die betreffenden Prismen, J der Einfallswinkel, A das Azimut der Schwingungsebene des reflektierten Lichtes — natürlich, nachdem es durch den Kompensator wieder linearpolarisiert gemacht worden ist — und B die Phasendifferenz $\delta_p - \delta_s$ der Hauptkomponenten des reflektierten Strahles (δ_p und δ_s sind die Phasenverzögerungen der beiden Komponenten gegenüber der einfallenden Welle), in Teilen des Kompensators angegeben, die nach Formel (1) in Teilen von π ausdrückbar ist. δ_2 ist das Mittel des mittleren Beobachtungs-

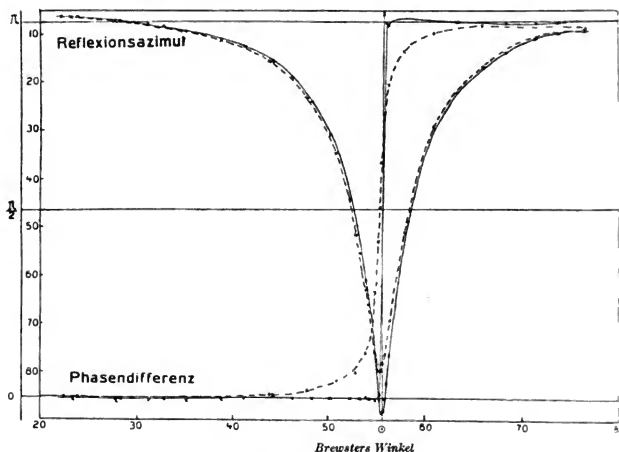


Fig. 1. Prisma I.

fehlers des Einzelresultates bei der Kompensatoreinstellung. Dasselbe ist genommen von allen mittleren Beobachtungsfehlern einer Versuchsreihe, und zwar in Trommelteilen der Kompensatorschraube ausgedrückt, so daß von diesem Fehler meist nur die letzte Stelle der angegebenen Kompensatorzahlen alteriert wird. Diese Größe kann nur ungefähr über die gemachten Fehler orientieren, weil die Genauigkeit des Kompensators stark abhängig ist vom Verhältnis der beiden ihn durchsetzenden Schwingungskomponenten.

Die der Tab. A entsprechenden Kurven sind die in den

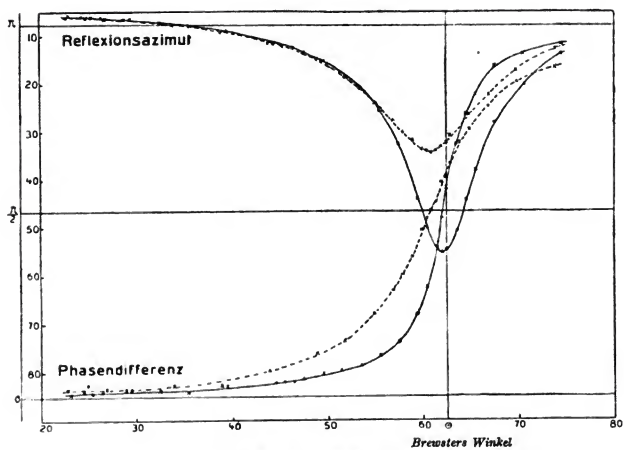


Fig. 2. Prisma IV.

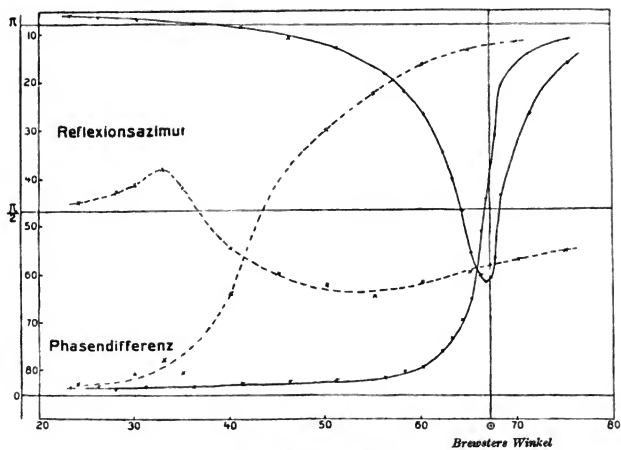


Fig. 3. Prisma V.

Figg. 1, 2 u. 3 ausgezogenen. Da das Verhalten von Prisma II in der Mitte zwischen dem von Prisma I und IV steht, ist für dieses Prisma auf die Kurvendarstellung verzichtet worden. Als Abszissen sind die Einfallswinkel, als Ordinaten die Lagen der Schwingungsebene des reflektierten Lichtes und die Phasendifferenzen $\delta_p - \delta_s$, ausgedrückt in Teilen von π , genommen worden.

Bei Prisma I wurde, da die Beobachtungen keine Entscheidung geben, positive Reflexion angenommen. Bei I u. II fallen Brewsters Winkel, Haupteinfallswinkel ($\delta_p - \delta_s = \lambda/4$) und Polarisationswinkel (Einfallswinkel der maximal gedrehten Polarisationssebene des reflektierten Lichtes) zusammen. Bei Prisma IV und V fallen zwar Haupteinfallswinkel und Polarisationswinkel zusammen, hingegen ist der Brewstersche Winkel um etwa 25' bez. 40' größer als jene beiden. Das maximale Azimut der Schwingungsebene des reflektierten Strahles nimmt nicht immer mit größeren Brechungsindizes ab, da es 88,6°, 86,1°, 55,0° und 60,3° beträgt, also bei der Zinkblende größer ist als beim Glase vom Brechungsindex 1,9. Mit höherem Brechungsindex zeigen alle Kurven eine Abflachung ihrer Buckel, d. h. *das Elliptizitätsgebiet*¹⁾ wächst mit dem Brechungsindex.

Um jetzt den Einfluß einer künstlichen Oberflächenschicht auf den Verlauf der eben besprochenen Kurven kennen zu lernen, wurde käufliches Paraffin, das ungefähr den Brechungsindex 1,44 hat, fein zerstückelt und damit die Hypotenusenfläche des zu untersuchenden Prismas kräftig eingerieben, so daß, im Gegensatz zu den Untersuchungen anderer²⁾, eine verhältnismäßig dicke, nicht sehr gleichmäßige Schicht sich auf der Prismenoberfläche befand. Die Dicke dieser Schicht wurde mittels Newtonscher Ringe zu 2—3 μ bestimmt. Untersucht wurden wieder die Prismen I, II, IV und V. Die Resultate sind niedergelegt in der folgenden Tabelle, die genau wie A eingerichtet ist.

Bei den drei ersten Prismen war das Polarisatorazimut 5°, indessen beim Prisma V mußte, um einigermaßen genaue

1) Vgl. hierzu K. E. F. Schmidt, Wied. Ann. 51. p. 434. 1894.

2) P. Drude, Wied. Ann. 36. p. 532. 1889; K. E. E. Schmidt, Wied. Ann. 51. p. 429 ff. 1894.

Tabelle B.

I			II			IV			V		
$\delta_s = 6,1$			$\delta_s = 4,0$			$\delta_s = 5,0$			$\delta_s = 25,0$		
J	A	B	J	A	B	J	A	B	J	A	B
23° 51,3'	6,5	56,45	22° 50,7'	6,1	56,30	22° 53'	6,0	56,15	24° 11'	45,0	56,07
27 51,3	7,3	56,59	24 53,7	6,9	56,38	24 55	6,2	55,92	28 11	42,7	56,22
32 51,3	8,6	56,47	28 53,7	7,2	56,56	26 55	6,6	56,12	30 11	41,5	55,59
38 51,3	11,3	56,54	33 53,7	8,6	56,22	28 55	6,7	56,10	33 11	38,0	54,99
43 51,3	15,7	56,32	38 53,7	10,9	56,34	33 55	7,6	55,92	35 11	42,1	53,48
47 51,3	23,2	56,20	43 53,7	14,6	56,38	38 55	9,1	55,93	40 11	54,5	52,22
50 51,3	35,0	55,78	48 53,7	23,2	56,19	43 55	11,4	55,30	45 11	59,8	46,85
52 51,3	51,8	55,54	51 53,7	35,5	55,97	48 55	14,9	54,63	50 11	61,9	45,31
53 51,3	63,1	54,66	52 53,7	42,5	55,76	51 55	18,4	54,07	55 11	64,6	43,85
54 51,3	77,7	52,14	53 53,7	51,3	55,45	54 55	23,9	53,03	60 11	61,2	42,59
55 11,3	79,6	50,08	54 53,7	63,4	54,88	56 55	27,8	52,02	65 11	59,1	42,03
55 21,3	80,9	48,70	55 23,7	70,0	54,98	57 55	30,1	51,37	70 11	56,5	41,62
55 31,3	79,6	46,78	55 53,7	78,2	53,15	58 55	31,7	50,53	75 11	54,6	41,42
55 41,3	78,4	45,63	56 3,7	79,0	51,93	59 55	33,3	49,53			
55 51,3	76,6	44,70	56 13,7	81,7	50,82	60 25	33,7	49,05			
56 21,3	69,4	43,52	56 23,7	81,1	48,96	60 55	34,4	48,65			
57 51,3	51,1	42,16	56 33,7	81,6	46,48	61 25	33,8	48,25			
60 51,3	29,6	41,40	56 43,7	80,2	45,95	61 55	33,0	47,54			
65 51,3	17,1	41,16	56 53,7	78,7	44,70	62 25	32,7	47,23			
75 51,3	9,1	41,86	57 23,7	71,5	43,41	62 55	30,8	46,68			
			57 53,7	62,9	42,78	63 55	29,7	45,83			
			58 53,7	52,4	41,88	64 55	26,4	45,22			
			60 53,7	35,3	41,63	66 55	22,3	44,30			
			64 53,7	20,8	41,21	69 55	17,0	43,26			
			69 53,7	13,7	41,20	73 55	12,5	42,68			
			73 53,7	10,3	41,43						

Kompensatoreinstellungen zu erhalten, das Einfallssazimut auf 45° erhöht werden. Es zeigte sich nämlich die eigentümliche Erscheinung, daß die Paraffinschicht bei den Prismen I, II und IV die Genauigkeit der Einstellung nur unwesentlich veränderte, hingegen beim Prisma V infolge erheblicher Diffusität des Lichtes sehr merklich herabsetzte, wie auch der angegebene Fehler δ_3 zeigt.

Die der Tab. B entsprechenden Kurven sind in den Figg. 1, 2 und 3 gestrichelt eingezeichnet. Der allgemeine Charakter der Änderungen gegenüber Tab. A besteht darin, daß alle gestrichelten Kurven sich mehr den für die Metallreflexion geltenden Kurven annähern als die entsprechenden ausgezogenen. Es sind also, bezogen auf denselben Einfallswinkel, die Phasendifferenzen *vor* dem Haupteinfallswinkel größer, *hinter* demselben kleiner geworden, wenn man, wie hier stets geschieht, für senkrechte Inzidenz die Phasendifferenz Null festsetzt.

Im besonderen zeigt sich:

a) Das maximale Azimut der Schwingungsebene, das jetzt bezüglich $80,5^\circ$, $82,3^\circ$, $34,4^\circ$ und 9° beträgt, hat bei allen Prismen abgenommen. Die Abnahme ist im allgemeinen um so größer, je größer die Differenz zwischen den Brechungsexponenten des betreffenden Prismas und der Paraffinschicht ist.

b) Der Polarisationswinkel ist überall kleiner geworden, nämlich um etwa $17'$, $12'$, $90'$, 11° vom Brewsterschen Winkel abweichend. Auch hier ist im allgemeinen die Abweichung um so größer, je größer obige Differenz ist.

c) Der Haupteinfallswinkel ist auch überall kleiner geworden und zwar stimmt derselbe mit dem veränderten Polarisationswinkel überein, ausgenommen beim Zinkblendeprisma, wo der Haupteinfallswinkel ca. 24° vom Brewsterschen Winkel abweicht.

Da Paraffin eine niedrig brechende Substanz ist, sollte eine zweite Versuchsserie mit einer hochbrechenden Substanz angestellt werden, um eventuell positive in negative Reflexion zu verwandeln, und so die von Hrn. Voigt¹⁾ und Drude ge-

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 122. 1884; 31. p. 826. 1887; 32. p. 526. 1887.

gegebene Erklärung der negativen Reflexion durch das Experiment direkt zu bestätigen. Es wurde α -Monobromnaphthalin mit dem Brechungsindex 1,66 gewählt. Allein wegen des Verdunstens der Bromnaphthalinschicht mißlang diese Versuchsserie.

Vergleichen wir jetzt die gewonnenen Resultate mit der Theorie von Drude¹⁾, welche das Entstehen der Phasendifferenz durch die Annahme einer dünnen Oberflächenschicht erklärt. Unter Vernachlässigung von Gliedern höherer als der ersten Ordnung in d/λ , wo d Schichtdicke, λ Wellenlänge ist, erhält Drude die folgende Formel für die Phasendifferenz $\delta_p - \delta_s = \Delta$ der Hauptkomponenten im Falle der gewöhnlichen Reflexion in Luft:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \Delta = 2 \varepsilon n^2 \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{n^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Dabei ist n der Brechungsindex der Prismensubstanz gegen Luft; φ ist der Einfallswinkel, ε der Elliptizitätskoeffizient. Es ist:

$$(3) \quad \varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{n^2 - 1} \int_0^d d\lambda \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) (1 - \mu^2),$$

wo ν den Brechungsindex der betreffenden Stelle der Oberflächenschicht gegen Luft, μ den dieser Stelle gegen die Prismensubstanz bedeutet. Falls das Licht den umgekehrten Strahlengang geht, die Reflexion also in Glas erfolgt, wird aus (2):

$$(2') \quad \operatorname{tg} \Delta = 2 \varepsilon n \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi - n^2},$$

wo n jetzt den Brechungsindex von Luft gegen Glas bedeutet und ε die in (3) gegebene Bedeutung behält. Die Formeln (2) und (2') gelten für das Einfallssazimut 45° . Daher ist die rechte Seite von (2) und (2') noch mit $\operatorname{ctg} 5^\circ$ zu multiplizieren, um mit meinen Messungen in Einklang zu kommen. Aus der maximalen Drehung der Polarisationssebene, wie sie aus den Tab. A und B ersichtlich ist, ergaben sich folgende Werte für die Elliptizitätskoeffizienten bei den Prismen I, II, IV und V im natürlichen Zustande und mit Paraffin bestrichen:

1) P. Drude, Wied. Ann. 43. p. 142. 1891.

Prisma	I	II	IV	V
„Natürlicher“ Zustand . .	0,002	0,004	0,055	0,040
Brechungsindex	1,46	1,52	1,92	2,39
Mit Paraffin belegt . . .	0,016	0,014	0,114	0,381

Entsprechend dem Charakter der Kurven sind also die Elliptizitätskoeffizienten der zweiten Gruppe sehr viel größer als die der ersten. Im großen und ganzen haben sie indes auch in diesem zweiten Falle Werte, welche anzeigen, daß die Schichtdicke immer noch als klein gegenüber der Wellenlänge anzusehen ist, bleibt ja doch auch im Falle des Paraffins der Charakter der Kurven, wie er einer gegen die Wellenlänge dünnen Oberflächenschicht entspricht, gewahrt. Da nun aber als Oberflächenschicht im zweiten Falle außer der natürlichen noch die über vier Wellenlängen dicke Paraffinschicht vorhanden war, so folgt: *Die aus dem optischen Verhalten bezüglich der Elliptizität des reflektierten Lichtes zu schließende Verdickung ist viel kleiner als die tatsächliche, mittels Newtonscher Ringe festgestellte.* Es bleibt also wohl nur der Schluß übrig, daß auf das optische Verhalten bei der Reflexion polarisierten Lichtes nur ein sehr kleiner Teil der Paraffinschicht Einfluß hat.

Sehen wir jetzt im einzelnen zu, inwieweit die Beobachtungen durch Formel (2) dargestellt werden. Der Haupteinfallswinkel muß nach Formel (2) mit dem Brewsterschen Winkel zusammenfallen. Da dies nur bei Prisma I und II im natürlichen Zustande der Fall ist, so muß hieraus geschlossen werden, nicht nur, daß eine Oberflächenschicht vorhanden war, sondern daß die Dicke der Oberflächenschicht bereits so groß ist, daß sich die Glieder von der Ordnung $(d/\lambda)^2$ bemerkbar machen. In der Tat zeigen auch die mittels der maximalen Drehung der Schwingungsebene berechneten Elliptizitätskoeffizienten gerade in *den* Fällen, wo die erwähnte Abweichung besteht, sehr hohe Werte gegenüber den beiden Fällen, wo sie nicht vorhanden ist.

An dieser Stelle möchte ich noch kurz auf die Resultate Hrn. K. E. F. Schmidts¹⁾ eingehen. Er findet, daß seine

1) K. E. F. Schmidt, Wied. Ann. 52. p. 432. 1894.

Oberflächenschichten ungesetzmäßige Änderungen in der Phasendifferenz hervorbringen. Da bei meinen Paraffinkurven die Abweichung von den für den natürlichen Zustand geltenden Kurven stets im selben Sinne erfolgt, komme ich zu dem Resultat, daß meine Oberflächenschicht den Verlauf der Phasendifferenz qualitativ in gesetzmäßiger Weise, wie oben dargelegt, beeinflußt, was natürlich nicht als ein Widerspruch mit Hrn. Schmidts Beobachtungen aufgefaßt werden kann, vielmehr die ganz verschiedene Einwirkung von fremden Oberflächenschichten dartut. Ferner findet Hr. Schmidt, daß das Elliptizitätsgebiet bei Gläsern durch fremde Oberflächenschichten verkleinert wird. Ich finde bei den von mir untersuchten Gläsern das Gegenteil, woraus wiederum hervorgeht, daß die spezielle Natur der fremden Oberflächenschicht von sehr bedeutendem Einfluß auf die Elliptizität ist.

2. Die Untersuchungen an der Grenze der Totalreflexion sollten den Einfluß der „natürlichen“ sowie künstlichen Oberflächenschicht auf die Drehung der Polarisationssebene sowie

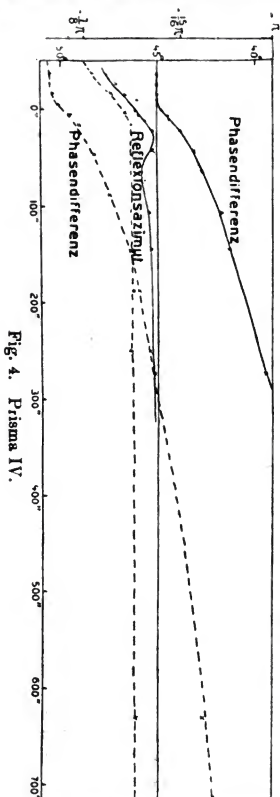
Tabelle C.

IV					
$\delta_1 = 0,2^\circ, \delta_2 = 2,5$			$\delta_1 = 0,1^\circ, \delta_2 = 1,5$		
Natürlicher Zustand			Mit Paraffin belegt		
J	A	B	J	A	B
— 76''	48,5°	70,79	— 120''	49,3°	69,67
— 55	48,4	70,81	— 78	49,5	69,70
— 35	47,6	70,80	— 36	48,4	69,69
— 24	47,1	70,81	— 16	47,4	69,71
— 14	46,6	70,81	— 5	46,1	69,78
— 9	46,0	70,81	+ 5	46,7	69,90
+ 2	46,1	70,85	+ 16	46,3	70,00
+ 7	45,9	70,91	+ 47	46,3	70,16
+ 12	45,6	70,93	+ 88	46,3	70,31
+ 22	45,2	71,05	+ 146	46,2	70,53
+ 43	45,2	71,19	+ 187	46,2	70,62
+ 64	45,8	71,27	+ 250	46,3	70,74
+ 106	45,4	71,48	+ 629	46,1	71,28
+ 142	45,3	71,55	+ 712	46,1	71,39
+ 272	45,1	71,94			

auf die Phasendifferenz feststellen und somit die Drudesche Formel¹⁾ prüfen. Es wurde für dieses Grenzgebiet das oben genannte Okularmikrometer verwendet. Das Einfallssazimut

war stets 45° . Untersucht wurden auf Phasendifferenz und Drehung der Polarisationsene die Prismen I, II und IV. Die Resultate bei I und II besagen, zumal sie mit ziemlichen Fehlern behaftet sind, nichts Neues, daher nur die Tabelle und Kurve für Prisma IV angeführt ist. Die Messungen wurden für den natürlichen Zustand wie auch für die Paraffinschicht ausgeführt. δ_2 ist der Analysatoreinstellungsfehler in Graden, der ebenso wie der Kompensatoreinstellungsfehler berechnet ist. Der Grenzwinkel der totalen Reflexion ist als Nullpunkt gewählt. Die negativen Einfallswinkel gehören der gewöhnlichen Reflexion an. Die entsprechenden Kurven finden sich in Fig. 4, wo die gestrichelten wieder der Paraffinschicht angehören. Die Abszissen sind die Einfallswinkel, die Ordinaten die Reflexionsazimute bez. die Phasendifferenzen. Es zeigt sich, daß die Phasendifferenz $-\pi$ nicht am Grenzwinkel der totalen Reflexion, sondern erst innerhalb des total reflektierenden

Gebietes eintritt, und zwar im natürlichen Zustand bei $5'$, bei Paraffin aber erst beim Winkel $20'$, vom Grenzwinkel aus



1) Vgl. die folgende Seite.

gerechnet. Dieses Verhalten der Phasendifferenz, das wohl zum ersten Male experimentell nachgewiesen worden ist, muß auch auf den Einfluß der Oberflächenschichten geschoben werden, zumal die Paraffinschicht die Abweichung vom Verhalten, wie es ohne Oberflächenschicht stattfinden würde, noch verstärkt. In der Tat findet Drude für die Phasendifferenz Δ der beiden Hauptkomponenten bei Totalreflexion unter Berücksichtigung einer dünnen Oberflächenschicht folgende Formel¹⁾:

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta_0}{2} - \varepsilon \frac{n}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi},$$

wo Δ_0 die durch die bekannte Fresnelsche Formel gegebene Phasendifferenz ist. An der Grenze wird $\Delta_0 = 0$ und $\sin \varphi = n$, daher aus (4)

$$\bar{\Delta} = -2\varepsilon \frac{\sqrt{1-n^2}}{n}$$

folgt, woraus zu erkennen, daß die Phasendifferenz bei Anwesenheit von Oberflächenschichten in der Tat am Grenzwinkel von $-\pi$ verschieden ist und den Wert $-\pi$ erst im totalreflektierenden Gebiete selber erreicht. Zu bemerken ist noch, daß man bei nahe gekreuzten Nicols und auf Null gestelltem Kompensator (bez. ohne dazwischengestellten Kompensator) direkt an der Grenze zwischen gewöhnlicher und totaler Reflexion ein ca. $\frac{1}{2}$ ' breites helles Band, vorzugsweise am Prisma IV, wahrnimmt, als dessen Ursache man eine schnelle Änderung der Phasendifferenz anzusehen geneigt ist. Da indessen die Durchmessung keinen Anhaltspunkt dafür gegeben hat, so wird man auch hierfür eine ähnliche Kontrastwirkung verantwortlich machen müssen, wie bei dem „hellen Wulste“²⁾, wenn Licht von natürlicher Beschaffenheit einfällt.

3. Das Fresnelsche Gebiet der Totalreflexion wurde bei Prisma I und IV untersucht. Die Einfallswinkel konnten nicht viel über 20° hinaus gewählt werden, vom Grenzwinkel an gerechnet, da das Fernrohr nicht unbeschränkt drehbar war. Das Einfallssazimut war stets 45° . Die Resultate stehen in

1) P. Drude, Wied. Ann. 43. p. 146. 1891.

2) E. Mach u. J. Arbes, Wiener Sitzungsber. 92. 1885.

Tab. D. Dem Einfallswinkel 0° in der Tabelle entspricht bei Prisma I der tatsächliche Einfallswinkel $43^\circ 12,5'$, bei IV $31^\circ 27'$. Man erhält die Phasendifferenz Δ in Teilen von π , wenn man die unter B stehenden Zahlen einsetzt in

$$\Delta = \frac{\pi}{15,54} (B - 72,00),$$

indem der Übersichtlichkeit wegen an der Totalreflexionsgrenze die Phasendifferenz gleich Null angesetzt wird.

Tabelle D.

I gereinigt			I mit Paraffinschicht			IV gereinigt		
$\delta_2 = 3,5$			$\delta_2 = 3,5$			$\delta_2 = 2,0$		
J	A	B	J	A	B	J	A	B
0'	45,0	72,00	0'	44,9	71,52	0'	45,3	71,59
1° 27	45,7	73,99	1° 27	47,8	73,77	14	45,7	72,89
2 49	45,3	74,94	2 49	47,9	74,60	40	45,2	74,10
4 11	45,0	75,46	4 11	47,6	75,25	1° 27	45,5	75,13
6 13,5	45,2	76,09	6 13,5	47,5	75,76	3 1	44,6	76,38
8 16	44,8	76,56	8 16	47,6	76,13	5 5,5	45,2	77,08
12 57	45,0	77,40	12 57	47,6	77,01	7 9	45,1	77,39
18 11	45,4	78,23	18 11	47,9	77,65	9 10,5	45,4	77,50
21 21	45,0	78,76	21 21	49,2	78,16	11 10	44,7	77,42
						13 36	44,1	77,31
						15 57	43,5	77,18
						18 12,5	42,8	76,99
						20 21	41,2	76,86

In die der Tabelle entsprechenden Kurven sind nur die Phasendifferenzen aufgenommen, da die Analysatorkurven nichts Bemerkenswertes bieten. Die für Prisma I geltenden Kurven sind in Fig. 5 gezeichnet, wobei zum Vergleich auch die aus der Fresnelschen Formel:

$$(5) \quad \operatorname{tg} \frac{\Delta_0}{2} = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi}$$

folgende Phasendifferenz punktiert eingetragen ist. Die gestrichelte Kurve gilt für den Paraffinbelag. Die Einfallswinkel,

die vom Grenzwinkel aus zählen, sind die Abszissen, die Phasendifferenzen die Ordinaten. *Ganz besonders auffallend und interessant ist die große Abweichung der Phasendifferenz beim Prisma I von der durch die Fresnelsche Formel gegebenen, welche im Maximum über $\pi/4$ beträgt.* Sie auf Beobachtungsfehler zurückzuführen, ist natürlich ausgeschlossen. Auch der Winkel, bei dem die maximale Phasendifferenz eintritt, weicht

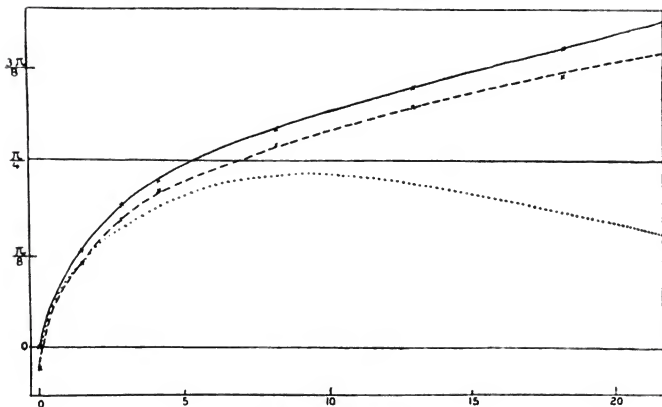


Fig. 5. Prisma I.

stark ab vom theoretischen Werte. Daß die Phasendifferenz bei sehr großen Einfallswinkeln wieder abnimmt, wurde besonders festgestellt. Ferner wurde zum Vergleich die maximale Phasendifferenz gemessen und berechnet beim Prisma II; die Werte weichen nur um den 520. Teil einer Wellenlänge voneinander ab. Daß das Quarzglas wieder einen kristallinen Zustand angenommen haben sollte, ist aus verschiedenen Gründen sehr unwahrscheinlich.¹⁾ Die zum Prisma IV gehörige Kurve ist die in Fig. 6 ausgezogene, wo auch das theoretische Maximum der Phasendifferenz eingezeichnet ist. Wenn auch

1) Es werden im Institut Versuche angestellt, welche darauf abzielen, isotrope und anisotrope Oberflächenschichten voneinander zu unterscheiden.

die Abweichung von der Theorie erheblich kleiner ist wie bei Prisma I, so erfolgt sie doch auch im selben Sinne. Es scheint aus dem vorangehenden hervorzugehen, daß man zur Erklärung dieser zum ersten Male bemerkten Anomalien auf die Dispersion zurückgreifen müssen.¹⁾ Der Einfluß der Paraffinschicht bei Prisma I erfolgt in dem von Drudes Formel (4) geforderten Sinne.

4. Die Versuche über das Eindringen des „total“ reflektierten Lichtes in das dünnere Medium sind nur am Prisma IV im natürlichen Zustande vorgenommen worden, und zwar nach einer gegenüber der Quinckeschen²⁾ abgeänderten Methode, welche die Phasendifferenzen und die Drehung der Polarisationssebene genau zu messen gestattet. An die Hypotenusenfläche von Prisma IV wurde die Hypotenusenfläche von Prisma III angedrückt, nachdem gleichmäßig dünn gewalzte Zinnfolienstreifen³⁾ auf die Ränder der Hypotenusenflächen aufgelegt worden waren. Der Abstand zwischen den Hypotenusenflächen betrug in drei verschiedenen Serien etwa 6μ , 2μ und $\frac{1}{4}\mu$. Als Einfallssazimut wurden 45° gewählt. Die Resultate finden sich in Tabelle E.

Die negativen Winkel gehören der gewöhnlichen Reflexion an, so daß z. B. $-5^\circ 34'$ einen Einfallswinkel von $25^\circ 53'$ bedeutet. Die zugehörigen Kurven — es sind wieder nur die Phasendifferenzkurven aus demselben Grunde wie oben gezeichnet — sind dargestellt in Fig. 6. Die zur Serie (1) gehörige Kurve ist nicht gezeichnet, da sie mit der Kurve nahezu zusammenfällt, die man bei völligem Weglassen des

1) Denn gerade Quarzglas bez. zum mindesten der Quarzkristall unterscheidet sich von den Gläsern durch metallische Reflexion im ultraroten Gebiete, besitzt also dort anomale Dispersion. Es darf daher die Frage aufgeworfen werden, ob Körper mit anomaler Dispersion einen Verlauf der Elliptizität des totalreflektierten Lichtes aufweisen, der nicht durch die Fresnelsche Formel dargestellt wird, wofern die Wellenlänge des einfallenden Lichtes im anomalen Gebiete liegt. Man würde es dann also mit einer anomalen Elliptizität, hervorgerufen durch anomale Dispersion, zu tun haben.
O. Lummer u. R. Kynast.

2) G. Quincke, Pogg. Ann. 127. p. 1 u. 199. 1866.

3) Diese gleichmäßig dünne Zinnfolie verdanke ich dem Zinnfolienwerk A. Wolff, Breslau.

Tabelle E.

Serie (1)			Serie (2)			Serie (3)		
$\delta_2 = 1,5$			$\delta_2 = 2,5$			$\delta_2 = 3,5$		
J	A	B	J	A	B	J	A	B
— 1,1'	45,9	70,35	— 6,5'	61,8	66,85	— 5° 34'	87,8	72,00
— 0,4	45,4	71,03	— 5,9	53,0	67,80	— 1 56	75,0	72,98
+ 0,3	45,8	71,31	— 4,0	47,1	69,40	— 22,5'	64,9	73,47
+ 3,3	45,6	72,14	— 1,3	45,0	70,36	— 1,5	63,3	73,52
+ 10,7	45,6	72,62	+ 3,9	45,6	71,28	+ 3,7	62,6	73,82
+ 21,2	45,3	73,17	+ 14,3	45,2	72,18	+ 24,5	61,1	73,81
36,9	45,3	73,84	40,3	45,1	73,27	+ 1° 11,5'	56,7	74,08
1° 21'	45,3	75,07	1° 43'	45,9	74,66	2 45	51,8	74,80
2 26	45,1	76,02	3 48	45,1	75,86	4 50	47,8	75,33
4 31	45,1	76,88	5 52	45,3	76,48	7 24	45,4	75,75
7 36	44,8	77,32	12 24	44,3	76,33	9 55	44,5	75,86
12 35	43,9	77,30	17 6	43,5	75,98	12 24	44,7	75,88
17 16	42,9	76,90	20 58	41,8	75,46	14 47	44,1	75,83
21 31	41,0	76,63				17 3	42,9	75,50
						19 18	41,9	75,13

Prismas III erhält. Der Serie (2) entspricht die gestrichelte, der Serie (3) die punktierte Kurve. Es wird der von Quincke ausgesprochene Satz im großen und ganzen bestätigt: Mit wachsendem Abstände der beiden Hypotenusenflächen wird die Phasendifferenz größer und nähert sich dem durch die Fresnelsche Formel gegebenen Werte.¹⁾ Eine Einschränkung erleidet der Satz in den folgenden Punkten. Bei unendlichem Abstände ist die Phasendifferenz größer als die durch Fresnels Formel gegebene. Bei sehr geringem Abstände ist die Phasendifferenz in der Nähe des Grenzwinkels größer als die Fresnelsche. Außerdem verschiebt sich die maximale Phasendifferenz bei Verkleinerung des Abstandes zu größeren Einfallswinkeln. Hr. W. Voigt²⁾ hat eine Theorie dieser Erscheinungen entwickelt und unter der Annahme gleicher Brechungsindizes der beiden Prismen Formeln aufgestellt, welche an der Totalreflexionsgrenze die Phasendifferenz Null ergeben. Allein dies

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 127. p. 220. 1866.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. 3. p. 49. 1884.

ist *weder* bei der punktierten, *noch* auch bei der gestrichelten Kurve der Fall, welch letztere überhaupt an der Totalreflexionsgrenze einen ungemein starken Abfall aufweist. Möglicherweise hängt diese Abweichung mit den verschiedenen Brechungsindizes von III und IV zusammen. Da bereits die gestrichelte Phasendifferenzkurve die Störung durch die Nähe des zweiten

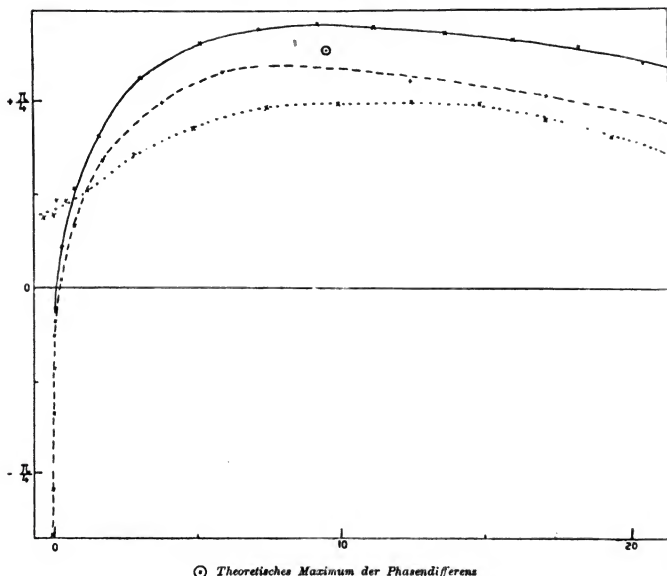


Fig. 6. Prisma IV.

Prismas anzeigt und hierbei der Abstand der beiden Hypotenusenflächen nahe an 2μ lag, so heißt dies, daß die Lichtbewegung mindestens 3—4 Wellenlängen in das benachbarte Medium hineinreicht. Dieses Resultat steht in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem Quinckeschen Ergebnisse, der als maximales Eindringen bei einem Glase von niedrigerem Brechungsindex als in meinem Falle, $3\frac{1}{2}$ Wellenlängen findet.

Über die L. Lorenzsche¹⁾ Reflexionstheorie sei folgendes bemerkt. Sie unterscheidet sich von den anderen²⁾ Theorien insbesondere dadurch, daß sie nicht von Differentialgleichungen und den dazu gehörigen Grenzbedingungen ausgeht, sondern einzig und allein die Fresnelschen Formeln als Grundlage nimmt. Lorenz nimmt eine gegenüber der Wellenlänge dünne Oberflächenschicht an, und denkt sich dieselbe in sehr viele dünne Lamellen zerlegt, von denen benachbarte sich hinsichtlich des Brechungsindex nur um eine kleine Größe erster Ordnung unterscheiden. Den einfallenden Strahl läßt er dann gemäß den Fresnelschen Formeln an jeder Trennungsoberfläche benachbarter Lamellen reflektieren und summiert dann die sich so ergebenden einzelnen Strahlanteile. Er konstruiert also den Vorgang bei der gewöhnlichen Reflexion gleichsam geometrisch. Es lag nun nahe, diese geometrische Konstruktion auf die Totalreflexion zu übertragen, insofern es geboten, diese Theorie, soweit sie Lorenz entwickelt hat, einer genauen Durchsicht zu unterziehen, bez. zu versuchen, sie weiter auszubauen. Die hierbei sich ergebenden Resultate bilden den Gegenstand der folgenden Darlegungen. Für die Elongation des reflektierten Strahles, in einem der Hauptazimute schwingend, findet Lorenz folgenden Ausdruck:

$$(6) \quad \left\{ A \left[\int_{u_a}^{u_\beta} du_0 \cos(kt - \delta_0) - \int_{u_a}^{u_\beta} du_0 \int_{u_a}^{u_0} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 \cos(kt - \delta_0 + \delta_1 - \delta_2) \pm \dots \right] \right\}.$$

Wenn ich nun auch den Beweis für die gleichmäßige Konvergenz für jedes endliches u_β erbringen konnte, und zwar mittels der Substitution

$$v_r = u_r - u_a,$$

1) L. Lorenz, Pogg. Ann. 111. p. 460—473. 1860.

2) Cauchy, Compt. rend. 7. p. 8. 1839; 10. 1840; K. v. d. Mühl, Math. Ann. 5. p. 471. 1872; W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 873. 1883; 21. p. 522. 1884; 23. p. 493. 1884; 24. p. 156. 1885; 43. p. 410. 1891; van Ryn van Alkemade, Wied. Ann. 20. p. 22. 1883; P. Drude, Wied. Ann. 36. p. 865. 1889; 43. p. 126. 1891.

welche die Integrale auszuwerten gestattet, so sind doch die aus der Annahme der Kleinheit der Oberflächenschichtdicke gegenüber der Wellenlänge von Lorenz gezogenen Schlüsse nicht zulässig. Aus der Reihe (6) folgert nämlich Lorenz die folgende Differentialgleichung:

$$(7) \quad \frac{d^2 \chi}{du^2} + \frac{\sin(u - u_\beta)}{\cos^2(u - u_\beta)} \cdot \frac{d(2\chi - \delta)}{du} + i \frac{d\chi}{du} \cdot \frac{d(\chi - \delta)}{du} = 0.$$

Um diese Riccatische Differentialgleichung für $d\chi/du$ integrieren zu können, setzt Lorenz $d\chi/du$ und $d\delta/du$ als klein im ganzen Bereiche von u voraus, und erhält als Integral:

$$(8) \quad \frac{d\chi}{du} = - \frac{1}{\cos^2(u - u_\beta)} \int_u^{u_\beta} (\sin 2(u - u_\beta)) \frac{d\delta}{du} du.$$

Nun fährt Lorenz fort: „Wenn in diesen Ausdruck die Werte von u eingesetzt werden, so ersieht man, daß $d\chi/du$ für alle Einfallswinkel eine kleine Größe, sobald $d\delta/du$ klein ist, was also die einzige Voraussetzung ist.“ Sieht man $d\delta/du$ als klein an, so führt dies zu der Forderung, daß die Schichtdicke d gegenüber der Wellenlänge klein ist. Ist diese Forderung erfüllt, so ist trotzdem für den Einfallswinkel 45° $d\delta/du$ für eine Komponente unendlich groß. Die zweite Schwierigkeit liegt darin, daß, um zum Integral (8) zu gelangen, bereits $d\chi/du$ neben $d\delta/du$ als klein angesehen werden müssen, also unbedingt beide Größen sehr klein sein müssen und für die Kleinheit von $d\chi/du$ läßt sich kein plausibler Grund beibringen. Das Merkwürdige ist nun, daß trotz dieser offensbaren Mängel die Theorie bei ihrer Weiterführung zu richtigen Formeln für die Phasendifferenz der Hauptkomponenten führt. Man kann nämlich leicht zeigen, daß in den Lorenzschen Formeln bereits die oben angegebene Drudesche Formel (2) drinsteckt, nur hat ε naturgemäß einen abweichenden analytischen Ausdruck; immerhin ist ε eine kleine Größe, die bei negativ reflektierenden Substanzen tatsächlich auch negativ werden kann. Bei ihrer Durchführung gibt also die Lorenzsche Theorie trotz mathematischer Unzulässigkeiten die Tatsachen der gewöhnlichen Reflexion ebenso gut wieder wie die Drudesche Theorie.

Die von Hrn. Mascart¹⁾ aus der Lorenzschen Theorie gezogenen Folgerungen, welche die Nichtübereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung besagen, müssen als hinfällig bezeichnet werden.

Will man die Lorenzsche Theorie auf strenge mathematische Basis stellen, so kann dies durch folgende Annahme über die Natur der Oberflächenschicht erreicht werden, wenn auch immerhin manche Schwierigkeiten auftauchen. Infolge der Anziehung der Oberflächenschicht durch die Molekularkräfte des Glases ist an jeder Stelle der Oberflächenschicht der Wert der Dielektrizitätskonstanten, genommen senkrecht zur Ausbreitungsebene der Schicht, verschieden von dem in dieser Ebene genommenen Werte. Alsdann kann man die oben erwähnten beiden Schwierigkeiten umgehen und gelangt für die reflektierten Komponenten zu Ausdrücken, welche den Drudeschen sehr nahe stehen, während die Formel für die Phasendifferenz erheblich komplizierter ist als die Drudesche; jedoch gibt sie einen ähnlichen Verlauf der Phasendifferenz mit verschiedenem Einfallswinkel.

Als Resultate haben sich daher ergeben:

1. *Die Drehung der Polarisationssebene sowie die Phasendifferenz der beiden Hauptkomponenten bei gewöhnlicher Reflexion in Luft an isotropen, durchsichtigen Medien im „natürlichen“ Zustande folgen bei niedrigem Brechungsindex der von Drude aufgestellten Formel. Bei hochbrechenden Substanzen gilt diese Formel nur noch angenähert, da die Dicke der Oberflächenschicht nicht mehr als sehr klein gegenüber der Wellenlänge angesehen werden kann, und zwar sind Haupteinfallswinkel und Polarisationswinkel stets kleiner als der Brewstersche Winkel.*

2. *Eine mehrere Wellenlängen dicke Paraffinschicht, welche auf die Oberfläche eines isotropen durchsichtigen Mediums aufgetragen wird, wirkt auf die Phasendifferenz und Drehung der Polarisationssebene so, als ob nur eine gegenüber der Wellenlänge äußerst dünne Schicht aufgetragen wäre.*

3. *An der Grenze der Totalreflexion ist die Phasendifferenz nicht gleich $-\pi$, sondern um einen sehr kleinen Betrag davon verschieden, Null wird dieser Betrag erst im Gebiete der totalen Reflexion, wie es die Formel von Drude erheischt.*

1) E. Mascart, *Traité d'optique* 2. p. 439. 1891.

4 Die *Fresnelsche Formel* für die *Phasendifferenz* der *Hauptkomponenten* bei der *Totalreflexion* erleidet bei dem von mir benutzten amorphen *Siliciumdioxid* und vielleicht auch bei durchsichtigen hochbrechenden Gläsern eine *Ausnahme*; inwieweit diese *Abweichung* auf eine *Anisotropie* des verwendeten *Quarzglas*es oder auf andere Ursachen zurückzuführen ist, müssen besondere *Untersuchungen* zeigen.

5. Die *Untersuchungen* von *Quincke* über die *Elliptizität* bei der „*Totalreflexion*“ an dünnen *Lamellen* sind zum Teil *bestätigt* worden, zum Teil finden sich *Abweichungen* von denselben, die wohl nur in der *Verschiedenheit* der *Brechungsindizes* der beiden verwendeten *Medien* ihre *Ursache* haben können.

6. Die *L. Lorenzsche Theorie* steht auf *mathematisch unzulässiger Grundlage*, liefert aber trotzdem *richtige Resultate* bei ihrer *Weiterführung*. *Versucht* man, die *Lorenzsche Theorie* auf *strenge Grundlage* zu stellen, so stößt man auf *Schwierigkeiten mathematischer Natur*. Will man denselben aus dem Wege gehen, so sind *beträchtliche Einschränkungen* über die *physikalische Natur* der *Oberflächenschicht* notwendig, um einigermaßen genau die *Tatsachen* darzustellen.

Am Schlusse ergreife ich gern die Gelegenheit, Hrn. Prof. Lummer für die Anregung zu dieser Arbeit und die außerordentliche Zuvorkommenheit, mit der er mir die Mittel des Instituts zur Verfügung gestellt hat, meinen besten Dank auszudrücken.

Breslau, Physik. Institut d. Universität, im Januar 1907.

(Eingegangen 30. Januar 1907.)

**8. *Über die elektrische Leitfähigkeit
und die thermoelektrische Kraft einiger
Schwermetallverbindungen;
von K. Büdeler.***

Einleitung.

Die Schwierigkeit der elektrischen Untersuchung von reinen Metallverbindungen besteht ausschließlich in der Beschaffung geeigneter Präparate. Die Leitfähigkeit und die Thermokräfte fallen in den Bereich der für Metalle und Elektrolyte bekannten Werte, und lassen sich mit den hierfür ausgearbeiteten Methoden bequem messen. Aber die Herstellung reiner, absolut kohärenter Stäbchen oder Platten, die hierfür notwendig ist, ist gerade bei den am meisten interessierenden Schwermetallverbindungen, Oxyden, Sulfiden, Seleniden etc., auf dem Wege der Schmelzung, wie bei den Metallen, nur in den seltensten Fällen möglich.¹⁾ Man hat sich daher geholfen durch Benutzung von Stücken in der Natur vorkommender Kristalle²⁾, oder durch Pressen des pulverförmigen Körpers in geeignete Formen.³⁾ Erstere Methode liefert bei sorgfältiger Wahl des Stückes gute Werte, ist aber naturgemäß nur beschränkt anwendbar, auch finden sich nur selten reine Stoffe konstanter Zusammensetzung in der Natur. Die zweite ist zwar allgemein anwendbar, liefert aber durchaus unzuverlässige Resultate. Aus Pulver gepreßte Stifte liefern für den Widerstand meist mehrmals zu große Werte⁴⁾, machen bei Temperaturänderung irreversibele Änderungen durch und zeigen auch wohl Kohärerwirkung.

1) W. Hittorf, Pogg. Ann. 84. p. 1. 1851; J. Guinchant, Compt. rend. 134. p. 1224. 1902; E. van Aubel, Compt. rend. 135. p. 734. 1902.

2) J. Königsberger u. O. Reichenheim, Physik. Zeitschr. 7. p. 570. 1906.

3) F. Streintz, Ann. d. Phys. 9. p. 854. 1902; Physik. Zeitschr. 4. p. 106. 1903; 5. p. 159. 1904.

4) F. Streintz, Ann. d. Phys. 3. p. 1. 1900.

Entsprechend dieser Schwierigkeit ist die Kenntnis des Gebietes etwas zurückgeblieben, und die Resultate sind oft widersprechend und unregelmäßig. Es ist festgestellt worden, daß unter den Metallverbindungen mit starker Absorption und oft zugleich von geringer Verbindungswärme¹⁾ sich eine größere Zahl recht guter Leiter befindet, deren spezifischer Widerstand den der schlechtest leitenden Metalle zum Teil nur wenig übertrifft, daß dagegen die farblosen oder schwach gefärbten Verbindungen, z. B. auch die Alkalihydride (K_2H und Na_2H)²⁾ bei Zimmertemperatur nicht oder kaum leiten. Ferner ist bekannt³⁾, daß ein Teil der leitenden Verbindungen durch den Strom zerlegt werden, andere nicht, ohne daß man bisher dabei einen Zusammenhang mit anderen Erscheinungen finden könnte.⁴⁾

Ob sogenannte gemischte Leitfähigkeit möglich ist, bei der ein Teil des Stromes unter Zerlegung, ein anderer metallisch transportiert wird, ist noch nicht zu entscheiden.⁵⁾ Auch würde man wohl kaum angeben können, wie sich ein Körper mit gemischter Elektrizitätsleitung dem Gleichstrom gegenüber verhalten würde, selbst wenn man geeignete Annahmen über die beiden Leitfähigkeiten macht. Es müssen nämlich die Potentialsprünge an den Elektroden im allgemeinen für beide Arten der Leitung verschieden sein, können auch, in reinen Metallverbindungen, nicht durch Konzentrationsverschiebungen ausgeglichen werden. Also wird, wenn selbst Ionen und Elektronen frei beweglich nebeneinander existieren können, nicht zu entscheiden sein, welche Anteile der Gesamtleitung auf sie entfallen. Im folgenden haben wir bisher die Ausdrücke „elektrolytische Leitung“ und „metallische Leitung“ nur die Bedeutung, daß Zersetzung, Polarisation oder unipolare Leitung zu beobachten ist oder nicht.

1) J. Guinchant, l. c. p. 1224.

2) H. Moissan, Compt. rend. 136. p. 591. 1903.

3) W. Hittorf, l. c.

4) Hierüber vgl. J. Königsberger, Physik. Zeitschr. 7. p. 577. 1906.

5) Jodsilber *im Licht* hat nach H. Scholl (Ann. d. Phys. 16. p. 462. 1905) gemischtes Leitvermögen. Horton (Phil. Mag. (6) 11. p. 505. 1906) nimmt dasselbe für die von ihm bei hoher Temperatur untersuchten Oxyde an.

In diesem Sinne wurde bisher konstatiert, daß elektrolitisch leiten

$\text{Cu}_2\text{S}^1)$, AgCl , AgBr , $\text{AgJ}^2)$,

wahrscheinlich auch die ziemlich große Zahl der von Grätz u. a. untersuchten durchsichtigen Salze. Metallisch leiten — die mit gleichem Säureradikal etwa nach der Größe der Leitfähigkeit geordnet —

$\text{PbO}_2^3)$, $\text{CdO}^4)$, $\text{Fe}_2\text{O}_3^5)$, $\text{MnO}_2^4)$, $\text{CuO}^6)$, vielleicht auch $\text{Hg}_2\text{O}^4)$ und $\text{Ag}_2\text{O}_2^4)$,

$\text{CuS}^4)$, $\text{MoS}_2^4)$, $\text{PbS}^4)$, $\text{FeS}_2^5)$ (als Pyrit und als Markasit), $\text{HgS}^4)$, $\text{NiS}^4)$, $\text{FeS}^4)$, $\text{SnS}^7)$,

Ag_2Se , $\text{Cu}_2\text{Se}^8)$

Unter den Telluriden, Phosphiden, Arseniden, Antimonverbindungen, die zu den Legierungen hinüberführen, sind eine Anzahl guter metallischer Leiter, für die aber genauere Werte nicht bekannt sind. Über die Stellung des Ag_2S wird unten zu berichten sein. Eine Anzahl von Mineralien wurde noch von F. Braun⁹⁾ untersucht, deren zum Teil merkwürdiges Verhalten noch unerklärt ist.

In sehr glücklicher Weise hat Königsberger⁶⁾ die Abhängigkeit des Widerstandes metallischer Leiter von der Temperatur dargestellt durch eine Formel von der Gestalt

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \alpha t) e^{+\frac{q}{T}}.$$

Der letzte Faktor stellt im Sinne der Elektronentheorie die Steigerung der Leitfähigkeit durch Vermehrung der Leitungselektronen bei Temperaturzunahme, der Klammerausdruck die Widerstandsänderung infolge des Temperatureinflusses auf die Elektronenbeweglichkeit dar. q ergab sich stets als positiv, α wurde in allen Fällen recht nahe gleich dem Temperatur-

1) W. Hittorf, l. c.

2) W. Kohlrausch, Wied. Ann. 17. p. 642. 1882.

3) P. Ferchland, Zeitschr. f. Elektrochem. 9. p. 670. 1903.

4) F. Streintz, Ann. d. Phys. 9. p. 854. 1902.

5) J. Königsberger u. O. Reichenheim, l. c.

6) F. Horton, l. c.

7) J. Guinchant, l. c.

8) M. Bellati u. S. Lussana, Atti Ist. Veneto (6) 6. p. 189. 1887.

9) Vgl. A. Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl. 4. p. 383. 1905.

koeffizienten der reinen Metalle (ca. $\frac{1}{273}$) gefunden. Man kann daher den Ausdruck ohne großen Fehler in der Form schreiben

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \alpha T \cdot e^{\frac{q}{T}}$$

und sieht, daß für sehr kleine absolute Temperaturen σ beliebig anwächst, da das Exponentialglied viel schneller gegen ∞ als αT gegen Null konvergiert. Für sehr große T dagegen wird der letzte Faktor zu Eins, und σ steigt, wie bei Metallen, linear an.

Damit ist zugleich die Frage erledigt, ob, wie früher mitunter geschehen, aus dem Vorzeichen des Temperaturkoeffizienten auf die Natur der Leitung, metallisch oder elektrolytisch, geschlossen werden darf. Jeder Stoff nämlich, für den die Formel zutrifft, und wahrscheinlich ist sie sehr allgemein gültig, zeigt ein Maximum der Leitfähigkeit bei bestimmter Temperatur, in welchem der Temperaturkoeffizient sein Zeichen wechselt.

Es sind ferner an einigen Stoffen durch Beobachtung der elektrischen Leitfähigkeit Umwandlungspunkte nachgewiesen worden¹⁾, die mit den kalorimetrisch und anders bestimmten zusammenfallen. So bei Ag_2S (175°), Ag_2Se (133°), Cu_2S (103°), Cu_2Se (110°). Andere zur Erklärung irreversibeler Vorgänge angenommene Modifikationsänderungen bedürfen wohl noch der Bestätigung.²⁾

Über die Thermokräfte der Metallverbindungen liegen eine Reihe Untersuchungen vor. Unter den Schwefelmetallen fanden sich einige mit ganz auffallend hohen Werten der thermoelektrischen Kraft, die selbst die Kombination Bi-Sb weit übertreffen, doch sind auch hier die Resultate oft von der Vorgeschichte des Präparates abhängig.

Untersuchungsmethode.

Die Präparate, über deren Untersuchung im folgenden berichtet werden soll, sind sämtlich erhalten durch Herstellung

1) W. Hittorf, l. c.; M. Bellati u. S. Lussana, *Atti Ist. Veneto* (6) 6. p. 189. 1887.

2) F. Streintz, *Physik. Zeitschr.* 4. p. 107. 1903; W. Mönch, *Diss. Göttingen* 1905.

eines Metallspiegels durch kathodische Zerstäubung und nachträgliche Verwandlung in die gewünschte Verbindung durch Einwirkung des betreffenden Metalloiddampfes. Es liegt auf der Hand, daß die Zahl der so herstellbaren Körper sehr groß sein wird, selbst wenn durch besondere Schwierigkeiten ein hoher Prozentsatz der Möglichkeiten ausscheiden sollte. Es wurden bisher erhalten:

CdO, CdS, CdSe,
 CuJ, Cu₂O, CuO, CuS, Cu₂S, CuSe, ein Kupferphosphid,
 Ag₂S, Ag₂Se, AgJ, eine Arsenverbindung,
 PbO, PbS,
 TlS,

von denen indes nur ein Teil zur Untersuchung kam.

Die Metallzerstäubung erfolgte in der üblichen Weise auf Glas oder Glimmer. Die Spiegel wurden dann in geeignete Form zerschnitten und einzeln in ein Probierglas mit einer geringen Menge des Metalloids zusammengebracht. Dann wurde das Gefäß evakuiert. Beim Jodieren erfolgte dann die Verbindung sofort. Will man die Schwefel-, Selen- etc. Verbindungen erzielen, so erwärmt man vorsichtig, um den Dampfdruck zu steigern. Da bei den hochsiedenden Substanzen der Dampfdruck stets gering bleibt, wenn man eine Wiederzersetzung der Verbindung durch Überhitzen vermeiden will, so ist es wichtig, die Wirkung der Diffusion durch weitgetriebene Evakuierung tunlichst zu unterstützen. Beim Oxydieren wurde direkt an der Luft geröstet.

Die so erhaltenen Präparate dürfen unter dem Mikroskop keinerlei Trübung oder Ungleichmäßigkeit zeigen. Sie machen den Eindruck absolut kohärenter Schichten, der auch durch ihr elektrisches Verhalten gerechtfertigt wird, und zeigen je nach ihrer Dicke heller oder dunkler, die der Verbindung eigentümliche Farbe.

Eine gewisse Schwierigkeit lag in der für absolute Leitfähigkeitsmessungen erforderlichen Dickenbestimmung. Da die optischen Methoden bei stark absorbierenden Substanzen recht unbequem sind, wählte ich die Methode der Wägung und zwar unter Benutzung einer Mikrowage. Das Instrument, das nach Nernsts Vorgang die Torsion eines Quarzfadens benutzt und

eventuell an anderer Stelle beschrieben werden soll, konnte bequem auf eine Empfindlichkeit von 2 cm Ausschlag pro 0,1 mg gebracht werden. Ich benutzte schließlich dauernd einen Faden, der etwa ein Drittel davon gab (0,77 cm pro 0,1 mg) wegen der besseren Nullage. Das Verfahren war folgendes: ein etwa 1 cm² großes Stück der auf einem dünnen Glimmerblatt hergestellten Schicht, meist direkt das vorher zur Widerstandsbestimmung benutzte, wurde mit seiner Unterlage mit Hilfe dünnen Aluminiumdrahtes tariert und die genaue Wageneinstellung abgelesen. Dann wurde die Schicht in einem geeigneten Lösungsmittel abgelöst, für die Jodide und Sulfide in Cyankalilösung, für die Oxyde in verdünnter Salzsäure und das leere Glimmerblättchen nach sorgfältiger Trocknung wieder gewogen. Eine Schicht z. B. von Ag₂S, spez. Gew. 7,25, von 2 μ Dicke und 1 cm² Fläche, würde 1,45 Tausendstel Milligramm wiegen, und bei der gewählten Empfindlichkeit gerade noch etwas mehr als $\frac{1}{10}$ mm Ausschlag geben. Dies ist der Betrag, um den sich die Nullage bei sorgfältigem Arbeiten höchstens verschieben darf. Anhaftende noch gut sichtbare Stäubchen, die natürlich vermieden werden, wiegen weniger; auch zeigten blinde Versuche, daß ein Glimmerblättchen ohne Schicht, mit dem sämtliche Operationen durchgeführt wurden, keine Gewichtsverluste oder Zunahmen zeigte, die diesen Betrag überschreiten. Dies Verfahren der Dickenbestimmung, das noch verbesserungsfähig ist, hat bei dem Vorteile seiner Einfachheit und allgemeinen Anwendbarkeit folgende Nachteile:

1. die Schicht wird bei der Dickenbestimmung zerstört,
2. die Kenntnis des spezifischen Gewichtes des Schichtmaterials ist erforderlich, d. h. die Leitfähigkeitsmessung erscheint eigentlich nicht auf den Querschnitt 1 bezogen, sondern auf die Gewichtseinheit,

3. es ist die Benutzung sehr leichter Unterlagen nötig, da sonst die Empfindlichkeit und besonders die Sicherheit der Nullage zu sehr herabgesetzt wird. Nur Glimmer ist brauchbar, in der Stärke von ca. $\frac{1}{100}$ mm. Da jedoch dieser Stoff durch hohe Isolation leichte Teilbarkeit und bei frischer Herstellung durch absolute Sauberkeit sich sonst sehr empfiehlt, kompensiert sich der Nachteil der Unbequemlichkeit.

Sehr zu statten kam dagegen die Möglichkeit der quantitativen Analyse der Schicht, welche zu erkennen gestattet, ob die Verbindung vollständig erfolgt, und welche, wenn es sich um mehrere Oxydationsstufen handelt, deren Unterscheidung ermöglicht.

Zur elektrischen Untersuchung werden die Präparate in Klammern wie Fig. 1 gefaßt. Um gute Kontakte zu erhalten,

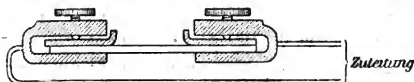


Fig. 1.

mußten von Fall zu Fall verschiedene Mittel angewandt werden: Stanniol, Silberfolie, unter der Schicht eingebranntes Platin, darüber zerstäubtes Silber oder auch eine bloße Verstärkung der Schicht an den Enden. Um die Übergangswiderstände zu erkennen, und zu eliminieren, wurde die Schicht gelegentlich in Streifen wie Fig. 2a geteilt; erst wurde der Widerstand beider (parallel), dann nach Wegwischen des einen der eines einzelnen gemessen, noch besser, aber

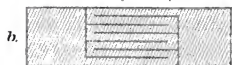


Fig. 2.

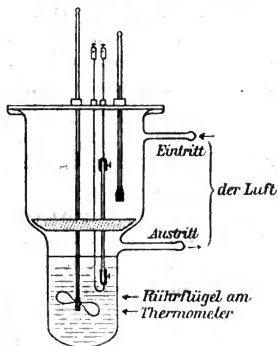


Fig. 3.

für die Dimensionsbestimmungen ungünstiger ist es, den Schichten die Gestalt Fig. 2b zu geben, bei der der Streifenwiderstand groß wird gegen den Übergangs- und Ausbreitungswiderstand an den beiden Enden. Die Zuleitungsdrähte werden, um die Kontakte unverrückt zu erhalten, an eine Siegellack-

stange angeschmolzen. Die Widerstandsmessungen erfolgten beinahe ausschließlich in der Wheatstoneschen Brücke, gelegentlich mit Wechselstrom.

Zur Untersuchung der Thermokraft wurde ein Glasgefäß wie Fig. 3 hergestellt. Im unteren Raume konnte Paraffinöl bis auf 200° erwärmt werden; der obere, der durch eine Holzplatte vom unteren getrennt ist, wird durch einen durchgetriebenen Luftstrom dauernd auf Zimmertemperatur erhalten. Den Präparaten wurde hierbei eine Länge von 8—9 cm gegeben, so daß die Kontaktstellen sich wirklich in Gebieten konstanter Temperatur befanden.

Eine Kontrolle der Zuverlässigkeit der Methode würde in der Bestimmung der elektrischen Eigenschaften eines reinen Metalles liegen. Nun zeigen reine Metalle in dünnen Schichten (selbst über $100\text{--}200\ \mu\mu$; vgl. p. 761) einen meist nicht unerheblich höheren spezifischen Widerstand als in kompakten Massen.¹⁾ Nach den bisherigen Resultaten ist es aber wohl durchaus nicht ausgeschlossen, daß man bei geeigneter Präparation der Schichten auch normale Werte erhalten kann. Beim Silber, wo mehrere Bestimmungen vorliegen, ist öfters die Anwesenheit einer schlecht, oder kaum leitenden, gewöhnlich als kolloidal bezeichneten, Modifikation konstatiert.²⁾ Beim Kupfer, wo ich selbst einige Messungen mit dem gleichen Resultat anstellte, ist es schwer, das sehr schlecht leitende Oxyd als Verunreinigung auszuschließen. Schließlich zeigen alle kathodisch niedergeschlagenen Metalle Spannungen, zum Teil erkennbar an Doppelbrechung, die auf die Elektrizitätsleitung einen verschlechternden Einfluß haben können. — Thermoelektrische Kräfte an Spiegelmetallen sind wohl noch nicht untersucht worden.

Spezielle Resultate.

Unter den wenigen von mir untersuchten elektrolytischen Leitern verdienen das CuJ und das Ag_2S wegen ihrer merkwürdigen Eigenschaften besonderes Interesse.

1) Vincent, *Ann. de Chim. et Phys.* (7) 19. p. 421. 1900;
J. Patterson, *Phil. Mag.* (4) 4. p. 652. 1902.

2) C. Grimm, *Ann. d. Phys.* 5. p. 448; 1901.

CuJ ist ein farbloser Körper, von dem man aus guten Kupferspiegeln ohne Schwierigkeit schöne klare Präparate erhält, die eine gute Elektrizitätsleitung zeigen. Es wurde mit Wechselstrom gemessen. Eine Schicht, die pro cm^2 0,107 mg wog, also bei einer Dichte von 5,6 (Landolt und Börnstein) $191 \mu\mu$ dick sein mußte und 1,35 cm lang, 0,86 cm breit war, hatte bei 18° 3760 Ohm. Es berechnet sich ein spezifischer Widerstand von $4,56 \cdot 10^{-2}$. Im ganzen wurden vier Bestimmungen gemacht.

Dicke	σ
191 $\mu\mu$	$4,56 \cdot 10^{-2}$
296	$6,1 \cdot 10^{-2}$
224	$5,2 \cdot 10^{-2}$
251	$4,6 \cdot 10^{-2}$

Es stellte sich heraus, daß bei längerem Lagern und besonders bei gelindem Erwärmen (80 — 100°) die Schichten trüb wurden, und sehr viel höhere Widerstände annahmen. Aus diesem Grunde möchte ich die niedrigsten Widerstandswerte als die besten ansehen, und etwa $4,5 \cdot 10^{-2}$ oder einen noch etwas kleineren Wert für richtig halten. Beim Durchleiten von Gleichstrom bildeten sich am negativen Pole innerhalb der Schicht mikroskopische moosartige Auswüchse, die schnell nach dem positiven Pole hinwuchsen, eine Erscheinung, die wohl nur als Elektrolyse gedeutet werden kann.

Der spezifische Widerstand bestleitender Schwefelsäure ist 1,35. CuJ hat also nur den 30. Teil davon, ein für einen reinen Stoff bisher einzig dastehender Wert. Berechnet man unter der (unwahrscheinlichen) Annahme, daß sämtliche Moleküle elektrolytisch dissoziiert seien, die Summe der absoluten Ionenwanderungsgeschwindigkeiten nach bekannten Prinzipien, so erhält man $7,8 \cdot 10^{-3}$. Für das leichtbewegliche Wasserstoffion in wässriger Lösung wird nur etwa die Hälfte dieses Wertes angegeben.¹⁾ Will man also nicht gemischte Leitung zulassen, so muß man eine für einen festen Körper ganz merkwürdig geringe Ionenreibung annehmen.

Wegen der erwähnten leichten Zersetzlichkeit des Präparates in der Wärme wurde der Temperaturkoeffizient nur

1) R. Luther in Winkelmanns Handbuch 2. Aufl. 4. p. 400.

zwischen Zimmertemperatur und -76° (Kohlensäure-Äthermischung) bestimmt. Es fand sich

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dt} = + 0,00182.$$

Ein anderer Versuch ergab $+0,00176$. In der Kälte ist also die Leitung noch ganz erheblich besser. Dieses auch für feste Elektrolyte einzige Verhalten wird man wohl am ehesten durch Dissoziationsabnahme mit steigender Temperatur erklären wollen. Versuche in flüssiger Luft stehen noch aus.

Ag₂S und Ag₂Se.

Eine Substanz, die schon Faraday durch ihr merkwürdiges elektrisches Verhalten in Erstaunen setzte, ist das Schwefelsilber. Es durchläuft, wie von Hittorf und später von Streintz konstatiert wurde, zwischen der Temperatur der flüssigen Luft und $+200^{\circ}$ alle Stadien von fast völliger Isolation bis zu einer Leitfähigkeit, die der der Gaskohle nahe kommt. Während bei Zimmertemperatur Polarisierung und Zersetzung an den Elektroden merklich war, ergab bei 220° mehrstündige Durchleitung von 1 Amp. nicht die Spur einer Abscheidung. Bei 175° fand ein stärkerer Sprung der Leitfähigkeit statt, entsprechend einem Umwandlungspunkt, der von Bellati und Lussana¹⁾ auch kalorimetrisch wiedergefunden wurde. Meine Präparate waren in der Durchsicht kaffeebraun, bei stärkerer Erwärmung trat plötzlich eine Verfärbung nach rotbraun ein, die unter dem Mikroskop deutlich als Modifikationsänderung erkennbar war, da sie unstetig mit scharfer Grenze erfolgte. Sie tritt zweifellos beim Umwandlungspunkt 175° ein. Unterhalb dieser Temperatur war der Widerstand zu groß für Wechselstrommessung, darüber sank er plötzlich so stark, daß die Messung keine Schwierigkeiten machte. Ich erhielt

Dicke	σ
60 μ	$1,8 \cdot 10^{-3}$
59	$1,6 \cdot 10^{-3}$

Wegen des später zu besprechenden Einflusses der Schichtdicke auf den spezifischen Widerstand wird der für kompakte Massen

1) M. Bellati u. S. Lussana, Atti Ist. Veneto (6) 7. p. 1051. 1889.

gültige Wert noch kleiner sein. Die Umwandlung erfolgte im Luftbad reversibel, so daß der Sprung durch Wiederabkühlen und Erwärmen mehrmals beobachtet werden konnte. Die Schicht bleibt dabei unverändert. Mit den besprochenen Erscheinungen erscheint die Annahme verträglich, daß beim Umwandlungspunkt ein Sprung von elektrolytischer in metallische Leitung eintritt. Um sie zu beweisen, stellte ich folgenden Versuch an. Eine Schicht wurde über zwei eingebrannten Platinelektroden hergestellt (Fig. 4). Auf die eine Hälfte wurde

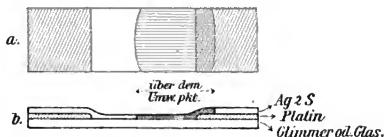


Fig. 4. Über eingebrannten Platinelektroden niedergeschlagene Ag_2S -Schicht: *a* von oben, *b* im schematischen Querschnitt.

ein heißer Luftstrahl gerichtet, so daß dort Verwandlung in die rotbraune Modifikation eintrat, und der Strom durch die Grenze der beiden Modifikationen treten mußte. Schon bei 8 bis 12 Volt konnte dann ein Strom von ca. 10^{-6} Amp. erhalten werden. In der Tat trat nun an der Grenze, wenn sie zum positiven Pol gemacht war, dieselbe Erscheinung ein, wie bei kaltem Präparat an der entsprechenden Platinelektrode: nämlich Bildung eines immer dünner werdenden Randes mit darin verteilten Körnchen (von Schwefel?). Die bäumchenförmige Silberabscheidung am negativen Pol konnte indes an der Grenze noch nicht erhalten werden, weil in diesem Fall der Strom immer zu bald abriß. Auch bei kaltem Präparat konnte ich sie noch nicht immer gleichmäßig erhalten.

Dem Schwefelsilber chemisch und kristallographisch nahe steht das Selen Silber, über das elektrische Daten durch Hittorf und Bellati und Lussana bekannt sind. Sie fanden einen Umwandlungspunkt bei 133° , der von Bellati und Lussana auch kalorimetrisch wieder gefunden wurde. Die elektrischen Erscheinungen verliefen nicht ganz reversibel. Ich erhielt die Präparate etwas schwieriger als bei Ag_2S . Über dem Ag_2Se schlug sich immer noch eine klare Schicht amorphen Selen

von schön roter Farbe nieder, welche erst in Schwefelkohlenstoff zu beseitigen war. Dabei bildeten sich vielleicht Spuren von Ag_2S . Temperaturen von mehr als 150° durften die Schichten nicht ausgesetzt werden, da bei dieser Temperatur auch in Gegenwart von freiem Selen die Substanz zerfällt; die Dissoziationsspannung des Selens aus Ag_2Se scheint also größer zu werden als seine Dampfspannung. Der Umwandlungspunkt charakterisiert sich durch plötzliches Dunklerwerden der an sich schwarzbraunen Farbe, mit denselben Erscheinungen wie bei Ag_2S .

Der spezifische Widerstand wurde noch nicht bestimmt. Er wird wahrscheinlich geringer sein als der der rotbraunen Modifikation des Schwefelsilbers. Der Temperaturkoeffizient zwischen $+18^\circ$ und -76° ergab sich zu $+0,00082$, während beim Erwärmen auf ca. 100° der Widerstand abzunehmen schien. Bei der Umwandlung, die im Luftbad (nicht in Öl) beliebig oft wiederholt werden konnte, ergab sich ein Sprung des Widerstandes auf den doppelten Wert. Die Temperatur im Luftbad konnte nicht genau festgelegt werden. Ich erhielt an einem Präparat folgende Reihe:

Zimmertemperatur	198 Ohm
Wenig unter der Umwandlungstemperatur	145 „
Etwas darüber	335 „
Zimmertemperatur	178 „
Wenig unter der Umwandlungstemperatur	134 „
Unmittelbar darüber	300 „
Bei noch höherer Temperatur	344 „
Zimmertemperatur	171 „

Diese Resultate sind indes noch verbesserungsbedürftig. Sowohl über wie unter 133° ist die Leitung metallisch zum Unterschied von Ag_2S , obwohl wahrscheinlich die beiden Umwandlungen einander analog sind.

CuS , Cu_2O , CuO .

Unter den metallischen Leitern widmete ich dem Schwefelkupfer besondere Aufmerksamkeit. Dieser Körper ist auf nassem Wege oder durch Schmelzung nicht rein darstellbar, weil er immer zum Teil in Cu_2S und Schwefel zerfällt. Streintz fand für ein aus gepreßtem Niederschlag hergestelltes Stäbchen den spezifischen Widerstand $5 \cdot 10^{-4}$.

Durch Schwefeln von Kupferspiegeln wurden ohne Mühe schöne dunkelgrasgrüne Schichten erhalten, durchlässig für Licht von etwa 490 bis 640 $\mu\mu$. Die Zusammensetzung als CuS ergab die Mikrowage. In der Tat wird beim Schwefeln auch vorübergehend das orangebraune Cu_2S erhalten, dessen quantitative Herstellung aber nur im Schwefelwasserstoffstrom gelang. Den spezifischen Widerstand bei verschiedenen Schichtdicken zeigt die ausgezogene Kurve von Fig. 5. Für die Be-

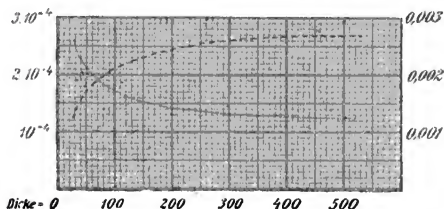


Fig. 5.

rechnung der Dicke wurde die Dichte gleich 4,0 gesetzt. Die Streuung der durch Punkte vermerkten Beobachtungswerte ist bei kleinen Dicken ziemlich groß, zum Teil dadurch, daß diese Bestimmungen die ersten mit der Mikrowage ausgeführten waren. Doch ist das den Metallen charakteristische Ansteigen des Widerstandes bei dünner werdender Schicht noch sehr deutlich zu bemerken. Über etwa 200 $\mu\mu$ wird der Widerstand merklich konstant und konvergiert gegen $1,25 \cdot 10^{-4}$ bei Zimmertemperatur. Dieser Wert liegt schon sehr nahe dem Widerstand der reinen Wismuts ($1,2 \cdot 10^{-4}$).

Der beste Beweis für die metallische Natur der Elektrizitätsleitung in CuS wäre vielleicht die Bestimmung des Verhältnisses zur Wärmeleitfähigkeit. Ch. H. Lees¹⁾ gibt für die Wärmeleitung des CuS in cal/cm $\lambda = 0,014$. Das Verhältnis κ/λ würde danach $5,7 \cdot 10^5$, während Kohlrauschs Lehrbuch 10. Aufl. p. 211 ungefähr $6 \cdot 10^5$ als Mittel für die

1) Ch. H. Lees, Proc. Manch. Phil. Soc. 42. 4 pp. 1898, entnommen aus Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl. 3. p. 493.

Metalle anführt. Diese schöne Übereinstimmung wird leider unsicher gemacht durch einen von A. Weber¹⁾ angegebenen Wert der Wärmeleitung des Schwefelkupfers, der nur 0,00196 beträgt, also von der Größenordnung der für durchsichtige Salze bekannten Werte ist.

Der Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstandes zeigte gleichfalls das den Metallen eigentümliche Verhalten, mit sinkender Schichtdicke abzunehmen, und zwar scheint er in noch höherem Maße von der Schichtdicke abhängig zu sein als der Widerstand selbst. Um zuverlässige Werte zu erhalten, wurde das untersuchte Präparat in häufigem Wechsel in ein warmes und ein auf Zimmertemperatur erhaltenes Ölbad getaucht. Etwaige Alterung oder Änderung der Kontaktwiderstände, die beinahe unvermeidlich und hier besonders störend sind, selbst wenn sie nur geringe Beträge erreichen, werden so leicht eliminiert. Als Grenzwert für dicke Schichten erhielt ich

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dt} = + 0,0027$$

welcher Wert zwischen -76° und $+80^\circ$ nicht variiert. Es ist bemerkenswert, daß dieser Wert nicht mehr weit vom Temperaturkoeffizienten der reinen Metalle liegt.

Die Bestimmung der thermoelektrischen Kraft gegen Kupfer ergab

zwischen 20 und 49,5°	6,88 Mikrovolt/Grad,
„ 20 „ 100	7,83 „ „

und zwar lud sich an der heißen Lötstelle das Kupfer positiv. Das benutzte käufliche Kupfer wurde nachträglich mit Feinsilber thermoelektrisch verglichen. Es gab (wie reines Kupfer) eine so kleine thermoelektrische Kraft, daß die genannten Werte als innerhalb der Fehlergrenzen auch gegen Feinsilber gültig angesehen werden können.

CuSe, gelegentlich untersucht, zeigte eine wahrscheinlich das CuS noch übertreffende Leitfähigkeit. Genauere Daten sind aus dem bei Ag₂Se angeführten Gründen noch nicht angebbar.

1) A. Weber, Diss. München 1900.

Die beiden Oxyde des Kupfers können leicht durch vorsichtiges Rösten nicht zu dicker Kupferspiegel an der Luft erhalten werden. Bei gelindem Erwärmen entsteht das honiggelbe Cu_2O , bei stärkerem das braune CuO . Die Analyse auf der Mikrowage ergab das Verhältnis

	$2\text{Cu} : \text{Cu}_2\text{O} : 2\text{CuO}$		
zu	1,00	1,12	1,24
statt	1,00	1,123	1,25

also zufällig beinahe richtig.

Leider sind beide Stoffe so spröde, daß es noch nicht gelang, eine völlig glatte Schicht herzustellen, da immer kleine Schüppchen abspringen. Der Rest bleibt kohärent genug, um eine eindeutige Leitung ohne Kohärereffekt zu zeigen. Trotzdem können die Widerstandswerte nur als obere Grenzwerte angesehen werden. Bei 25° fand ich als Mittel mehrerer Bestimmungen bei einer Dicke von 40 bis $100\ \mu\mu$ für Cu_2O etwa $0,4 \cdot 10^3$. CuO muß etwa den zehnfachen Wert haben. Keine Schwierigkeiten machte dagegen die Bestimmung der Temperaturkoeffizienten, da die Leitfähigkeitsänderung vollkommen reversibel verlief.

	Cu_2O .		CuO (dickeres Präparat).
21,8°	$1,0034 \cdot 10^3\ \text{Ohm}$	19,5°	$2,231 \cdot 10^3\ \text{Ohm}$
37,1	0,6574 „ „	36,6	1,555 „ „
55,1	0,417 „ „	65,3	0,9054 „ „
76,7	0,260 „ „	98,0	0,5724 „ „
105,5	0,1543 „ „		

Diese enorme Leitfähigkeitszunahme war für CuO schon von Horton konstatiert. Königsberger berechnete daraus die Koeffizienten seiner Gleichung (vgl. p. 749) und fand $q = 5600$ $\alpha = 0,003$. Für Cu_2O finde ich q etwa gleich 2500.

In den verschiedenen Formeln, welche auf Grund der Elektronentheorie der metallischen Leitung für die thermoelektrische Kraft aufgestellt worden sind¹⁾, spielt stets der Koeffizient $\lg(N_1/N_2)$ eine bedeutende Rolle, worin N_1 und N_2 die Elektronenzahlen pro ccm in den beiden sich berührenden Leitern darstellen. Nach J. Königsberger würde nun diese

1) H. A. Lorentz, Ergebnisse und Probleme der Elektronentheorie 1905. p. 59; P. Drude, Ann. d. Phys. 1. p. 594. Gleichung (66). 1900.

Elektronenkonzentration mit steigender Temperatur bei Cu_2O stark, bei Pt wenig oder gar nicht zunehmen, so daß der genannte Ausdruck für die Kombination Cu_2O -Pt stark von der Temperatur abhängig wäre. Es wäre also auch eine von der Temperatur ziemlich abhängige Thermokraft des Elements Cu_2O -Pt vorausszusehen. Diese Erwartung bestätigt sich nicht recht. Es wurden nämlich (elektrometrisch)

zwischen 20° und 120° 480 Mikrovolt/Grad,

„ 120° „ 220° 520 „ „

gefunden; das Pt lud sich an der heißen Lötstelle negativ gegen Cu_2O . — Bemerkenswert ist die Größe der Thermokraft: 5mal so groß wie die Kombination Bi-Sb.

CdO.

Für das Kadmiumoxyd hatte Streintz eine ziemlich große Leitfähigkeit und kleinen Temperaturkoeffizienten gefunden. Hauptsächlich aus dem praktischen Grunde, daß sich diese Substanz vielleicht in Form dünner Schichten als Widerstandsmaterial eignen könnte, wurde sie auch noch untersucht. Während es schwierig war, aus Kadmium durch Zerstäubung kohärente spiegelnde Schichten herzustellen, fand die Verwandlung ins Oxyd leicht statt. Seine Farbe ist orangegelb, in der Hitze braun, doch ist der Übergang stetig, ein Analogon zum in der Hitze gelb werdenden Zinkoxyd nicht zum Ag_2S (vgl. oben p. 758). Den spezifischen Widerstand bestimmte ich 4mal.

Dicke	spez. Widerstand
106 $\mu\mu$	$1,28 \cdot 10^{-3}$
123	1,18 „
160	1,15 „
205	1,29 „

Bei Berechnung der Dicke liegt der Wert 8,15 für die Dichte zugrunde. Als Mittel wird $1,20 \cdot 10^{-3}$ verhältnismäßig richtig sein. Streintz' Angabe ist $5,5 \cdot 10^{-3}$, hier wie in allen vergleichbaren Fällen mehrmals größer als meine Messung. Der Temperaturkoeffizient eines guten Präparates war

zwischen 18° und 100° + 0,000978,

„ 18° „ -76° + 0,00094,

entfernt sich also vom Temperaturkoeffizienten der Metalle schon mehr als das weit besser leitende CuS.

Die Thermokraft gegen Kupfer (oder Feinsilber vgl. p. 762)

zwischen	20° und 100°	30,0 Mikrovolt/Grad,
„	100° „ 180°	40,0 „

und zwar lud sich das Kupfer an der heißen Lötstelle negativ gegen das CdO.

CdS und CdSe sind schlechte Leiter der Elektrizität.

Zusammenfassung.

Im vorstehenden ist eine Methode angegeben, Schwermetallverbindungen in eine für elektrische Untersuchungen geeignete Form zu bringen. Die durch Metallzerstäubung und nachherige Umwandlung erhaltenen dünnen Schichten der Verbindungen erwiesen sich als kohärent, vielleicht im höchsten erreichbaren Grade. Die Messung ihrer Dicke durch Wägung mit der Mikrowage dürfte bei dickeren Schichten (über 100 $\mu\mu$) an die Genauigkeit der optischen Methoden heranreichen und bis zu wenigen $\mu\mu$ herab verwendbar sein.

Die gemessenen spezifischen Widerstände sind mit einigen Vergleichszahlen in folgender Tabelle vereinigt (absolute Werte bei Zimmertemperatur).

Metallische Leiter		Elektrolytische Leiter	
Cu	0,0000017	CuJ	0,045
Pt	0,000014	30 Proz. H ₂ SO ₄	1,35
Bi	0,00012		
CuS	0,000125		
PbO ₂	0,00023(?)		
CdO	0,0012		
Ag ₂ S (bei 200°) . .	0,0017		
Graphit	0,0028		
Cu ₂ O	40		
CuO	400(?)		

Der Temperaturkoeffizient des besten aufgefundenen Leiters CuS, sowie wahrscheinlich sein Leitverhältnis kommen dem Durchschnittswert der reinen Metalle nahe.

Das Silbersulfid springt wahrscheinlich bei dem bei 175° liegenden Umwandlungspunkt von elektrolytischer zu metallischer Leitung über. Das Silberselenid leitet unter und über seinen Umwandlungspunkt (133°) metallisch.

Im CuJ wurde ein Fall abnorm hoher elektrolytischer Leitung aufgefunden.

Die thermoelektrischen Kräfte einiger metallisch leitender Verbindungen gegen Kupfer wurden zwischen 20 und 200° gemessen. Die Resultate zwischen 0 und 100°, mit einigen bekannten Werten (aus Kohlrauschs Lehrbuch 10. Auflage) zusammengestellt, waren:

Pt—PtRh	5	Mikrovolt/Grad	
Cu—CuS	7,33	„	„
CdO—Cu	30	„	„
Bi—Sb	100	„	„
Cu ₂ O—Pt	480	„	„

Diese Arbeit wurde als Habilitationsschrift für die Universität Jena im theoretisch-physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt. Hrn. Prof. Th. Des Coudres, der mir die Mittel dieses Instituts zu unbeschränkter Verfügung stellte, bin ich dafür zu aufrichtigem Dank verpflichtet, ebenso Hrn. Prof. O. Wiener für die Überlassung einiger Apparate aus der Sammlung des Instituts für Experimentalphysik.

(Eingegangen 8. Februar 1907.)

9. *Weiteres*
zur Theorie der fallenden Tropfen, nebst einem
Rückblick auf ältere theoretische Versuche;
von Theodor Lohnstein.

I.

In meiner zweiten Mitteilung¹⁾ zur Theorie des Abtropfens hatte ich zur Berechnung der Größe fallender Tropfen eine Tabelle gegeben, welche, wie sich durch Vergleichung meiner eigenen Rechnungen mit älteren Rechnungen von Bashforth und Adams herausstellte, noch verbesserungsbedürftig war. Infolge der etwas unzweckmäßigen Wahl des diesen Tafeln zugrunde liegenden Parameters läßt sich mit ihrer Hilfe die Verbesserung unserer Tabelle nur für einen Teil des Wertbereiches ihres Argumentes durchführen; aber da gerade hier wegen der Größe des zugehörigen Tropfenrestes schon mäßige Ungenauigkeiten in den Einzelkurven einen erheblichen Einfluß auf das Endresultat ausüben, so scheint mir durch diese teilweise Neuberechnung eine nicht unerhebliche Verbesserung der Tabelle erzielt zu sein. Ausschließlich mit den Bashforth-Adamsschen Tafeln konnte nur der Bezirk von

$$\frac{r}{a} = 1,1 \quad \text{bis} \quad \frac{r}{a} = 1,4$$

berechnet werden; für die Strecken von

$$\frac{r}{a} = 0,8 \quad \text{bis} \quad \frac{r}{a} = 1,0,$$

sowie von

$$\frac{r}{a} = 1,5 \quad \text{bis} \quad \frac{r}{a} = 2,0,$$

wurden unsere durch planmäßige Berücksichtigung der dritten Potenz der Taylorschen Entwicklung verbesserten Tabellen mit den genannten Tafeln kombiniert verwendet. In dieser Weise ist die nachfolgende Tabelle zustande gekommen, wobei

1) Th. Lohnstein, Ann. d. Phys. 20. p. 607. 1906.

wir wegen der benutzten Bezeichnungen auf unsere früheren Publikationen verweisen.

Tabelle 1.

$\frac{r}{a}$	V_m	$\bar{V}_m$	$V_m - \bar{V}_m = f\left(\frac{r}{a}\right)$
0	1	0	1
0,1	0,812	0,007	0,805
0,2	0,769	0,028	0,741
0,3	0,758	0,050	0,708
0,4	0,769	0,090	0,679
0,5	0,785	0,128	0,657
0,6	0,807	0,164	0,643
0,7	0,835	0,198	0,637
0,8	0,864	0,230	0,634
0,9	0,898	0,271	0,627
1,0	0,925	0,317	0,608
1,1	0,952	0,355	0,597
1,2	0,977	0,366	0,611
1,3	1,000	0,374	0,626
1,4	1,019	0,401	0,618
1,5	1,034	0,401	0,633
1,6	1,044	0,388	0,656
1,7	1,042	0,362	0,680
1,8	1,034	0,340	0,694
1,9	1,027	0,338	0,689
2,0	1,017	0,322	0,695

Der zu $r/a > 2,0$ gehörige Schlußteil der Tabelle, der für die praktische Physik von geringerer Bedeutung ist, findet sich bereits in unserer vorigen Mitteilung.¹⁾

Die für die Anwendung in erster Linie interessierende Funktion $f(r/a)$ hat, wie man sieht, auch jetzt bei $r/a = 1,1$ ein Minimum, dessen Wert 0,597 noch etwas kleiner als der früher erhaltene 0,603 ist. Außerdem zeigt die Tabelle je eine flache Undulation innerhalb der Strecken von 1,2 bis 1,5 und von 1,7 bis 2,0. Daß darin keine analytische Unwahrscheinlichkeit liegt, haben wir bereits früher auseinandergesetzt.²⁾

1) Th. Lohnstein, Ann. d. Phys. 21. p. 1045. 1906.

2) l. c. p. 1033.

Ein besonders auffälliges Verhalten zeigt der Quotient $\bar{V}_m/f$, der von $r/a = 1,0$ bis $1,1$ von $0,52$ auf $0,595$ steigt, darauf von $r/a = 1,1$ bis $r/a = 1,3$ ziemlich konstant gleich $0,6$ ist, dann bei $1,4$ noch auf $0,65$ ansteigt, um von da ab wieder ganz allmählich abzufallen. Diese theoretisch abgeleitete Folgerung wird durch die Erfahrung hinlänglich bestätigt; denn die in unserer zweiten Abhandlung¹⁾ berechneten Versuche von J. Traube, deren erneute Berechnung auf Grund der verbesserten Tabelle kein wesentlich verändertes Resultat ergeben würde und daher wohl unterbleiben kann, liefern in dem Intervall des Argumentes r/a von $1,0$ bis $1,4$ experimentell für das Verhältnis $\bar{V}_m/f$ Werte zwischen $0,51$ und $0,64$. Für größere r/a sind bisher direkte Bestimmungen des Verhältnisses $\bar{V}_m/f$ von niemandem ausgeführt worden.

II.

Mit einigen Worten wollen wir noch auf die in der vorigen Abhandlung eingehend besprochenen Versuche von Lord Rayleigh zurückkommen. Mit Hilfe unserer neuen Tabelle ergeben zunächst die 14 Röhrenversuche²⁾ folgende Werte für die Kapillaritätskonstante des Wassers: $7,49; 7,35; 7,28; 7,39; 7,18; 7,54; 7,14; 7,27; 7,24; 7,05; 6,81; 7,01; 7,10; 7,26$ mg/mm. Die sieben ersten Versuche an Tropfplatten, welche nach den Auseinandersetzungen unserer vorigen Arbeit hier nur in Betracht kommen, führen der Reihe nach zu den Zahlen $\alpha = 7,29; 7,34; 6,95; 6,87; 7,04; 6,93; 7,05$ mg/mm. Die letzteren Werte sind etwas kleiner als die sonst von guten Autoren für reines Wasser gefundenen. Woran das liegt, läßt sich nicht weiter untersuchen, da Lord Rayleigh über die Einzelheiten seiner Versuchsanordnung Näheres nicht mitgeteilt hat.

Im ganzen sind das 21 Versuche; aber Lord Rayleigh und Hr. F. Kohlrausch haben nur die Röhrenversuche und von diesen nur sechs bez. acht zur Berechnung ihres Faktors $\Phi = 2\pi f(r/a)$ herangezogen, wobei für α der Wert $7,5$

1) Th. Lohnstein, Ann. d. Phys. 20. p. 610—612. 1906.

2) Durch ein Versehen ist in der vorigen Abhandlung das Ergebnis des neunten Versuches fortgelassen worden; die frühere Tabelle führte hier zu $\alpha = 7,30$.

zugrunde gelegt war. Nur durch diese Auswahl erklärt es sich, daß ihr Φ einen regelmäßigeren Gang zeigt als unser $f(r/a)$; wäre die Tabelle der Φ aus Lord Rayleighs sämtlichen Versuchen aufgebaut worden, so würde auch sie bedenkliche Schwankungen aufweisen, wie man erkennt, wenn man z. B. die beiden Versuchspaare mit wenig verschiedenen Durchmessern — $r = 5,83$ und $5,90$ mm einerseits, $r = 6,62$ und $6,64$ mm andererseits — betrachtet, die zu nicht unbeträchtlichen Diskontinuitäten im Werte von Φ führen, welchen Wert für α man auch der Berechnung unterlegt. Lord Rayleigh hat von diesen beiden Versuchspaaren nur je einen Versuch für die Tabelle verwertet, und man sieht somit, daß die größere Regelmäßigkeit seiner empirisch gewonnenen Tabelle nur eine scheinbare ist.

Die in Lord Rayleighs Versuchen hervortretende alte Erfahrung, daß die zugänglichste aller Flüssigkeiten für messende Versuche auf dem Gebiet der Kapillarität kein besonderes denkbare Objekt abgibt, zeigt sich auch in Versuchen, die mehr als 30 Jahre vorher von A. und P. Dupré angestellt wurden.¹⁾ Diese Forscher ermittelten die Tropfengewichte des Wassers an Röhren folgender äußeren Durchmesser:

$$2r = 0,2; 0,52; 1,15; 2,15; 2,252; 3,04; 4,06; 4,445; \\ 5,12; 10,435 \text{ mm};$$

die zugehörigen Gewichte waren der Reihe nach

4,25; 12,4; 21,9; 35,1; 40,8; 50,0; 65,0; 70,0; 76,5; 85,6 mg.

Diese Versuche ergeben, nach unserer Theorie berechnet, bis auf den zweiten und den letzten wahrscheinliche Werte für die Kapillaritätskonstante. Man findet

$$7,41; —; 7,81; 7,27; 8,07; 7,66; 7,78; 7,74; 7,44; —.$$

Der zweite und der letzte Versuch sind dabei durch Striche angedeutet; ersterer führt zu einem zu großen, letzterer zu einem erheblich zu kleinen Werte für α . Daß speziell in dem letzten Fall ein grober Versuchs- oder Protokollierungsfehler vorliegen muß, sieht man, wenn man den achten Röhrenversuch Lord Rayleighs, der etwa dem gleichen Durchmesser entspricht, zum Vergleich heranzieht.

1) A. Dupré, *Théorie mécanique de la chaleur* p. 329. 1869.

III.

Hr. J. Traube hatte die Freundlichkeit, mich auf weiteres Versuchsmaterial hinzuweisen, das sich für einen bestimmten Wertbereich des Argumentes r/a recht gut zur Prüfung unserer Theorie eignet.¹⁾ Es handelt sich um eine Untersuchung der Herren Ph. A. Guye und F. Louis Perrot, die in sehr eingehender Weise für eine Reihe organischer Flüssigkeiten die Tropfengröße bestimmten²⁾; ihre Arbeit ist dadurch bemerkenswert, daß sie nach und neben der bekannten Publikation von J. Traube die einzige ist, in der auch der Tropfenrest experimentell ermittelt wurde. Während dies bei Traube indirekt durch Zeitvergleichung geschah, erreichen Guye und Perrot ihren Zweck durch Ausführung einer zuerst von Ostwald vorgeschlagenen Methodik, bei der mehrere Wägungen kombiniert werden. Das Gefäß, durch dessen Gewichtszunahme das Gewicht der gefallen Tropfen bestimmt wird, enthält dabei auch die Abtropffläche, die beim Beginn des Versuches unbenetzt ist. Läßt man in ein solches Gefäß n Tropfen fallen und entfernt dann sofort die Zuflußvorrichtung, so sind in ihm n gefallene Tropfen und *ein* von dem ersten herrührender Tropfenrest verblieben, der also mitgewogen wird. Ist π_0 das Gewicht des Kölbchens beim Beginn des Versuches, π_1 nach dem Abfallen der n Tropfen, bezeichnet man ferner mit Guye

1) Als dieser Aufsatz im Manuskript bereits fertiggestellt war, gelangte die neue Publikation des Hrn. F. Kohlrausch (Ann. d. Phys. 22. p. 191—194. 1907) zu meiner Kenntnis. Ich glaubte dennoch an meinen die Versuche von Guye und Perrot betreffenden Darlegungen nichts kürzen zu sollen, weil, abweichend von Hrn. Kohlrausch, sich unsere Vergleichung von Theorie und Versuch auf eine rein theoretische Tabelle stützt und sich auch auf die von Hrn. Kohlrausch nicht berücksichtigten Tropfenreste erstreckt. Sieht man von Anilin ab, so ist die mittlere Differenz zwischen aus Tropfen berechneten und aus Steighöhen ermittelten Kapillaritätskonstanten bei Hrn. Kohlrausch gleich +0,028, bei uns gleich +0,007; für das in den Versuchen von Guye und Perrot auftretende Intervall von r/a ergeben also die rein theoretisch erhaltenen Faktoren sicherlich keine schlechteren Resultate als die auf Grund der Rayleighschen Versuche modifizierten.

2) Ph. A. Guye u. F. Louis Perrot, Arch. d. sciences physiques et naturelles 1901.

und Perrot den an der Abtropffläche unmittelbar vor dem Abreißen hängenden Tropfen, d. h. die Summe der Gewichte des fallenden Tropfens und des Tropfenrestes als „vollständigen“ Tropfen, setzen wir ihn gleich p und den Tropfenrest gleich $\bar{p}$, so hat man sonach

$$\pi_1 - \pi_0 = \bar{p} + n(p - \bar{p}).$$

Lassen wir jetzt noch n weitere Tropfen in das Kölbchen zufließen, wodurch dessen Gewicht auf π_2 steigen möge, so erhalten wir

$$\pi_2 - \pi_1 = n(p - \bar{p}),$$

somit

$$p - \bar{p} = \frac{\pi_2 - \pi_1}{n} \quad \text{und} \quad \bar{p} = 2\pi_1 - \pi_0 - \pi_2.$$

Guye und Perrot nahmen in ihrer ersten Versuchsreihe $n=5$. Großer Genauigkeit ist diese Methode allerdings nicht fähig, da $\bar{p}$ für die verschiedenen Flüssigkeiten bei der von den Experimentatoren gewählten Abtropffläche von 3,17 mm Durchmesser nur klein war, nämlich zwischen 4 und 6 mg schwankte und überdies mit der vierfachen Unsicherheit einer Wägung behaftet war. In dem von Guye und Perrot experimentell berechneten Verhältnis $p/\bar{p}$ ist der Nenner daher von einer erheblich größeren relativen Unsicherheit als der Zähler, so daß verhältnismäßig kleine Wägungsfehler sowie auch kleine Schwankungen in der Größe der Oberflächenspannung während des Versuches schon beträchtliche Abweichungen zwischen den experimentell gefundenen und den theoretisch — aus den anderweitig bekannten Zahlen für die Kapillaritätskonstanten — berechneten Werten von $p/\bar{p}$ herbeiführen können. Hiernach sind die Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung zu beurteilen, die in der folgenden Tabelle hervortreten, in der die mit „beobachtet“ überschriebene Kolumne der Arbeit von Guye und Perrot entnommen ist, während die als „berechnet“ bezeichneten Zahlen von mir aus den von denselben Forschern durch Steighöhenbeobachtungen gewonnenen Werten der Kapillaritätskonstanten mit Hilfe unserer oben mitgeteilten Tabelle berechnet sind.

	$p/\bar{p}$ beobachtet	$p/\bar{p} = V_m/\bar{V}_m (r/a)$ berechnet
Äthylenbromid . . .	3,4	3,6
Chlorkohlenstoff . .	3,4	3,5
Metaxylol	4,2	4,2
Acetophenon	4,7	5,2
Benzol	4,7	4,8
Dimethylanilin . . .	4,7	5,2
Dimethylorthotoluol .	4,9	4,9
Piperidin	5,0	4,9
Metakresol	5,0	5,1
Anisol	5,5	5,0
Pyridin	6,4	5,2
Benzonitril	6,4	5,2
Anilin	6,4	5,4

Mit Ausnahme der letzten drei Versuche ist, wie man sieht, die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuchen eine leidliche; übrigens bezeichnen Guye und Perrot selbst die vorstehenden Versuche nur als orientierende, indem sie auf die Unsicherheit des Wertes von $\bar{p}$ hinweisen.

Guye und Perrot haben nun noch eine weitere Reihe von Versuchen angestellt, die im Prinzip von der eben besprochenen nicht abweichen; nur die Kombination der nach dem obigen Schema gewählten Werte von n ist eine andere. Während bei der ersten Versuchsreihe je zwei Bestimmungen für $n=5$ und $n=10$ miteinander kombiniert waren, wurde bei der zweiten n das eine Mal gleich 1, das andere Mal gleich 10 genommen. Diese Versuchsreihe, die von den Autoren nicht zur Ermittlung von $p/\bar{p}$ unternommen wurde, ist deshalb viel genauer als die erste, weil das Gewicht des „vollständigen“ Tropfens ($n=1$) dabei als Mittelwert aus mehreren Einzelversuchen gewonnen wurde, und daher auch $\bar{p} = p - (p - \bar{p})$ mit einer viel geringeren Unsicherheit behaftet ist. Aus jedem solchen Versuchspaar läßt sich die Kapillaritätskonstante auf zweierlei Art bestimmen, nämlich aus dem Gewicht p des „vollständigen“ Tropfens mit Hilfe unseres Faktors $V_m(r/a)$ und aus dem „unvollständigen“ oder fallenden Tropfen ($=p - \bar{p}$) mittels des Faktors $f(r/a)$; man kann aber zwecks Prüfung der Theorie auch so vorgehen, daß man die Kapillaritäts-

konstante nur in letzterer Weise ermittelt, danach das Verhältnis $p/\bar{p}$ aus unserer Tabelle berechnet und die so erhaltene Zahl derjenigen gegenüberstellt, die man direkt aus den experimentell gewonnenen Werten für p und $p - \bar{p}$ berechnen kann. Wir haben dieses zweite Rechnungsverfahren gewählt; obenein wurde jeder aus $p - \bar{p}$ berechneten Kapillaritätskonstante noch die von Guye und Perrot durch Steighöhenversuche bestimmte hinzugefügt. Die Ergebnisse dieser Rechnungen bilden den Inhalt der nachstehenden Tab. 2.

Wie man sieht, schwanken die Werte von r/a in der Tab. 2 zwischen 0,5 und 0,9; gerade dieser Teil des Wertebereiches von r/a hat für die Praxis die größte Bedeutung. Die Werte der Kapillaritätskonstanten α , wie sie einerseits aus dem Gewicht der fallenden Tropfen, andererseits aus Steighöhenbeobachtungen ermittelt wurden, stimmen in befriedigender Weise miteinander überein; unter den 16 von Guye und Perrot untersuchten Flüssigkeiten ist die Differenz beider Zahlen 15mal kleiner als $\pm 0,1$; nur beim Anilin ist sie etwas größer, nämlich 0,23, d. i. ca. 5 Proz. des Wertes. Auch die Übereinstimmung zwischen den rein experimentell — aus zwei Daten — gewonnenen und den nur aus der Kapillaritätskonstante abgeleiteten Werten des Verhältnisses $p/\bar{p}$ ist leidlich; die Abweichungen übersteigen jedenfalls nicht die nach der Unsicherheit der zugrunde liegenden Zahlen zu erwartende Fehlergrenze. Letztere ist wesentlich bestimmt durch die Unsicherheit der aus den Wägungen ermittelten Zahl für $\bar{p}$, und diese kann nach den von den Autoren über die Fehlergrenze von p gemachten Angaben im ungünstigsten Falle bis auf $\pm 0,6$ mg steigen, was für $p/\bar{p}$ einen Fehler von mehr als 10 Proz. veranlassen kann.

Alles zusammenfassend dürfen wir somit wohl sagen, daß die Versuche von Guye und Perrot eine befriedigende Bestätigung unserer Theorie des Abtropfens darstellen.

IV.

Wir wollen nunmehr noch einen kurzen Überblick über einige ältere Bearbeitungen des Tropfenproblems geben, die wir erst nach Aufstellung und Durchrechnung unserer Theorie kennen gelernt haben.

Tabelle 2.

Name der Flüssigkeit	t	σ	p	$p - \bar{p}$	α aus $p - \bar{p}$ berechnet	α aus Steig- höhen	$p/\bar{p}$ ber. aus Kol. 4 u. 5	$p/\bar{p}$ ber. aus Kol. 6	$\frac{r}{a}$
Äthylacetat . . .	17,1	0,9039	0,01966	0,01526	2,40	2,41	4,5	4,2	0,687
Chlorkohlenstoff . .	22,1	1,5810	0,02274	0,01619	2,59	2,64	3,5	3,4	0,876
Valeroxim	17,6	0,8944	0,02193	0,01752	2,75	2,78	5,0	4,6	0,640
Benzol	16,6	0,8813	0,02340	0,01869	2,92	2,90	5,0	4,8	0,615
Metaxylol	17,2	0,8676	0,02335	0,01844	2,88	2,94	4,8	4,8	0,615
Piperidin	17,6	0,8647	0,02519	0,01975	3,08	3,02	4,7	4,9	0,594
Dimethylorthotoluol	19,9	0,9281	0,02553	0,02088	3,26	3,20	5,5	4,9	0,598
Anisol	19,4	0,9927	0,02827	0,02292	3,57	3,51	5,3	5,0	0,591
Dimethylanilin . .	17,5	0,9582	0,02948	0,02403	3,73	3,66	5,4	5,3	0,568
Pyridin	19,1	0,9825	0,0296	0,02393	3,72	3,72	5,2	5,2	0,576
Metakresol	21,6	1,0324	0,02935	0,02385	3,72	3,79	5,3	5,0	0,591
Benzonitril	19,6	1,0057	0,03070	0,02534	3,95	3,89	5,7	5,3	0,566
Acetophenon	17,5	1,0302	0,03155	0,02574	3,99	3,94	5,4	5,2	0,569
Äthylenbromid . .	21,2	2,1686	0,03260	0,02348	3,74	3,83	3,6	3,5	0,854
Anilin	18,4	1,0188	0,03427	0,02857	4,40	4,17	6,0	5,6	0,539
Nitrobenzol	15,0	1,2041	0,03445	0,02844	4,43	4,40	5,7	5,1	0,585

Frankenheim¹⁾ hat zuerst die Verwendbarkeit der Abtropfmethode zur Bestimmung der Kapillaritätskonstanten ausgesprochen; in seinen Versuchen beschränkte er sich jedoch lediglich darauf, den Einfluß der Schnelligkeit des Abtropfens auf die Größe der Tropfen festzustellen. Er hat für Wasser ermittelt, daß, während das Abtropfintervall von 3,76 auf 0,79 Sek. abnimmt, die relative Tropfengröße von 1 auf 1,55 steigt; für Weingeist fand er bei Variation der Zeitfolge von 1,67 auf 0,37 Sek. ein stetiges Anwachsen der Tropfengröße von 1 auf 1,76. Die Durchmesser der benutzten Tropfröhren werden nicht angegeben. Eine ähnliche Feststellung verdanken wir Quincke²⁾; das von mir in meinem zweiten Aufsatz³⁾ dagegen geäußerte Bedenken muß ich nach Kenntnisnahme der Frankenheimschen Zahlen als unbegründet bezeichnen.

A. Dupré hat sich sehr eingehend experimentell und theoretisch mit der Kapillaritätstheorie beschäftigt und seine darauf bezüglichen Untersuchungen im Zusammenhang in seiner „*Theorie mécanique de la chaleur*“ (Paris 1869) dargestellt. Auf p. 329 dieses Werkes erörtert er die Abhängigkeit des Tropfengewichts von der Kapillaritätskonstante und macht dabei die richtige Bemerkung, daß, wenn die äußeren Durchmesser der Tropfröhren proportional der von uns mit a bezeichneten⁴⁾ Konstante gewählt werden, die Tropfenvolumina für die verschiedenen Flüssigkeiten der dritten Potenz von a proportional sind, was ja ohne weiteres aus unserem Ausdruck für das Tropfenvolumen

$$V = a^3 \tau \pi f \left(\frac{r}{a} \right)$$

abzulesen ist. Die Tropfengewichte selbst werden von Dupré mit Hilfe einer nur von r/a abhängigen Größe N berechnet, deren Beziehung zu unserem Faktor f durch die Gleichung

$$\frac{r}{a} f \left(\frac{r}{a} \right) = \frac{1}{\pi (2N)^{1/2}}$$

gegeben ist. Ist der Wert von N für die in Betracht kommen-

1) Frankenheim, Die Lehre von der Kohäsion, Breslau 1835. p. 98.

2) G. Quincke, Pogg. Ann. 135. p. 638. 1868.

3) Th. Lohnstein, Ann. d. Phys. 20. p. 609. 1906.

4) Dupré selbst hat andere Konstantenbenennungen.

den Werte von r/a bekannt, so kann man für jede Flüssigkeit aus dem Tropfengewicht die Kapillaritätskonstante berechnen; zur Kenntnis von N gelangt man, indem man für eine Flüssigkeit von bekannter Oberflächenspannung empirisch die Tropfengewichte an Röhren verschiedener Durchmesser ermittelt. Dies hat Dupré durch Ausführung seiner oben mitgeteilten Tropfversuche getan. Wie man leicht einsieht, stimmt diese Betrachtungsweise im wesentlichen mit den 30 Jahre später von Lord Rayleigh unabhängig davon angestellten Überlegungen überein.

Wenige Jahre später hat Hr. K. Lasswitz¹⁾ eine sehr eingehende, leider aber in den Hauptpunkten unzutreffende Bearbeitung des Tropfenproblems gegeben. Seine aus einer Doktordissertation²⁾ entstandene Arbeit geht zunächst von der falschen Annahme aus, daß der hydrostatische Druck längs der Berührungsfläche des Tropfens mit dem ihn tragenden festen Körper konstant ist, wodurch Hr. Lasswitz zu einer Differentialgleichung für die freie Oberfläche des Tropfens gelangt, welche, im Widerspruch zu der Laplace-Gauss'schen Theorie und der Erfahrung, ein von der Form der Haftfläche abhängiges Glied enthält. Dieser Irrtum, der sich in der Dissertation noch nicht findet, macht sich allerdings im weiteren Verlauf der Untersuchung nicht geltend, da diese auf den Fall einer horizontalen Haftfläche beschränkt wird. Von den beiden Fragen, die den eigentlichen Inhalt des Tropfenproblems ausmachen, behandelt der Verfasser nur die eine, indem er die Frage aufwirft, wodurch eigentlich das Abfallen des Tropfens bedingt ist. Er beantwortet sie ohne nähere Begründung dahin, daß das Abreißen eines Tropfens dann eintritt, wenn der von den Kapillaritätskräften herrührende Normaldruck, den er ohne absolutes Glied gleich

$$a^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

setzt³⁾, verschwindet. Ohne auf die theoretische Fehlerhaftigkeit dieser Anschauung näher einzugehen, wollen wir nur kurz

1) K. Lasswitz, Pogg. Ann. Ergbd. VI. p. 441—477. 1874.

2) Breslau 1873.

3) In der heute üblichen Bezeichnungsweise ist die Lasswitzsche Konstante a^2 durch $a^2/2$ zu ersetzen.

andeuten, zu welch absonderlichen Folgerungen die daraus entspringende Bedingungsgleichung führt. Diese Bedingungsgleichung lautet, wenn wir wie früher $a = 1$ setzen, $y - h = 0$; sie läßt sich, wie wir aus unseren Tabellen feststellen konnten, überhaupt nur für den durch die Zahlen 0,7 und 1,7 abgegrenzten Wertbereich von r/a reell befriedigen, und nur für einen einzigen in der Nähe von 0,8 liegenden Wert dieses Verhältnisses stimmt das dabei für das Volumen des hängenden Tropfens erhaltene Resultat mit dem aus unserer Theorie folgenden überein. Für das Volumen des hängenden Tropfens erhält Lasswitz den einfachen Ausdruck $a^2 r \pi . u$; da nun für einen an einer horizontalen unbegrenzten Fläche hängenden, sie vollständig benetzenden Tropfen $u = 0$ ist, so würde also in diesem Falle jenes Volumen verschwinden. Die Lasswitzsche Theorie zeitigt somit das absurde Resultat, daß ein fester Körper an einer horizontalen Fläche von einer Flüssigkeit um so weniger zu tragen vermag, je besser er von ihr benetzt wird. Nur beiläufig sei endlich noch erwähnt, daß auch der in der Dissertation niedergelegte Konvergenzbeweis für die zur Tropfenkuppe gehörige Mac Laurinsche Reihenentwicklung dem Verfasser nicht gelungen ist; denn mehrere vom Koeffizientenindex n abhängige Zahlenausdrücke, auf deren angebliches Endlichbleiben für $n = \infty$ sich der Beweis in letzter Linie stützt, streben in Wirklichkeit keinem Grenzwert zu.

Etwa 10 Jahre später hat sich E. Mathieu¹⁾ mit unserem Thema beschäftigt. Er kennt offenbar nur die nach oben sich verengenden Tropfen, bei denen in unserer Bezeichnungsweise $h > 1,8$ ist, und berechnet mit Hilfe von Reihenentwicklungen einige Meridiankurven; da er den Konvergenzgrad der benutzten Reihen überschätzt, so ergeben diese Rechnungen teilweise nur mäßige Annäherungen. Über die Bedingung des Tropfenabfalls stellt Mathieu keine besonderen Betrachtungen an, er nimmt vielmehr ohne Begründung an, daß ein Tropfen abfällt, wenn sich an seiner Oberfläche eine Einschnürung (*gorge*) gebildet hat, d. h. die Stelle, an der die Richtung der Meridiankurve zum zweitenmal vertikal ist, daß der unterhalb

1) E. Mathieu, Journal de phys. 3. 1884; vgl. auch E. Mathieu, Théorie de la Capillarité, Paris 1884.

der Einschnürung gelegene Teil des Tropfens abfällt und daher der Halbmesser der Abtropffläche mit dem Achsenabstand der Einschnürungsstelle identifiziert werden kann. Nur für enge Röhren führt dieses Vorgehen zu annähernd richtigen Resultaten. — In der oben besprochenen Experimentalarbeit schließen sich Guye und Perrot der Auffassung Mathieus insofern an, als sie den fallenden Tropfen dem unterhalb der Hohlkehle befindlichen Teil des vollständigen Tropfens gleich setzen; sie berechnen auf Grund dieser Annahme und der weiteren fehlerhaften Voraussetzung, daß für diesen Teil des Tropfens die alte Volumenformel $V = r \pi a^2$ streng richtig sei, als „*diamètre du cercle de rupture au moment de la chute de la goutte*“ aus ihren Versuchen eine Länge, die in Wirklichkeit bei Anwendung unserer Bezeichnungen nichts anderes als $2r \cdot f(r/a)$ ist.

Zum Schluß sollen hier noch die eingehenden Untersuchungen besprochen werden, die Franz Neumann¹⁾ als einziger unter den führenden Physikern der früheren Generationen dem Tropfenproblem gewidmet hat. Sie gehören zwar einer älteren Epoche an als die letzterwähnten Arbeiten, der Öffentlichkeit sind sie aber erst, da sie vorher nicht publiziert waren, durch die 1894 erfolgte Herausgabe der Neumannschen Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität bekannt geworden, mir selbst, wie oben angedeutet, erst nach Aufstellung meiner eigenen Theorie. Auf den Seiten 117—151 dieses Werkes werden die an horizontaler Ebene hängenden Tropfen behandelt. Neumann zerlegt das Problem in folgende Unterfragen: Welches ist das Maximum des Volumens, bei welchem das Abreißen eintritt? Der wievielte Teil desselben reißt ab, und an welcher Stelle? Und wie endlich sind diese Größen von der Kapillaritätskonstante abhängig? Er beantwortet diese Fragen folgendermaßen: „Das Problem läßt sich nicht in voller Allgemeinheit lösen; selbst für den Fall, daß die Gestalt des Tropfens eine Rotationsfigur ist, wie z. B., wenn die Flüssigkeit durch eine kleine runde Öffnung in einer horizontalen ebenen Platte oder aus einem vertikal stehenden, sehr engen zylindrischen Rohre austritt, läßt sich die Rech-

1) F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität, herausgeg. von A. Wangerin, Leipzig 1894.

nung nicht durchführen, wenigstens nicht streng. Die Durchführung ist dagegen für den Fall möglich, in welchem die Oberfläche des Tropfens eine *einfach gekrümmte* Fläche ist.“ Dieser Fall, der wohl nur eine mathematische Fiktion ist, dessen physikalische Realisierung durch Benutzung spaltförmiger Ausflußöffnungen wenigstens bisher von niemandem versucht wurde, wird nun sehr ausführlich behandelt; er läßt sich durch Quadraturen erledigen und führt auf elliptische Integrale. Auch hier zerfallen, wie sich zeigt, die Kurven in zwei Klassen, die Neumann als „Tellerform“ und als „Flaschenform“ voneinander unterscheidet; sie entsprechen unseren Meridiankurven erster und zweiter Art. Außerdem gibt es noch Kurven mit doppelter Schleifenbildung, die keine physikalische Bedeutung beanspruchen können. Den Übergang zwischen diesen letzteren und den Flaschenformen bildet nun eine Kurve, bei der die engste Stelle des Flaschenhalses die Dicke 0 hat, die Symmetrieachse also von der Kurve tangiert wird. Neumann nimmt nun an, daß der Tropfen abreißen muß, wenn diese durch den verschwindenden Flaschenhals charakterisierte Form erreicht ist, und daß der unterhalb der Einschnürung gelegene Teil des Tropfens, dessen Zusammenhang mit dem oberen Teil ja gewissermaßen aufgehoben ist, den fallenden Tropfen darstellt. Von der Spaltbreite wäre ein solcher Tropfen unabhängig. So bestechend die Neumannsche Betrachtung im ersten Augenblick erscheint, so versagt sie doch für den praktischen Fall der Rotationstropfen aus dem einfachen Grunde, weil hier eine Flaschenform mit verschwindendem Hals gar nicht existiert. Ferner scheint Neumann, wie dies aus weiteren Äußerungen hervorgeht, nicht gewußt oder wenigstens bei seinen Darlegungen nicht beachtet zu haben, daß bei den von weiten Röhren abfallenden Tropfen in keinem Stadium die Flaschenform zustande kommt, daß hier die Tropfen vielmehr von der Tellerform abfallen. So ist denn also Neumann an dem für den Tropfenabfall maßgebenden Grundprinzip vorbeigegangen, und das ist insofern merkwürdig, als er für den ausschließlich von ihm behandelten Fall, die Bildung eines zylindrischen Tropfens an einer unbegrenzten, von der Flüssigkeit vollständig benetzten Horizontalebene, die Existenz eines Maximalvolumens

rechnerisch ermittelt hat; aber gerade die Betrachtungen, die er an die Feststellung dieser Tatsache knüpft, zeigen deutlich, daß ihm ihre prinzipielle Bedeutung verborgen blieb. Übrigens lassen die Sätze, mit denen Neumann seine Darlegungen schließt, keinen Zweifel darüber, daß er sich des vom Standpunkt der praktischen Physik Unbefriedigenden seiner Ermittlungen durchaus bewußt war und sie nur vortrug, um seine Schüler zu weiteren Forschungen auf diesem Gebiete anzuregen.

Wir schließen damit unseren historischen Rückblick, da in den uns etwa entgangenen Bearbeitungen des Gegenstandes wohl kaum andere als die in unseren bisherigen Arbeiten erwähnten Auffassungen enthalten sein dürften.

Berlin, Februar 1907.

(Eingegangen 25. Februar 1907.)

**10. Über die Formulierung
des ersten Hauptsatzes für Gase;
von F. W. Adler.**

1. Man ist gewohnt, die in der Zustandsgleichung der Gase

$$p v = R T$$

auf tretenden drei Größen p , v und T als *gleichwertige* unabhängige Variable aufzufassen.

Auf Grund des Gay-Lussacschen Überströmungsversuches¹⁾ läßt sich aber zeigen, daß die Gleichwertigkeit dieser drei Variablen *bezüglich der inneren Energie des Gases* (von Clausius²⁾ mit U bezeichnet) *nicht* gilt. Aus demselben folgt nämlich, daß Volumänderungen ohne Leistung äußerer Arbeit keine Temperaturänderungen zur Folge haben, daß also

$$(1) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_T = 0$$

ist. Bei diesem Versuch ist mit der Volumänderung auch eine Druckänderung verbunden, es gilt somit auch:

$$(2) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_T = 0.$$

Es ist also U schon vollständig gegeben durch T allein. Andererseits ist aber U erst durch die *zwei* Größen p und v bestimmt.

Es besteht somit in den Aussagen über die innere Energie U des Gases *keine Gleichwertigkeit* der unabhängigen Variablen, sie ist einerseits gegeben durch *eine* (T), andererseits durch *zwei* (p und v).

2. Clausius³⁾ formuliert am Eingang seiner Ableitung des ersten Hauptsatzes für Gase diese Gleichwertigkeit der unabhängigen Variablen *auch bezüglich der Größe U* , indem er sagt:

1) Über denselben vgl. z. B. E. Mach, Prinzipien der Wärmelehre 2. Aufl. p. 198 ff. Leipzig 1900.

2) R. Clausius, Mechanische Wärmetheorie 1. p. 33—34. 3. Aufl. Braunschweig 1887.

3) l. c. p. 47.

„Der Zustand des Gases ist vollständig bestimmt, wenn seine Temperatur und sein Volumen gegeben ist, und ebenso läßt er sich durch Temperatur und Druck und durch Druck und Volumen bestimmen. Wir wollen zunächst die beiden erstgenannten Größen, Temperatur und Volumen, zur Bestimmung des Zustandes des Gases auswählen und demgemäß T und v als die unabhängigen Veränderlichen betrachten, von denen alle anderen auf den Zustand des Gases bezüglichen Größen abhängen. Indem wir dann auch die Energie U des Gases als Funktion dieser beiden Veränderlichen ansehen, können wir schreiben

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial v} dv,$$

wodurch die vorige Gleichung¹⁾ übergeht in:

$$dQ = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + p \right) dv.$$

Nun nachdem die Gleichwertigkeit der p , v und T postuliert worden ist, wird erst auf den Gay-Lussacschen Versuch hingewiesen bez. derselbe im Gewande einer Ableitung eingeführt, und dadurch gezeigt, daß

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_T = 0$$

gilt, also U keine Funktion von v bei konstantem T ist. Es wird nun aber *nicht gesagt*, daß die Prämisse, die in dem Satz: „Indem wir dann auch die Energie U des Gases als Funktion dieser beiden Veränderlichen ansehen . . .“ ausgesprochen ist, *sich als unrichtig herausstellt*, sondern in der Ableitung fortgefahren. Dadurch bleibt aber in derselben eine Unrichtigkeit bestehen, indem der *partielle* Differentialquotient

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v$$

in der Gleichung

$$(3) \quad dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v dT + p dv$$

beibehalten wird, obwohl die Bedingung, daß

$$v = \text{const.}$$

1) Dieselbe lautet: $dQ = dU + p dv$.

ist, *gar nicht erfüllt sein muß*, und bei den meisten vorkommenden Prozessen *auch nicht erfüllt ist*.

An Stelle dieses partiellen Differentialquotienten muß der *vollständige*

$$\frac{dU}{dT}$$

treten. Es entfällt somit die ganze Überlegung von Clausius¹⁾, es genügt die Konstatierung des Gay-Lussacschen Überströmungsversuches, um den ersten Hauptsatz für Gase *direkt* schreiben zu können:

$$(4) \quad dQ = \frac{dU}{dT} dT + p dv.$$

3. Infolge des Auftretens des *vollständigen* Differentialquotienten an Stelle des *partiellen* wird es aber auch deutlich, daß derselbe nicht ohne weiteres als spezifische Wärme bei *konstantem Volumen* anzusprechen ist, wie Clausius dies tut. Indem er in seiner Gleichung

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v dT + p dv$$

den Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v$$

C_v nennt, erhält er:

$$dQ = C_v dT + p dv,$$

und sagt²⁾: „Aus der Form dieser Gleichung ersieht man sofort, daß C_v die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen bedeutet, indem $C_v dT$ die Wärmemenge ausdrückt, welche dem Gase bei der Erwärmung um dT mitgeteilt werden muß, wenn dv gleich Null ist.“

Dieser Schluß ist nun nicht einwandfrei. Nehmen wir nämlich den anderen Fall, daß dv *nicht* gleich Null, dafür aber

$$p = \text{const.}$$

ist, dann wird äußere Arbeit geleistet und die nach Clausius für die Erhöhung der inneren Energie aufgewendete Wärme beträgt wieder

$$\frac{\partial U}{\partial T} dT,$$

1) R. Clausius, l. c. p. 47—48. Vom Beginn des § 3 bis zu Gleichung (9).

2) l. c. p. 48.

bez. nach unserer Formulierung

$$\frac{dU}{dT} dT.$$

Nun ist bei direkter Betrachtung offenbar

$$\frac{dU}{dT}$$

nicht mehr die spezifische Wärme bei *konstantem Volumen* (C_v), sondern die spezifische Wärme bei *konstantem inneren Druck*, abgesehen von der geleisteten Arbeit.

Unter „innerem“ Druck, der mit π bezeichnet werden soll, ist der Druck *im Gase selbst* verstanden zum Unterschied von dem Druck p , *gegen* den äußere Arbeit geleistet wird. *Nur* bei umkehrbaren Prozessen ist:

$$p = \pi.$$

Die spezifische Wärme bei konstantem *inneren* Druck, die wir mit C_π bezeichnen wollen, entspricht der Form

$$(5) \quad \left(\frac{dU}{dT} \right)_\pi = C_\pi,$$

und läßt sich von der gewöhnlich formulierten spezifischen Wärme bei konstantem Druck C_p sehr wohl trennen. Es sind Volumenänderungen *ohne* Leistung äußerer Arbeit (nicht umkehrbare) möglich und die bei denselben geleisteten Energiezufuhren sind nicht ohne weiteres gleich denjenigen, die bei konstantem Volumen stattfinden.

C_π wäre also die Energiezufuhr, die nötig ist, um die Temperatur des Gases um 1° zu steigern, während der *Druck konstant* bleibt, aber *keine äußere* Arbeit geleistet wird.

Dieses C_π ist nun aber nicht nur für diesen — als solchen wohl unwichtigen (weil nicht umkehrbaren) — Fall wesentlich, sondern es tritt als Bestandteil *jedes* C_p auf.

4. In unserer Gleichung (4) ist

$$\frac{dU}{dT},$$

nur in den Fällen, wo die Bedingung

$$v = \text{const.}$$

erfüllt ist, mit

$$C_v,$$

in allen anderen Fällen aber mit

$$C_{\pi}$$

zu bezeichnen.

Wir können alle vorkommenden Fälle in einer Formulierung zusammenfassen. Zu derselben gelangen wir *durch die Bedingung, daß die Erwärmung ohne Leistung äußerer Arbeit stattfindet*, also daß

$$p dv = 0$$

ist. Diese Bedingung umfaßt *beide* möglichen Fälle, in denen keine äußere Arbeit geleistet wird, nämlich die Bedingungen

$$p = 0$$

und

$$dv = 0.$$

Auf Grund der Gleichung (4) erhalten wir somit die spezifische Wärme *ohne* äußere Arbeit, die mit

$$C_0$$

bezeichnet werden soll. Es ist

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_0 = \frac{dU}{dT} = C_0.$$

Die Gleichung (4) heißt dann allgemein

$$(6) \quad dQ = C_0 dT + p dv.$$

Diese *gemeinsame* Bezeichnung der beiden Fälle setzt voraus, daß

$$C_v = C_{\pi}$$

ist. Die Erfüllung dieser Bedingung ist aber die notwendige Folge des Gay-Lussacschen Überströmungsversuches, der zeigt, daß U Funktion von T allein ist, also mit einer gewissen Temperaturänderung *dieselbe* Änderung von U stattfindet, ob die Energiezufuhr nun bei konstantem Volumen *oder* konstantem Druck erfolgt.

Die Ersetzung des C_0 durch C_v hat überhaupt nur für den *speziellen* Fall Sinn, daß *keine* äußere Arbeit geleistet wird *und* das Volumen *konstant* bleibt. Es hat daher keinen angebbaren Sinn, die Gleichung (6) in der Form:

$$dQ = C_v dT + p dv$$

zu schreiben, denn in allen Fällen, wo sie Anwendung finden würde, fällt das Glied

$$p dv$$

weg.

Die Ersetzung des C_0 durch C_π in der Gleichung (6) nehmen wir vor, um zu präzisieren, was die spezifische Wärme bei konstantem Druck mit äußerer Arbeit ist, die man als

$$C_p$$

zu bezeichnen gewohnt ist. Setzen wir in

$$dQ = C_\pi dT + p dv$$

für

$$p dv = R dT - v dp$$

ein, so erhalten wir

$$dQ = (C_\pi + R) dT - v dp.$$

Für die Bedingung

$$dp = 0$$

ergibt sich, daß

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = C_\pi + R$$

ist, daß also in erster Linie die Gleichung

$$C_p = C_\pi + R$$

besteht. Nur auf Grund des Gay-Lussacschen Überströmungsversuches darf in dieser Formel C_π durch C_v ersetzt werden, wodurch wir erhalten

$$C_p = C_v + R.$$

Im allgemeinen wird aber wohl am einfachsten der erste Hauptsatz in der Form der Gleichung (6)

$$dQ = C_0 dT + p dv$$

geschrieben werden, der alle Fälle umfaßt und für C_p den Ausdruck

$$C_p = C_0 + R$$

ergibt.

5. In den meisten Darstellungen der Thermodynamik wird die Clausiussche Ableitung unverändert übernommen. Dagegen treten die hier berührten Fragen bei Zeuner¹⁾ und Voigt²⁾ nicht auf, da sie von vornherein p und v als grundlegende unabhängige Variable einführen.

Es soll nun noch gezeigt werden, daß die Darstellung auf Grund der unabhängigen Variablen p und v durch die hier

1) G. Zeuner, Technische Thermodynamik 2. Aufl. Leipzig 1900.

2) W. Voigt, Thermodynamik 1. p. 114ff. Leipzig 1903.

eingeführte Größe C_π bedeutend vereinfacht werden kann gegenüber der Zeunerschen, der, um C_p und C_v zu erhalten, auf Ausdrücke, die den *zweiten* Hauptsatz voraussetzen, rekurrieren muß.¹⁾

6. Nehmen wir p und v als unabhängige Variable²⁾, so erhalten wir für dU :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial p} dp + \frac{\partial U}{\partial v} dv.$$

Dabei ist

$$\frac{\partial U}{\partial v}$$

keineswegs gleich Null, weil es bei konstantem p genommen ist, also genauer geschrieben heißt:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_p.$$

Und ebenso natürlich:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_v.$$

Der erste Hauptsatz erhält dann die Form

$$(7) \quad dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_p dv + p dv,$$

worin wir mit Zeuner³⁾ bezeichnen wollen:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_v = X,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_p = Z.$$

Setzen wir in Gleichung (7) ein, so erhalten wir:

$$dQ = X dp + Z dv + p dv,$$

oder

$$dQ = X dp + (Z + p) dv.$$

Wir setzen:

$$Z + p = Y.$$

Zeuner benennt die Größen X , Y und Z nicht. X und Y entsprechen den von Mach⁴⁾ eingeführten Begriffen der „spezifischen Wärme der Druckänderung bei konstantem Volumen“ und der „spezifischen Wärme der Volumänderung bei konstantem

1) G. Zeuner, l. c. 1. p. 116, Formel (37) und (38).

2) Die Entwicklung gilt nur für *umkehrbare* Prozesse, sonst müßten wir π anstatt p nehmen.

3) G. Zeuner, l. c. 1. p. 23.

4) E. Mach, l. c. p. 275.

Druck“. Z wäre die spezifische Wärme der Volumänderung bei konstantem inneren Druck ohne Leistung äußerer Arbeit, die Mach aber nicht formuliert.

Durch die Definition der Größe C_π sind wir nun in der Lage, die spezifischen Wärmen direkt als Funktionen der X , Y und Z aufzustellen. Es ist:

$$Z = \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p.$$

Darin bedeutet nun offenbar

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p$$

die spezifische Wärme bei konstantem inneren Druck ohne Leistung äußerer Arbeit C_π . Es ist somit

$$Z = C_\pi \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p.$$

Ebenso ist aus

$$X = \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v$$

zu ersehen, daß

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = C_v$$

die spezifische Wärme bei konstantem Volumen ist, was eingesetzt ergibt

$$X = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v.$$

Es heißt also der Ausdruck (7)

$$(8) \quad dQ = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp + C_\pi \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv + p dv,$$

oder zusammengefaßt

$$(9) \quad dQ = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp + \left[C_\pi \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p + p \right] dv.$$

7. Die bisherigen Entwicklungen gelten ganz allgemein, nun führen wir die spezielle Voraussetzung für Gase ein, daß die Zustandsgleichung

$$p v = R T$$

gilt, dann werden die Differentialquotienten folgendermaßen:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v = \frac{v}{R}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p = \frac{p}{R};$$

wir erhalten somit für Gleichung (8)

$$(10) \quad dQ = \frac{1}{R} (C_v v dp + C_\pi p dv) + p dv,$$

und für Gleichung (9)

$$dQ = \frac{1}{R} [C_v v dp + (C_\pi + R) p dv],$$

In dieser Gleichung setzen wir

$$p dv = R dT - v dp$$

und erhalten

$$dQ = \frac{1}{R} [C_v v dp + (C_\pi + R) R dT - (C_\pi + R) v dp].$$

Führen wir nun die Bedingung

$$dp = 0$$

ein, so ergibt sich

$$dQ = \frac{1}{R} (C_\pi + R) R dT = (C_\pi + R) dT,$$

oder die spezifische Wärme bei konstantem Druck mit äußerer Arbeit ist:

$$(11) \quad C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = C_\pi + R.$$

Es sind also auch auf Grund der unabhängigen Variablen p und v in *einfacher* Weise alle spezifischen Wärmen formulierbar.

Auf Grund des Gay-Lussacschen Überströmungsversuches ist aber, wie bereits gezeigt

$$C_v = C_\pi = C_0,$$

so daß sich der erste Hauptsatz durch Einsetzung von C_p und C_0 in Gleichung (10) in folgende allgemeine Form bringen läßt:

$$(12) \quad dQ = \frac{1}{R} (C_0 v dp + C_p p dv),$$

in der in bekannter Weise die unabhängigen Variablen variiert werden können.

Zürich, Physik. Institut d. Universität, 24. Januar 1907.

(Eingegangen 3. Februar 1907.)

**11. Zur Theorie der stationären Strahlung
in einem gleichförmig bewegten Hohlraume;
von F. Hasenöhl.**

Unter obigem Titel ist eine Arbeit des Hrn. v. Mosengeil¹⁾ erschienen, in der die Ergebnisse einer Abhandlung von mir²⁾ angegriffen sind. Ich ging in dieser Arbeit von der Annahme aus, daß die (wahre) relative Strahlung das Lambertsche Kosinusgesetz befolge; diese Annahme schien mir die einzige mit der Thermodynamik verträgliche. Hr. v. Mosengeil hat nun gezeigt, daß auch eine andere Annahme möglich ist. Von derselben ausgehend hat er eine entsprechend veränderte Theorie der Strahlung im bewegten Hohlraum entwickelt.³⁾

Hr. v. Mosengeil behauptet ferner, daß die Annahme des Lambertschen Kosinusgesetzes auf einen Widerspruch führt, wozu ich Stellung nehmen möchte. Ohne auf Details einzugehen, kann ich mich hier mit dem allgemeinen Hinweis auf die Ergebnisse einiger in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten von H. A. Lorentz⁴⁾ begnügen. In denselben ist dargetan, daß eine Theorie möglich ist, nach der eine gleichförmige Translation keinen Einfluß auf derartige Phänomene hat, nach der also auch das Lambertsche Gesetz seine Geltung für bewegte Systeme behalten muß.

1) K. v. Mosengeil, Berliner Inaugural-Dissertation. G. Schade 1906. Hr. v. Mosengeil ist noch vor dem Promotionsakt am 5. Sept. 1906 verschieden.

2) F. Hasenöhl, Ann. d. Phys. 15. p. 344. 1904; 16. p. 589. 1905.

3) Es handelt sich natürlich bloß um Glieder von der Ordnung β^2 aufwärts. — Für den von der Geschwindigkeit unabhängigen Teil der scheinbaren Masse der Hohlraumstrahlung erhält Hr. v. Mosengeil denselben Wert wie ich.

4) H. A. Lorentz, Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 7. p. 507. 1899 und 12. p. 986. 1904; vgl. auch M. Abraham, Theorie der Elektrizität II. p. 382.

Die Grundlagen dieser Lorentzschen Theorie sind zurzeit nur als Hypothesen anzusehen; es existiert ja bekanntlich auch eine andere, namentlich von M. Abraham vertretene Theorie. Es ist daher gewiß von Interesse, daß Hr. v. Mosengeil das Problem der Hohlraumstrahlung von einem anderen Standpunkte untersucht hat. Welcher von beiden Recht behalten wird, ist eine Frage der weiteren Entwicklung der Wissenschaft. Jedenfalls glaube ich aber hier aussprechen zu können, daß die Behauptung des Hrn. v. Mosengeil „... damit verlieren alle weiteren Folgerungen der Hasenöhl'schen Arbeit ihre Bedeutung“ eine zu weitgehende war.

Wien, im Jänner 1907.

(Eingegangen 5. Februar 1907.)

12. *Über die Berechnung der Impulsbreite der
Röntgenstrahlen aus ihrer Energie;
von W. Wien.*

Im Anschluß an Energiemessungen der Röntgenstrahlen hatte ich¹⁾ die gewonnenen Ergebnisse benutzt, um die Impulsbreite der Röntgenstrahlen unter der Voraussetzung zu berechnen, daß die erzeugenden Elektronen (auffallenden Kathodenstrahlen) eine gleichmäßige Verzögerung beim Aufprallen auf feste Körper erfahren. Nun hat Hr. van der Waals jr.²⁾ die Meinung ausgesprochen, daß die von mir gefundene sehr kleine Impulsbreite zur Übereinstimmung mit dem viel größeren Haga-Windschen Werte gebracht werden könne, wenn man annimmt, daß die Elektronen nicht einer einmaligen Verzögerung unterliegen, sondern entweder regelmäßige Schwingungen ausführen oder auf einer zickzackförmigen Bahn hin und her gehen und nur an den Umkehrpunkten der Zickzacklinie durch Kollision mit den Atomen Einbuße an Geschwindigkeit erleiden. Das letztere scheint ihm besonders durch die Abwesenheit einer merklichen Polarisation der Röntgenstrahlen bewiesen.

Was nun zunächst die Schwingungen anlangt, die das Elektron ausführen könnte, bevor es zur Ruhe kommt, so läßt sich gegen die Möglichkeit einer solchen Annahme natürlich nichts sagen. Man kann unter dieser Voraussetzung auch jeden beliebigen Betrag der ausgestrahlten Energie erhalten bis zum vollen Betrage der lebendigen Kraft des auffallenden Elektrons. Dann würde auch zwischen der ausgestrahlten Energie und der Wellenlänge der Röntgenstrahlen keine Beziehung bestehen. Nur muß man sich klar darüber sein, daß diese Hypothese mit der Stokes-Wiechertschen, wonach die

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 18. p. 991. 1905.

2) J. D. van der Waals jr., Ann. d. Phys. 23. p. 603. 1907.

Röntgenstrahlen die durch die Bremsung der Elektronen hervorgerufene elektromagnetische Strahlung sind, nichts mehr zu tun hat. Hr. van der Waals bezeichnet dann auch diese Hypothese als unwahrscheinlich und meint, daß durch die zickzackförmige Bewegung bei gleicher ausgestrahlter Energie sich eine kleinere Impulsbreite ergebe.

Wenn ich nun auch nicht einsehe, weshalb die Abwesenheit von Polarisation gegen eine einmalige Verzögerung sprechen soll, da diese ja nicht immer in derselben Richtung zu erfolgen braucht, sondern eintreten kann, wenn die Kathodenstrahlen schon nach allen Richtungen zerstreut sind, so bin ich doch mit Hrn. van der Waals ganz einverstanden, eine zickzackförmige Bewegung der Elektronen anzunehmen, wobei sie nur an den Umkehrpunkten Verzögerungen erleiden. Nur ist es nicht möglich, auf diese Weise einen größeren Wert der Impulsbreite zu erhalten, er wird im Gegenteil noch viel kleiner und das ist der Grund, weshalb ich meiner Rechnung eine einmalige Verzögerung zugrunde gelegt habe, da sonst die Abweichung vom Haga und Windschen Werte noch größer geworden wäre.

Wenn das Elektron sich auf einer zickzackförmigen Bahn bewegt, so werden die Geschwindigkeitsverluste hauptsächlich an den Umkehrpunkten stattfinden, während im übrigen das Elektron sich mit nahe konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Strahlung des Elektrons findet nur dort statt, wo der Geschwindigkeitsverlust stattfindet, also an den Umkehrpunkten der Bahn, während im übrigen keine Strahlung stattfindet. Wir haben also einzelne Strahlungsimpulse, die bedingt werden durch die Umkehrpunkte der Zickzacklinie und die dort stattfindende Verzögerung.

Wir nehmen nun diese einzelnen Verzögerungen als gleichförmig an. Andere Formen der Verzögerungen würden zu keinem wesentlich verschiedenen Ergebnis führen.

Nennen wir die Geschwindigkeit beim Beginn jeder Verzögerung v_1 , so ist sie während der Verzögerung j

$$v = v_1 - j t,$$

$$l = v_1 t - \frac{j}{2} t^2,$$

während das Elektron die Strecke l zurückgelegt hat.

Den Geschwindigkeitsverlust an den Ecken der Zickzacklinie $v_1 - v$ setzen wir als klein gegen v_1 voraus.

Eliminieren wir t aus beiden Gleichungen, so ist

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} l &= \frac{v_1(v_1 - v)}{j} - \frac{1}{2j}(v_1 - v)^2 \\ &= \frac{v_1^2 - v^2}{2j} = \frac{(v_1 + v)(v_1 - v)}{2j} \end{aligned} \right.$$

Andererseits ist für nicht zu große Geschwindigkeiten die ausgestrahlte Energie, wenn wir $v_1 - v$ als klein voraussetzen,

$$E = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} j^2 dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} j^2 \frac{dv}{j} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} j (v_1 - v),$$

wo e die Ladung des Elektrons, c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet, woraus

$$j = \frac{3}{2} E \frac{c^3}{e^2 (v_1 - v)}$$

folgt. Setzen wir dies in (1) ein, so haben wir in der Richtung senkrecht auf die Verzögerungsrichtung

$$\lambda = \frac{2 l c}{v} = \frac{2 (v_1 + v) (v_1 - v)^2 e^2}{3 E c^2 v} = \frac{4 (v_1 - v)^2 e^2}{3 E c^2}$$

für die Impulsbreite jedes einzelnen Strahlungsimpulses.

Während wir bei einmaliger Verzögerung von der Geschwindigkeit $v = v_0$ bis $v = 0$

$$\lambda' = \frac{2 l c'}{v} = \frac{2 e^2 v_0^2}{3 c^2 E'}$$

haben.

Teilen wir im ersten Falle die Geschwindigkeit v_0 in n Teile, von denen sie einen bei jeder Verzögerung verlieren soll, so ist

$$v_1 - v = \frac{v_0}{n}.$$

Andererseits können wir $E = E'/n$ setzen, da die n einzelnen Energiemengen die ganze ausgestrahlte Energie geben müssen, so daß

$$\lambda = \frac{4 e^2 v_0^2}{3 E' c^2 n}$$

ist. Die Impulsbreite ist also im Verhältnis $2:n$ kleiner als bei einmaliger Verzögerung.

Es liegt in der Natur der Sache, daß große ausgestrahlte Energie nur bei sehr starker Verzögerung der Elektronen eintreten kann und das führt mit Notwendigkeit zu kleiner Impulsbreite. Hr. van der Waals hat nicht angegeben, was er selbst unter der Impulsbreite oder Wellenlänge bei der zickzackförmigen Bewegung eigentlich versteht. Eine strenge Definition würde sich bei so komplizierter Bewegung nur durch die harmonische Analyse ergeben. Die in der obigen Rechnung angenommene Definition, die sich auf die Annahme gleichförmiger Verzögerung an den Enden der Zickzackbewegung stützt, wird der bei der Zerlegung nach Fourierschen Reihen nahekommen, wenn die Verzögerung nur an den Enden der Zickzacklinie stattfindet. Denn dann sind die einzelnen Strahlungsimpulse an den Zickzackenden durch strahlungsfreie Zwischenräume voneinander getrennt.

Nimmt man dagegen an, daß auch noch auf der ganzen Bahn schwächere verzögernde Kräfte wirken, so tritt zwischen diesen stärkeren Strahlungsimpulsen schwächere Strahlung auf. Bei der harmonischen Analyse müßten sich dann über die oben berechneten ganz kurzen Wellenlängen längere überlagern, denen aber nur ein ganz geringer Teil der Strahlungsenergie zukäme. In diesem Fall halte ich es aber für unberechtigt, diese längeren Wellen als Wellenlänge der Röntgenstrahlen anzusprechen, da ihnen eben nur ein kleiner Teil der Energie zukäme. Nimmt man dagegen an, daß die verzögernden Kräfte auf der ganzen Bahn nahe gleich sind, so nähert man sich wieder meiner ursprünglichen Annahme.

Man kann die von der Beobachtung bestimmte größere Energie der Röntgenstrahlen mit einer größeren Wellenlänge vereinigen, wenn man annimmt, daß die Ausstrahlung der Röntgenstrahlen durch die Richtungsänderung der auffallenden Elektronen hervorgerufen wird. Da diese beliebig oft erfolgen kann, so könnte auch ein großer Teil der Bewegungsenergie in Strahlung umgesetzt werden. Nur ist das auch nicht mehr die Stokes-Wiechertsche Hypothese.

Es ist klar, daß es mir bei der völligen Unkenntnis über die Erregung der Röntgenstrahlen fern gelegen hat, die Er-

gebnisse meiner Rechnung als einen Einwand gegen die Resultate von Haga und Wind aufzufassen. Ich wollte nur zeigen, daß man in konsequenter Verfolgung der Stokes-Wiechertschen Hypothese *ohne Hinzuziehung anderer Einflüsse* zu einer weit kleineren Wellenlänge für die Röntgenstrahlen gelangt, als Haga und Wind sie gefunden haben. Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, daß dies bei Annahme einer zickzackförmigen Bewegung der Elektronen in noch höherem Grade der Fall ist.

(Eingegangen 6. März 1907.)

**13. Berichtigung zu meiner Abhandlung:
„Untersuchungen ebener Reflexionsbeugungs-
gitter etc.“¹⁾; von Ernst Giesing.**

Hr. Dr. Otto Schönrock in Berlin hatte die Freundlichkeit, mich auf einen bei der Berechnung der Gitterflächenkrümmung (Abschnitt II) begangenen Fehler aufmerksam zu machen. Ich hatte in Fig. 1 (p. 338) fälschlicherweise als Zahlenwert für das Stück A_1C die größtmögliche Abweichung von der planen Ebene also $\lambda/4$ bez. $\lambda/2$ gesetzt. Richtig ist dagegen nach Brodhun und Schönrock ²⁾ folgende Überlegung. Wenn ich in der erwähnten Fig. 1 $NA_1 = NA_2 = R$ den Krümmungsradius des konkav gedachten Gitters A_1A_2 und d die Pfeilhöhe des Kreisbogens A_1A_2 nenne, so ist

$$R = \frac{b^2}{8d} + \frac{d}{2}$$

oder, da $d/2$ gegen R verschwindend klein ist:

$$R = \frac{b^2}{8d}.$$

Durch einfache Überlegung folgt dann aus der Figur

$$\gamma = \frac{b}{R} = \frac{8d}{b}.$$

Hr. Schönrock glaubt außerdem nach seinen Erfahrungen aus den von mir mitgeteilten Beobachtungen schließen zu dürfen, daß für jedes der beiden Gitter in gleicher Weise $d < \lambda/2$ sei; es sei aber durchaus nicht ausgeschlossen, daß der Betrag $d = \lambda/2$ von jedem Gitter nahe erreicht werde. Demnach wäre also im Höchsfalle $d = \lambda/2 = 0,000295$ mm. Zu berücksichtigen ist noch, daß das bei dem Versuch mit den Fizeauschen

1) E. Giesing, Ann. d. Phys. 22. p. 333. 1907.

2) E. Brodhun u. O. Schönrock, Ztschr. f. Instrumentenk. 1902; Heft 12.

Streifen benutzte Objektiv nur eine Öffnung von 70 mm hatte; damit wird dann der Krümmungsradius

$$R = \frac{70^3}{8 \cdot 0,000295} = 2,08 \text{ km.}$$

γ berechnet sich mit $b = 78 \text{ mm}$ als $7,7''$, ist also wesentlich größer als die von mir berechneten $1\frac{3}{4}''$.

Mit dem von Brodhun und Schönrock angegebenen Apparat ist es übrigens möglich, durch Veränderung der Neigung der Platten, die die Interferenz zustande kommen lassen, das Wandern der Streifen zu verfolgen und aus der Richtung dieses Wanderns auf die Art der eventuellen Krümmung zu schließen. Meine improvisierte Anordnung gestattete eine solche Manipulation nicht.

Wenn ich so nach dem vorstehenden zugeben muß, daß der Abschnitt II meiner Abhandlung mangelhaft ist, so möchte ich betonen, daß das Resultat dieses Teiles an und für sich für das Wesentliche der Arbeit von geringer Bedeutung ist. Denn einerseits war mir über die Beschaffenheit der benutzten Quarzplatte nichts bekannt (Hr. Schönrock glaubt, daß die Planflächen von Brashear wohl ebenso, wenn nicht noch vollkommener, eben sein werden wie die Quarzfläche von Zeiss). Andererseits ist den eventuellen Krümmungsfehlern praktisch durch die Kalibration (Abschnitt III) implicite zweifellos genügend Rechnung getragen. Sie können schließlich nur sehr unbedeutend sein, da die verschiedenen hohen Ordnungen keine fokalen Fehler zeigten.

(Eingegangen 26. Februar 1907.)

**14. Berichtigung zu meiner Arbeit:
„Die Plancksche Theorie der Strahlung etc.“;
von A. Einstein.**

In der genannten, im Januarheft dieses Jahres erschienenen Arbeit habe ich geschrieben: „Nach Drudes Untersuchungen sind es die ponderablen Atome (Atomionen) selbst, welchen diese Eigenfrequenzen zuzuschreiben sind. Es liegt also am nächsten, als Träger der Wärme in festen Körpern (Isolatoren) ausschließlich die positiven Atomionen zu betrachten.“

Dieser Satz ist in zwei Beziehungen nicht aufrecht zu erhalten. Erstens sind nicht nur positiv, sondern auch negativ geladene Atomionen anzunehmen. Zweitens aber — und dies ist das Wesentliche — wird durch Drudes Untersuchungen nicht die Annahme gerechtfertigt, daß jedes schwingungsfähige Elementargebilde, welches als Träger von Wärme auftritt, stets eine elektrische Ladung besitze. Man kann also wohl aus der Existenz eines Absorptionsgebietes (unter den angegebenen Einschränkungen) auf die Existenz einer Gattung von Elementargebilden schließen, welche zur spezifischen Wärme einen Beitrag von charakteristischer Temperaturabhängigkeit liefert; der umgekehrte Schluß ist aber nicht statthaft, da es sehr wohl ungeladene Wärmeträger geben kann, d. h. solche, die sich optisch nicht bemerkbar machen. Letzteres ist besonders zu erwarten bei chemisch nicht gebundenen Atomen.

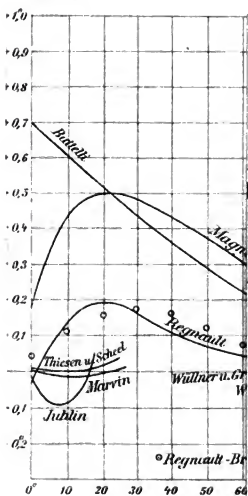
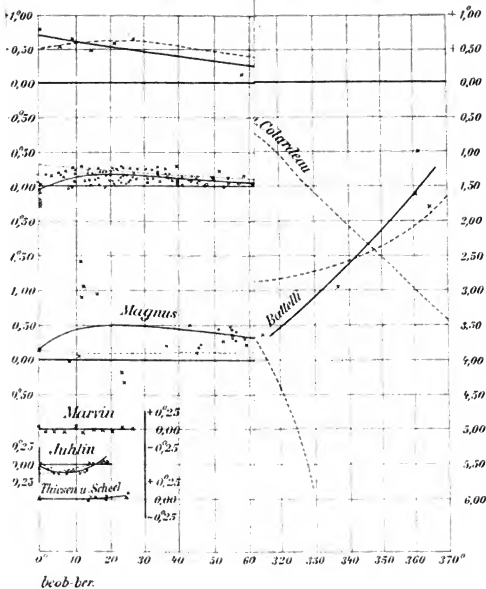
Der im letzten Satz der Abhandlung aus den Eigenschaften der spezifischen Wärme des Diamanten gezogene Schluß ist daher ebenfalls unstatthaft. Es sollte heißen:

„Es ist also nach der Theorie zu erwarten, daß der Diamant entweder bei $\lambda = 11 \mu$ ein Absorptionsmaximum aufweist, oder daß derselbe überhaupt keine optisch nachweisbare ultrarote Eigenfrequenz besitzt.“

(Eingegangen 3. März 1907.)

Berichtigung.

Bd. 22, p. 287 ist Zeile 4 von unten in Gleichung (2) der Buchstabe π zu streichen.



ungsdruck p des
Wasserdampfes.

nach Interpolation des
Beobachters.

graphisch neu inter-
poliert.

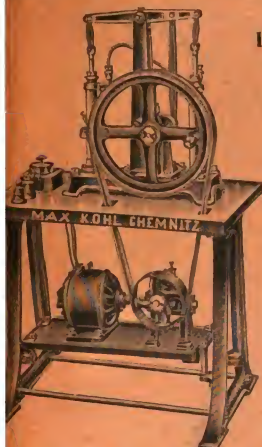
Abweichung (in Grad) von



MAX KOHL, Chemnitz i. S.



beits- (Praktikanten-) Tische
 Den möglichen Ausführungen, ganz den je-
 wigen örtlichen Verhältnissen angepaßt.



diombromid von Überraschender
 chemisch reln. Wirkung; ———
 Preis auf Anfrage.

Experimentier-Schalttafeln

für Lehranstalten u. Laboratorien, als Wandtableau
 und in Form fahrbarer Tische ausgeführt, gestatten
 die Verwendung

des Stromes
 städtischer Cen-
 tralen bis 110, 161,
 220 Volt u. 20 oder
 30 Amp. für alle
 im Experimental-
 unterricht vor-
 kommende Arbei-
 ten. Die Schalt-
 tafeln sind für
 kleine und große
 Stromstärken bei
 beliebigen Span-
 nungen von 0,3 bis
 110 resp. 220 Volt
 zu verwenden.

Höhere Span-
 nungen als wie
 eingestellt, treten
 auch bei Strom-
 unterbrechung
 nicht auf. — Es ist
 damit also einem
 wirklichen, lang
 gefühlten Bedürf-
 nis abgeholfen.

1a. Referenzen. Man verlange Spezial-Prospekt!



D. D. Thermoskope nach Kolbe
 in neuester, verbesserter Ausführung.

Neu!

Öl-Luftpumpen

System Kohl, D.R.P. 169180.

Allein-Vertrieb

und Alleinberechtigung zur Fabrikation.

Die Pumpe verdünnt bis auf 0,0006 mm
 und verspritzt während des Pumpens
 kein Öl! Sie eignet sich vorzüglich zum
 Auspumpen von Röntgen-Röhren.

Man verlange Spezial-Prospekt!

Neue rotierende

Quecksilber-Hochvakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede, D.R.P. angemeldet.

Einfachste Konstruktion, sehr hohes Vakuum,
 geringe Wartung, einfachste Handhabung.

Hochvakuum-Pumpen liefern Vakua bis zu
 0,00015 mm in 14 Minuten in einem Raum
 von 300 cem.

Weltausstellung Lüttich 1905: 2 Grands Prix!

Ausstellung St. Louis 1904: Grand Prix und Gold. Medaille,

erhalten in der Sonderausstellung des Königl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im
 Auftrag der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsaales, letztere in der
 deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung: wissenschaftliche Instrumente.

Ehrendiplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Düsseldorf 1898.

Goldene Medallien Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900, Aussig 1903, Athen 1904.

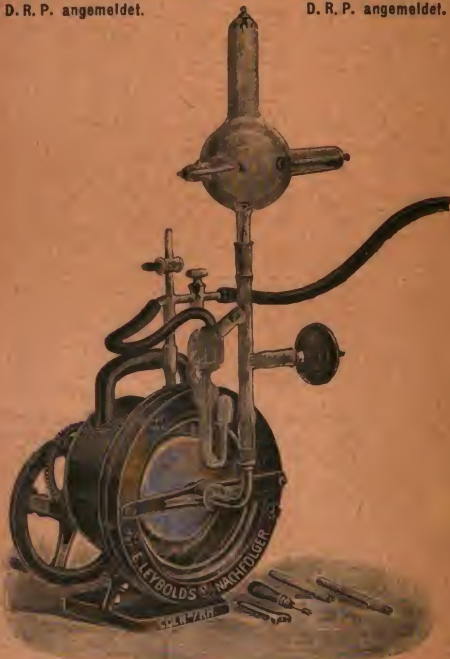
Liste mit ausführlichen Kostenanschlägen, Beschreibungen, Referenzen usw. gratis und franko.

E. Leybold's Nachfolger, Cöln a. Rh.

Alleinvertrieb und alleinige Berechtigung zur Fabrikation der
Neuen Hoch-Vakuum-Pumpe
nach Dr. Gaede.

D. R. P. angemeldet.

D. R. P. angemeldet.



Die Pumpe evakuiert in $2\frac{1}{2}$ Minuten eine Röntgenröhre von Atmosphärendruck bis auf Röntgenvakuum, ein 6 Liter-Gefäß in 10 Minuten von 10 mm Druck bis auf 0,0016 und in 25 Minuten ein 6 Liter-Gefäß von 10 mm Druck auf 0,00003 mm.

Die Pumpe ermöglicht in kürzester Zeit die höchsten bisher erreichten Verdünnungen zu erzielen.

Preis ohne Quecksilber Mark 330.—.

Alleinige Inseratenannahme durch: Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Ulrichstr.

Druck von Meißner & Witsig in Leipzig.

1907.

N^o 5.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 22. HEFT 5.

DER GANZEN REIHE 327. BANDES 5. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1907.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

Diesem Hefte liegt ein Porträt Curie's bei, dessen Tod sich nunmehr jährt.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 2. Mai 1907.)

I n h a l t.

	Seite
1. E. Grüneisen. Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen. I. Der dynamisch und statisch gemessene Elastizitätsmodul	801
2. R. Küch und T. Retzchinsky. Untersuchung über selektive Absorption im Quecksilberlichtbogen. (Hierzu Taf. IV, Figg. 1 u. 2.)	852
3. Kurd von Mosengeil †. Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum	867
4. Bruno Monasch. Über den Energieverlust im Dielektrikum in wechselnden elektrischen Feldern	905
5. Franz Kiebitz. Interferenzversuche mit freien Hertzschen Wellen	943
6. Hans Geiger. Strahlungs-, Temperatur- und Potentialmessungen in Entladungsröhren bei starken Strömen	973
7. Hans Lohmann. Beobachtungen zur Herstellung und Messung hoher Spannungen	1008

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 22.

1. Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen.

I. Der dynamisch und statisch gemessene Elastizitätsmodul; von E. Grüneisen.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Inhalt: *Einleitung.* — 1. *Methode der freien Transversalschwingungen.* § 1. Die gewöhnliche Formel zur Berechnung von E . § 2. Korrektur wegen der Rotationsenergie. § 3. Korrektur wegen ungleichmäßigen Querschnitts. § 4. Versuchsergebnisse. — 2. *Methode der freien Longitudinalschwingungen.* — § 5. Korrektur wegen Querkontraktion ist zu vernachlässigen. § 6. Korrektur wegen ungleichmäßigen Querschnitts. § 7. Versuchsergebnisse. — 3. *Methode statischer Dehnungen.* § 8. Anwendung des Interferenzprinzips auf Dehnungsmessungen. § 9. Haidinger'sche Ringe in planparallelen Platten. § 10. Optische Versuchsanordnung. § 11. Aufhängung und Belastung des Stabes. § 12. Beobachtung der Ringverschiebung und Berechnung der Stabdehnung. § 13. Schutz gegen Temperaturschwankungen. § 14. Vorbereitung und Durchführung der Versuche. § 15. Elastische Nachwirkung und die Versuche am Bleistabe. § 16. Zusammenstellung der Versuchsergebnisse. — 4. *Besprechung des Zahlenmaterials.* § 17. Vergleich der drei Methoden, mit Rücksicht auf die Homogenität der Stäbe. § 18. Unterschied zwischen isothermem und adiabatischem Elastizitätsmodul. § 19. Änderung des Elastizitätsmoduls mit der Spannung. § 20. Einfluß der mechanischen und thermischen Behandlung, sowie der Zusammensetzung des Materials. § 21. Vergleich mit bisher bekannten Zahlen. — *Zusammenfassung der Ergebnisse.*

Einleitung.

Der Plan der hier im ersten Teile vorliegenden Untersuchung ist, die elastischen Konstanten für Metalle einer erneuten Bestimmung zu unterziehen. Der Reichsanstalt stehen Metalle in Form von Stäben zur Verfügung, die dadurch einen erheblichen Wert besitzen, daß ihre chemische Zusammensetzung einigermaßen bekannt und eine Anzahl physikalischer Konstanten an ihnen bereits bestimmt ist.¹⁾ Es sind bis auf

1) Besonderer Dank gebührt der Firma Heraeus in Hanau und der Gold- und Silberscheideanstalt in Frankfurt a/M., durch deren Entgegenkommen die wertvollen Stäbe aus Platin, Palladium, Rhodium, Iridium und Gold der Reichsanstalt leihweise zur Verfügung stehen.

wenige Ausnahmen die gleichen Stäbe, welche die Herren Jaeger und Diesselhorst¹⁾ ihren Untersuchungen über Wärme- und Elektrizitätsleitung zugrunde gelegt haben. Seitdem man weiß, welche Bedeutung gerade für die eben genannten Eigenschaften die Reinheit eines Metalles hat, sind viele Unstimmigkeiten früherer Beobachtungen auf diesem Gebiete erklärlich geworden. So liegt der Versuch nahe, auch hinsichtlich der elastischen Eigenschaften Ursachen ausfindig zu machen, welche die zum Teil recht geringe Übereinstimmung zwischen den von verschiedensten Seiten vorliegenden Beobachtungen erklären könnten. Weder der Einfluß mechanischer oder thermischer Behandlung, noch derjenige der chemischen Zusammensetzung scheint mir bisher hinreichend festgestellt zu sein. Nur ein umfangreiches und sicheres Zahlenmaterial kann nach dieser Richtung hin Aufklärung bringen. Daß nebenbei auch die Größe der Deformation und die Art und Weise, wie bleibende Dehnungen oder elastische Nachwirkung in Rechnung gezogen werden, auf den beobachteten Elastizitätsmodul von Einfluß sind, ist seit den Untersuchungen von Miller²⁾, Thompson³⁾, Bach⁴⁾ u. a. bekannt.

Abgesehen von dem technischen Interesse an der Feststellung der elastischen Eigenschaften ist deren Kenntnis auch für molekulartheoretische Betrachtungen grundlegend. Mehr von diesem Gesichtspunkte aus hatte Hr. Voigt⁵⁾ seine Untersuchung über die Elastizitätskonstanten der Metalle unternommen. Die im folgenden mitgeteilten Zahlen dürften eine willkommene Ergänzung der seinigen bilden, zumal sie sich auf sehr kleine Deformationen beziehen, auf die allein theoretische Betrachtungen im allgemeinen anwendbar sein werden. So hat z. B. Hr. Voigt⁶⁾, an ein Resultat Wertheims anknüpfend, theoretisch einen Zusammenhang zwischen den

1) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, *Wissensch. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt* 3. p. 269. 1900.

2) A. Miller, *Münch. Sitzungsber.* 1. p. 9. 1885; *Abh. d. k. bayr. Akad.* 15. p. 707. 1886.

3) J. O. Thompson, *Wied. Ann.* 44. p. 555. 1891.

4) C. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, 4. Aufl. 1902. Einleitung.

5) W. Voigt, *Wied. Ann.* 48. p. 674. 1893.

6) W. Voigt, *Wied. Ann.* 49. p. 396. 1893.

elastischen Konstanten und dem Elementargesetz der Wechselwirkung zwischen zwei Atomen abgeleitet. In Verbindung mit dieser Theorie ergibt sich aus seinen Versuchen, daß für Al, Fe, Au, Ag, Mg, Ni, Zn und Cu die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Atomen bei gleicher Entfernung nahezu gleiche Intensität besitzt, also vom Atomgewicht unabhängig ist. Nur Cd, Bi und Sn machten eine Ausnahme. Meine Versuche zeigen nun aber, daß man doch wohl auch Zn und Fe, besonders aber die Platinmetalle zu den Ausnahmen rechnen muß. Auf diese theoretischen Spekulationen näher einzugehen, wird allerdings erst nach Abschluß der Experimentaluntersuchung ratsam sein.

Bisher liegen meinerseits nur Messungen des Elastizitätsmoduls (E , „Youngs modulus“) vor, welche abgesehen von dem resultierenden Zahlenmaterial dadurch ein selbständiges Interesse haben, daß sie nach verschiedenen Methoden ausgeführt sind und einen Vergleich derselben gestatten.

Die Stabdimensionen (Länge etwa 27 cm, Durchmesser 1 bis 2 cm) ließen eine Methode besonders bequem erscheinen, die verhältnismäßig selten benutzt wird, nämlich die der freien Transversalschwingungen. Es scheint, daß gegen die Anwendung der Transversalschwingungen ein Mißtrauen besteht, das vielleicht durch die in den Wertheimschen¹⁾ Versuchen mangelnde Übereinstimmung mit anderen Methoden hervorgerufen ist. Die hier mitgeteilten Versuche beweisen jedoch, daß man selbst bei ziemlich kurzen, dicken Stäben nach dieser Methode eine zuverlässige Bestimmung des Elastizitätsmoduls ausführen kann, wenn man sich des Grundtons bedient. Mit Oberschwingungen habe ich zu wenige Versuche ausführen können, um die Berechtigung ihrer Anwendung zu prüfen. Es scheint aber, daß hier Vorsicht geboten ist, weil eine wegen des Einflusses der Rotationsbewegung angebrachte, immerhin aber nur angenäherte Korrektur für die erste Oberschwingung bereits mehrere Prozent betragen kann. Neuerdings hat Hr. F. A. Schulze²⁾ Transversalschwingungen einseitig geklemmter dünner Platten zur Messung ihrer Elastizi-

1) G. Wertheim, Pogg. Ann. Ergbd. 2. p. 1. 1848.

2) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 13. p. 583. 1904; 14. p. 848. 1904.

tätsmoduln benutzt und dabei für Grund- und Obertöne übereinstimmende Resultate erhalten.

Mehr Vertrauen wird im ganzen die Methode verdienen, welche auf einfache Dehnungen des Stabes zurückgeht und im folgenden für sehr kleine Deformationen ausgearbeitet worden ist. Eine der bekanntesten Methoden, die der Longitudinalschwingungen, ließ sich nur bei wenigen Stäben anwenden.

1. Methode der freien Transversalschwingungen.

§ 1. Die gewöhnliche Formel zur Berechnung von E .

Bezüglich der Theorie der Transversalschwingungen von Stäben verweise ich auf Lord Rayleighs¹⁾ Sound I, Ch. 8, wo auch die ältere Literatur angegeben ist²⁾, und beschränke mich auf eine kurze Wiedergabe der hier in Betracht kommenden Gleichungen, wobei ich mich an die von Lord Rayleigh gegebene Darstellung anschließe.

Der Stab habe auf seiner ganzen Länge denselben kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d . Seine Längsachse falle in die x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und reiche von $x=0$ bis $x=l$. Die Schwingung finde in der xy -Ebene statt, so daß bei hinreichend kleinen Schwingungen die Verschiebung eines Stabquerschnittes in Richtung der y -Achse fällt. Sie werde mit η bezeichnet. Die bei der Biegung des Stabes notwendig eintretende Drehung der Querschnitte mag vorläufig unbeachtet bleiben, was freilich nur erlaubt ist, wenn der Durchmesser gegen die Länge des Stabes klein ist.

Dann ist nach der Theorie η als Funktion der Abszisse x und der Zeit t gegeben durch

$$(1) \quad \eta = u \cos p t,$$

wo u die Ordinate η zur Zeit größter Elongation bedeutet und sich als Funktion von x darstellen läßt durch

1) Lord Rayleigh, The Theorie of Sound, 2. Ed. London 1894.

2) Über eine angenäherte Theorie, die auf kompliziertere Stabformen anwendbar ist, vgl. J. Morrow, Phil. Mag. (6) 10. p. 113. 1905 und 11. p. 354. 1906.

$$(2) \quad \begin{cases} u = (\sin m - \sin h m) \left(\cos \frac{m x}{l} + \cos h \frac{m x}{l} \right) \\ \quad - (\cos m - \cos h m) \left(\sin \frac{m x}{l} + \sin h \frac{m x}{l} \right). \end{cases}$$

Rechts kann man sich noch einen die Größe der Amplitude bestimmenden konstanten Faktor hinzudenken. Die Zahl m ist eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$\cos m \cdot \cos h m = 1$$

und hat für die Grundschiwingung den Wert

$$m = 4,730,$$

für die erste Oberschiwingung

$$m = 7,853.$$

Die Frequenz der Schwiwingung p ist als Funktion der Dimensionen l, d , des Elastizitätsmoduls E und der Dichte s des Stabes gegeben durch

$$p = \frac{m^2 d}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

woraus umgekehrt für den Elastizitätsmodul folgt

$$(3) \quad E = \frac{16}{m^4} \frac{s l^4 p^2}{d^2} \text{ [C.G.S.]},$$

oder, wenn man die Schwiwingungszahl $n = p/2\pi$ und das in der Physik gebräuchliche Maß des Elastizitätsmoduls $[\text{kg/mm}^2]$ einführt,

$$(3a) \quad E = \frac{64 \pi^2}{981 \cdot 10^5 m^4} \frac{s l^4 n^2}{d^2}.$$

Bei der Berechnung von u ergeben sich für die Grundschiwingung zwei Knoten, welche um $0,2242l$ von den Stabenden entfernt liegen, für die erste Oberschiwingung drei Knoten, von denen einer in der Mitte liegt, die beiden anderen um $0,1321l$ von den Stabenden entfernt sind.

§ 2. Korrektur wegen der Rotationsenergie.

Bisher ist vorausgesetzt, daß jeder Stabquerschnitt nur eine translatorische Bewegung in der y -Richtung ausführt. Es soll jetzt der Einfluß der Drehung der Querschnitte auf die Frequenz der Schwiwingung berechnet werden. Wir schlagen dabei denselben Weg ein, den Lord Rayleigh in § 186 l. c. beim einseitig geklemmten Stabe benutzt hat.

Nach dem Energieprinzip ist, ungedämpfte Schwingung vorausgesetzt, die potentielle Energie des Stabes zur Zeit größter Elongation gleich der kinetischen Energie beim Durchgang durch die Ruhelage. In der potentiellen Energie tritt E als Faktor auf, daher wird E aus der Gleichung des Energieprinzips zu klein gefunden, wenn für die kinetische Energie nur die Energie der Translationsbewegung eingesetzt wird. Wir machen nun für das Folgende noch die Annahme, daß der Einfluß der Rotationsenergie klein sei und deshalb auch die Form des schwingenden Stabes, die unter Vernachlässigung der Rotationsenergie durch Gleichung (2) gegeben ist, noch nicht merklich verändere. Bezeichnet daher ϱ das Verhältnis der Rotationsenergie zur Translationsenergie, so muß der nach der Formel (3) berechnete Elastizitätsmodul im Verhältnis $1 + \varrho$ vergrößert werden.

Für die Berechnung der Rotationsenergie ist zu bedenken, daß das Trägheitsmoment eines kreisförmigen Querschnittes q in bezug auf einen Durchmesser gleich ist $q(d^2/16)$. Also ist die Rotationsenergie des ganzen Stabes

$$R = \frac{1}{2} s q \int_0^l \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial x \partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} s q \frac{d^2}{16} \frac{p^2 m^2 \sin^2 p t}{l^2} \int_0^l u'^2 dx.$$

u' soll die Ableitung von u nach $m x/l$ sein. Nun ist nach § 165, (1) (Rayleigh, l. c)

$$\int_0^l u'^2 dx = -\frac{l}{4m} [6 u u' + m u'^2]_{x=l},$$

also wird

$$R = \frac{1}{8} s q p^2 \sin^2 p t \cdot \frac{m d^2}{16 l} [6 u u' + m u'^2]_l.$$

Die kinetische Energie der translatorischen Bewegung ist

$$T = \frac{1}{2} s q \int_0^l u^2 p^2 \sin^2 p t dx = \frac{1}{8} s q p^2 \sin^2 p t \cdot l (u^2)_l,$$

weil nach § 164, (9)

$$\int_0^l u^2 dx = \frac{1}{4} l (u^2)_l.$$

Demnach ergibt sich für das oben mit ϱ bezeichnete Verhältnis

$$\varrho = \frac{R}{T} = \frac{m d^2}{16 l^2} \left[6 \frac{u'}{u} + m \left(\frac{u'}{u} \right)^2 \right]_{x=l}.$$

Für den Grundton ($m = 4,730$) findet sich

$$\left(\frac{u'}{u} \right)_l = 0,9825,$$

für den ersten Oberton ($m = 7,853$) würde $(u'/u)_l$ bereits gleich 1 zu setzen sein. Für den Grundton wird also das aus Formel (3) berechnete E zu vergrößern sein um den Faktor

$$1 + \varrho = 1 + 3,09 \left(\frac{d}{l} \right)^2,$$

für den ersten Oberton um den Faktor

$$1 + \varrho = 1 + 6,80 \left(\frac{d}{l} \right)^2.$$

§ 3. Korrektur wegen ungleichmäßigen Querschnitts.

Bisher wurde der Stabquerschnitt als gleichmäßig auf der ganzen Länge des Stabes und als kreisförmig angenommen. Bei einigen der untersuchten Stäbe sind diese Annahmen jedoch nicht mehr hinreichend erfüllt. Es soll hier deshalb eine Korrektur angegeben werden, welche die Ungleichmäßigkeit des Querschnittes längs des Stabes berücksichtigt. Die Annahme der Kreisform aber werde beibehalten (vgl. § 4).

Die von Lord Rayleigh § 185 (l. c.) gegebene Korrektionsformel können wir schreiben, wenn

$$\frac{d_x - d_0}{d_0} = \alpha_x$$

die verhältnismäßige Abweichung des Stabdurchmessers an der Stelle x von seinem Mittelwerte d_0 bezeichnet, und p_0 die Frequenz für den Fall, daß der Stab den gleichmäßigen Durchmesser d_0 besäße,

$$p^2 = p_0^2 \left\{ 1 + \frac{4}{l u_0^2} \int_0^l 4 \alpha_x u''^2 dx - \frac{4}{l u_0^2} \int_0^l 2 \alpha_x u'^2 dx \right\}.$$

Das Integrationsgebiet 0 bis l werde in ν gleiche Teile von

der Länge l/ν zerlegt, wo ν so groß ist, daß für jeden Teil α_x als konstant angesehen werden kann, dann wird

$$p^2 = p_0^2 \left\{ 1 + \frac{8}{l u_1^2} \sum_{t=1}^{t=\nu} \alpha_t \int_{(t-1) \frac{l}{\nu}}^{t \frac{l}{\nu}} (2 u''^2 - u^2) dx \right\}.$$

Führen wir schließlich auch für die Integrale über u''^2 und u^2 Mittelwerte ein durch die Substitutionen

$$\int_{(t-1) \frac{l}{\nu}}^{t \frac{l}{\nu}} u''^2 dx = \frac{l}{\nu} u_t''^2, \quad \int_{(t-1) \frac{l}{\nu}}^{t \frac{l}{\nu}} u^2 dx = \frac{l}{\nu} u_t^2,$$

so ergibt sich

$$p^2 = p_0^2 \left\{ 1 + \frac{8}{\nu u_1^2} \sum_{t=1}^{t=\nu} \alpha_t (2 u_t''^2 - u_t^2) \right\}.$$

Der mit der beobachteten Frequenz p und einem mittleren Durchmesser d_0 aus Gleichung (3) berechnete Elastizitätsmodul E erhält also den Korrekturfaktor

$$\frac{p_0^2}{p^2} = 1 + \delta,$$

wenn der Kürze halber

$$\delta = - \frac{8}{\nu u_1^2} \sum_{t=1}^{t=\nu} \alpha_t (2 u_t''^2 - u_t^2) = \sum_{t=1}^{t=\nu} \alpha_t A_t$$

gesetzt wird.

Es möge genügen $\nu = 20$ anzunehmen, α werde also gemessen an den 20 Mittelpunkten der Teilstrecken, also bei

$$x = \frac{1}{40} l, \quad \frac{3}{40} l, \quad \dots \quad \frac{39}{40} l.$$

Für dieselben Stellen werde aus Gleichung (2) u_t und u_t'' , und schließlich der Koeffizient von α_t berechnet, nämlich

$$A_t = - \frac{8}{\nu u_1^2} (2 u_t''^2 - u_t^2).$$

Dann ergeben sich für die Grundschiwingung folgende Werte dieses Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_{20} = + 0,31, \\
 A_2 &= A_{19} = + 0,17, \\
 A_3 &= A_{18} = + 0,06, \\
 A_4 &= A_{17} = - 0,03, \\
 A_5 &= A_{16} = - 0,11, \\
 A_6 &= A_{15} = - 0,17_5, \\
 A_7 &= A_{14} = - 0,24, \\
 A_8 &= A_{13} = - 0,29_5, \\
 A_9 &= A_{12} = - 0,33_5, \\
 A_{10} &= A_{11} = - 0,35_5,
 \end{aligned}$$

$$\sum_1^{20} A_i = - 2.$$

Sind alle α gleich, ist also der Stabdurchmesser zwar überall gleich, aber bei der Berechnung von E aus Gleichung (3) mit einem falschen Werte d_0 eingesetzt, so wird

$$\delta = - 2 \alpha,$$

wie das auch ohne weiteres aus dem Auftreten von d^2 im Nenner der rechten Seite von Gleichung (3) zu entnehmen ist.

§ 4. Versuchsergebnisse.

Die Grundtöne der freien transversalen Eigenschwingungen der Stäbe wurden erzeugt, indem man die Stäbe an den beiden Knoten in Fadenschlingen horizontal aufhing und in der Mitte mit einem Gummiball anschlug. Ihre Schwingungszahlen wurden, soweit es angängig war, aus der Zahl von Schwebungen bestimmt, die sie mit den Grundtönen eines Monochords gaben. Dieses wurde durch Veränderung des spannenden Gewichtes und bei einer zweiten Versuchsreihe durch Veränderung der Saitenlänge einerseits auf die Stabtöne eingestellt, andererseits auf die Grundtöne oder höheren Oktaven von vier Stimmgabeln mit den Schwingungszahlen 323,2; 385,7; 436,5; 510,7. Dadurch konnten unabhängig von der Gültigkeit des Saitengesetzes die Stabtöne indirekt an die Stimmgabeltöne angeschlossen werden.

Nun war es aber nicht immer möglich, länger anhaltende Stabtöne zu erzeugen. Es ist ja bekannt, wie stark der Schall

z. B. im Blei gedämpft wird. In schwächerem, aber noch sehr störendem Maße ist dasselbe der Fall beim Kadmium, Zinn, Wismut, also den Metallen, die nächst dem Blei die stärkste elastische Nachwirkung bei kleinen Dehnungen zeigen (§ 15). Auch der Stab aus Rhodium zeigt starke Dämpfung.¹⁾ Bei solchen Materialien konnte die Tonhöhe des Monochords nur nach dem Gehör mit der des Stabes in Einklang gebracht werden, wobei die Genauigkeit der Tonhöhebestimmung zweifellos geringer einzuschätzen ist, als wenn Schwebungen gezählt werden können.

Eine weitere Schwierigkeit ergab sich dann, wenn der Stab zwei Grundtöne besaß, die miteinander Schwebungen gaben. Sie können mehr oder weniger isoliert erhalten werden, wenn man die Schwingungen in einer der beiden aufeinander senkrechten Ebenen maximalen oder minimalen Biegemomentes erzeugt. Beim Rhodium fand ich z. B. bei einem Versuch für den höheren Ton 996, für den tieferen 986 Schw./Sek. Von den übrigen Stäben zeigten stärkere Schwebungen in sich Zink I und II, Rotguß, Platin, Palladium und Gußeisen A6. Den möglichen Zusammenhang dieser Erscheinung mit den Abweichungen vom kreisförmigen Querschnitt habe ich nicht verfolgt, da mit gleichem Recht auch Inhomogenitäten des Stabinnern hätten in Betracht gezogen werden müssen. Solche sind in Form von Poren vorhanden im Zink II, Kadmium, Blei, Zinn, Wismut, denn diese Stäbe zeigen schon oberflächlich Löcher. Aber auch bei anderen gegossenen Stäben muß mit der Möglichkeit von Poren oder rißförmigen Zwischenräumen in der kristallinen Struktur gerechnet werden. Später (§ 17) wird hierauf näher eingegangen werden. Da es bei der Unsicherheit über die Verteilung solcher Inhomogenitäten unmöglich ist, ihren Einfluß zahlenmäßig zu berücksichtigen, so habe ich einfach die mittlere Tonhöhe zu bestimmen gesucht und mit einem kreisförmigen, wenn auch variablen Querschnitt und homogenem Material gerechnet (vgl. § 3).

Endlich sei noch erwähnt, daß die Temperatur, für welche die Eigentöne bestimmt sind, durch ein neben den Stab gehängtes Thermometer gemessen wurde. Die von diesem an-

1) Über Dämpfung von Schwingungen in Metallen vgl. E. Warburg, Pogg. Ann. 137. p. 632. 1869; W. Voigt, Wied. Ann. 47. p. 692. 1892.

gezeigten Temperaturen, die zwischen $17,5^{\circ}$ und 19° liegen, können jedoch von den Stabtemperaturen erheblich abweichen, da es sich nicht vermeiden ließ, bei Beobachtung der gedämpfteren Töne das Ohr dicht an den Stab heranzubringen. Die beobachteten Temperaturen, auf die allerdings wegen des geringen Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls hier wenig ankommt, sollen deshalb nicht einzeln angegeben werden.

Aus den erwähnten Fehlerquellen geht hervor, daß die nach der Methode der Transversalschwingungen angestellten Versuche zum Teil nur mäßige Genauigkeit haben können. Dies gilt für fast sämtliche gegossenen Stäbe (Zn, Cd, Pb, Sn, Bi, Pt II, Pd, Rh, Gußeisen A 6, Rotguß).

Tabelle 1.

	l cm	d_0 cm	s	n Schw./Sek.	ϱ	δ	E kg/mm ²
Aluminium	26,90	1,206 ₈	2,71	752,4	+0,0062	-0,0015	713 ₀
Kupfer IVa	26,18	1,196 ₀	8,96	573,4	,0064		1253 ₀
Silber	25,19	1,108 ₆	10,53	425,5	,0060	- ,0021	807 ₀
Gold I	26,99	1,207 ₈	19,22	294,0	,0062		782 ₀
„ II	27,69	1,154 ₅	19,21	270,3	,0054		801 ₀
Nickel	26,93	1,604 ₇	8,81	933,2	,0110		2038 ₀
Zink I*	27,01	1,193 ₇	7,17	509	,0060	- ,0064	891 ₀
„ II**	26,98	1,805	7,11	905,7	,0138		1237 ₀
Kadmium	26,95	1,798	8,63	535	,0138	- ,0021	524 ₀
Blei	27,04	1,802 ₈	11,32	271,3	,0137		178 ₆
Zinn	26,97	1,802 ₅	7,28	603	,0138		562 ₀
Platin II	27,04	1,614	21,39	550,0	,0110	- ,0059	1717 ₀
Palladium	26,98	1,610	11,96	608,0	,0110	+ ,0003	1176 ₀
Rhodium	27,05	1,606	12,23	992	,0109	+ ,0001	325 ₀₀
Iridium	26,07	1,733	22,49	1089	,0137	- ,0109	529 ₀₀
Eisen I	26,97	1,300 ₇	7,84	823,5	,0072		2154 ₀
„ II	26,94	1,601	7,85	1012	,0109		2148 ₀
„ III	27,53	1,802 ₇	7,85	1097	,0132		2176 ₀
Stahl	26,98	1,595 ₂	7,82	1002	,0108		2126 ₀
Gußeisen A 6	27,51	2,002 ₆	7,22	1000	,0164		1348 ₀
„ G K 3	27,50	2,010 ₁	7,11	894	,0165		1051 ₀
Wismut	26,98	1,795 ₈	9,78	403	,0137	- ,0020	339 ₀
Rotguß	26,94	1,468	8,40	564,5	,0092	- ,0094	841 ₀
Konstantan	26,96	1,997	8,92	1029	,0169	- ,0003	1636 ₀
Manganin	26,94	1,806	8,44	838	,0139	+ ,0014	1250 ₀

* 1,1 Proz. Blei.

** rein, löcherig.

Die Versuchsergebnisse sind in Tab. 1 vereinigt. Länge l , Durchmesser d_0 (gleich Mittelwert über die ganze Stablänge) und Dichte s sind zum großen Teil von den Herren Jaeger und Diesselhorst¹⁾ übernommen, n gibt die Schwingungszahl des Grundtones in der Sekunde, ϱ die Korrektur wegen der Rotationsenergie (§ 2), δ die wegen ungleichmäßigen Durchmessers (§ 3) und E den Elastizitätsmodul, wie er aus der vervollständigten Formel (3a)

$$(3b) \quad E = \frac{64 \pi^2}{981 \cdot 10^6 m^4} \cdot \frac{s l^4 n^2}{d_0^2} (1 + \varrho + \delta) \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \right]$$

berechnet wird. Die Korrektur δ , die ohnehin sehr klein ist, brauchte für die Stäbe von gleichmäßigem Querschnitt nicht berechnet zu werden, bei anderen (Pb, Sn, Zn II) wurde sie deshalb fortgelassen, weil die Bestimmung von E aus anderen Gründen zu ungenau ist, als daß diese Korrektur Bedeutung gehabt hätte.

Eine Besprechung des in Tab. 1 gewonnenen Zahlenmaterials folgt weiter unten im 4. Abschnitt § 17 ff.

In der Einleitung ist bereits erwähnt worden, daß meine Versuche, den Elastizitätsmodul aus dem ersten Oberton zu bestimmen, es zweifelhaft lassen, ob dessen Anwendung bei so kurzen und dicken Stäben einwandfrei ist. Hier seien in Tab. 2 diejenigen Versuche angeführt, bei denen der Oberton einigermaßen sicher, d. h. mittels Schwebungen zu bestimmen war. Seine Schwingungszahl werde mit n_1 bezeichnet, ϱ_1 sei die Korrektur wegen der Rotationsenergie (§ 2), E_1 der aus Gleichung (3b) berechnete Elastizitätsmodul, wobei jetzt

$$m = 7,853$$

zu setzen ist. Zum Vergleich ist der aus dem Grundton gefundene Wert E neben E_1 aufgeführt.

Tabelle 2.

	n_1 Schw./Sek.	ϱ_1	E_1 kg/mm ²	E kg/mm ²
Gold I . . .	804	+0,0136	7760	7820
Gold II . . .	738	0,0118	7900	8010
Palladium . .	1651	0,0242	11550	11760

1) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, l. c. p. 323.

2. Methode der freien Longitudinalschwingungen.

§ 5. Korrektur wegen Querkontraktion ist zu vernachlässigen.

Es mögen zunächst die Korrekturen besprochen werden, welche den in §§ 2 und 3 für die Transversalschwingungen abgeleiteten entsprechen.

Ist p die Frequenz (n = Schwingungszahl) der longitudinalen Grundschiwingung eines Stabes von der Länge l , so ist es gebräuchlich, E aus der Formel

$$E = \frac{p^2 l^2 s}{\pi^2} = 4 n^2 l^2 s$$

zu berechnen. Dabei wird nicht darauf Rücksicht genommen, daß der Stab bei den Längsschwingungen auch Querschwingungen vollführt, indem sich der Querschnitt bei Dehnung zusammenzieht und umgekehrt. Lord Rayleigh (l. c. § 157) gibt einen Korrektionsfaktor an, der die Querkontraktionsenergie berücksichtigt. Demnach wäre E noch zu multiplizieren mit

$$1 + \frac{\mu^2 \pi^2}{8} \frac{d^2}{l^2},$$

wo μ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation bedeutet und ungefähr den Wert von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ hat. Da selbst beim dicksten Stabe (Konstantan) die Korrektur unter 1 Promille bleibt, habe ich sie nicht angebracht.

§ 6. Korrektur wegen ungleichmäßigen Querschnittes.

Geringe Abweichungen vom gleichförmigen Querschnitt können in folgender Weise berücksichtigt werden.

Bezeichnet ξ die Verschiebung des longitudinal schwingenden Stabes, q wieder den Querschnitt, so ist seine potentielle Energie

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} E q \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx,$$

die kinetische Energie der Longitudinalbewegung

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} s q \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Der Querschnitt q sei längs x variabel und darstellbar durch

$$q = q_0(1 + \varepsilon_x),$$

wo q_0 den Mittelwert des Stabquerschnittes bezeichnet. Das Verhältnis ε_x sei so klein gegen 1, daß es auf die Gestalt des schwingenden Stabes ohne merkbaren Einfluß ist. Wir nehmen also die Verschiebung ξ in der für gleichmäßigen Durchmesser geltenden Form an

$$\xi = \cos \frac{\pi x}{l} \sin p t,$$

wo p die wirkliche Frequenz der Grundschwingung ist.

Führt man die Ausdrücke von ξ und q in V und L ein, so folgt

$$V = \frac{1}{2} E q_0 \frac{\pi^2}{l^2} \sin^2 p t \left[\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \int_0^l \varepsilon_x \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \right],$$

$$L = \frac{s q_0}{2} p^2 \cos^2 p t \left[\int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx + \int_0^l \varepsilon_x \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx \right].$$

Ebenso wie in § 3 denken wir uns hier wieder die Stablänge l in ν Abschnitte eingeteilt, für deren jeden ε_x als konstant angesehen werden darf. Für den t^{ten} Abschnitt gelte ε_t . Dann lassen sich auch die an zweiter Stelle stehenden Integrale in den [] abschnittsweise ausrechnen, und es wird

$$V = \frac{\pi^2 E q_0}{2 l^2} \sin^2 p t \left[\frac{l}{2} + \sum_{t=1}^{t=\nu} \frac{l}{2} \varepsilon_t \left\{ \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right\} \right],$$

$$L = \frac{s q_0}{2} p^2 \cos^2 p t \left[\frac{l}{2} + \sum_{t=1}^{t=\nu} \frac{l}{2} \varepsilon_t \left\{ \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right\} \right].$$

Die potentielle Energie im Zeitpunkt größter Elongation

$$V_{\text{max.}} = \frac{\pi^2}{4} \frac{E q_0}{l} \left[1 + \sum_t \varepsilon_t \left\{ \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right\} \right]$$

muß gleich sein der kinetischen Energie beim Durchschreiten der Ruhelage

$$L_{\max.} = \frac{1}{4} p^2 s q_0 l \left[1 + \sum_t \epsilon_t \left\{ \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right\} \right],$$

woraus für die Frequenz p mit Rücksicht auf die Kleinheit der Summenausdrücke die Beziehung folgt

$$p^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{E}{s} \left[1 - \sum_t \frac{\epsilon_t}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right) \right],$$

während für gleichmäßigen Querschnitt q_0 die bekannte Beziehung gelten würde

$$p_0^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{E}{s}.$$

Also wäre der nach der letzten Formel, aber mit der beobachteten Frequenz p berechnete Elastizitätsmodul zu korrigieren im Verhältnis

$$\frac{p_0^2}{p^2} = 1 + \delta,$$

wenn

$$\delta = \sum_t \frac{\epsilon_t}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right)$$

gesetzt wird.

Führen wir statt des Querschnittsfehlers ϵ_t durch die Substitution

$$\epsilon_t = 2 \alpha_t$$

wieder den des Durchmessers ein (vgl. p. 807), so nehmen die Koeffizienten von α_t ,

$$A_t = \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{\nu} - \sin \frac{2\pi(t-1)}{\nu} \right),$$

für den Fall, daß $\nu = 20$ gesetzt wird, folgende Zahlenwerte an, mit denen

$$\delta = \sum_{t=1}^{20} A_t \alpha_t$$

zu berechnen ist.

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{20} = +0,19 = -A_{10} = -A_{11}, \\ A_2 &= A_{19} = +0,18 = -A_9 = -A_{12}, \\ A_3 &= A_{18} = +0,14 = -A_8 = -A_{13}, \\ A_4 &= A_{17} = +0,09 = -A_7 = -A_{14}, \\ A_5 &= A_{16} = +0,03 = -A_6 = -A_{15}. \end{aligned}$$

Ungleichmäßigkeiten des Querschnittes auf $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ der Stablänge sind also einflußlos, an den Enden aber absolut genommen vom gleichen Einfluß wie in der Mitte.

§ 7. Versuchsergebnisse.

Die Methode der Longitudinalschwingungen konnte nicht auf alle Stäbe angewandt werden. Ihre Grundtöne lagen entsprechend den geringen Stablängen so hoch (5000 bis 8000 Schw./Sek.), daß nur die Kundtsche Methode der Staubfiguren zur Messung der Schwingungszahlen in Betracht kam. Diese verlangt aber starkes Tönen, das ich nur durch kräftige Hammerschläge gegen die Stabenden erzeugen konnte und natürlich nur bei Material, dessen Schwingungen wenig gedämpft sind. Da außerdem die durch das Schlagen bewirkte dauernde Deformation der Stabenden möglichst vermieden werden sollte, so habe ich mich darauf beschränkt, diese Messungen bei Platin, Palladium, Rotguß, Konstantan und Manganin durchzuführen. Diese Stäbe gaben einerseits gute Staubfiguren, andererseits ließen sie die Anwendung einer dritten Methode wegen mangelnder Übereinstimmung der beiden übrigen (vgl. Tab. 8, p. 838) wünschenswert erscheinen.

Die Stäbe gaben in einem Glasrohr von 78 cm Länge und 2,1 cm lichter Weite gut ausmeßbare Figuren aus Korkstaub oder Lycopodiumsamen. Die Anordnung der Versuche unterschied sich nicht wesentlich von der üblichen.¹⁾ Der Elastizitätsmodul wurde berechnet nach der Formel

$$(4) \quad E = \frac{331^2 (1 + 0,00367 \vartheta) l^2 s}{9810 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{e}{b}\right) \lambda^2} \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \right],$$

wo ϑ die vom Eispunkt an gerechnete Temperatur der Luft im Rohre, l die Stablänge, s die Dichte, λ den Abstand zweier Knoten im Rohre, b den Luftdruck und e den Partialdruck des Wasserdampfes daselbst bedeutet. Bei den ersten Versuchen wurde die Luftfeuchtigkeit nicht gemessen, deshalb nach der abgekürzten Formel²⁾

$$E = \frac{331^2 (1 + 0,004 \vartheta) l^2 s}{9810 \lambda^2}$$

1) Vgl. z. B. F. Kohlrausch, Lehrbuch X. Aufl. 53 u. 56 I, 1905.

2) F. Kohlrausch, l. c. p. 230.

gerechnet, den Versuchen aber nur halbes Gewicht gegeben. Bei den späteren Versuchen würde die abgekürzte Formel um etwa 3 Promille zu große E ergeben.

Tabelle 3.

	ϑ	$E_{\text{unkorr.}}$	d	δ	$E_{\text{korrr.}} \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \right]$
Platin	$18,8^\circ$ $18,7$ } $18,7_5$	17265 17250 } 17257	$-0,0060$	$-0,0077$	17021
Palladium	$15,3$ $17,5^*$ $18,0$ } $16,8$	11531 11613^* 11518 } 11542	$-0,0057$	$-0,0005$	11470
Rotguß	$18,0^*$ $15,2^*$ $18,1$ } $17,3$	8330^* 8375^* 8329 } 8341	$-0,0056$	$-0,0061$	8244
Konstantan	$19,0^*$ $17,9^*$ $18,9$ } $18,7$	16612^* 16637^* 16656 } 16640	$-0,0048$	$-0,0003$	16555
Manganin	$17,7$ $17,7$ } $17,7$	12684^* 12631 } 12649	$-0,0051$	$+0,0011$	12599

* Gewicht $\frac{1}{2}$.

In Tab. 3 sind neben den Versuchstemperaturen die nach den genannten Formeln berechneten Werte für E unter $E_{\text{unkorr.}}$ verzeichnet. Sie bedürfen aber, abgesehen von der in § 6 abgeleiteten Korrektur δ wegen variablen Durchmessers, noch einer zweiten wegen des Unterschiedes der Schallgeschwindigkeit im Rohre v gegen die in freier Luft v_0 . Nach der von G. Kirchhoff¹⁾ erweiterten Helmholtzschen²⁾ Korrektionsformel ist für ein Rohr vom Durchmesser D und einen Ton von der Schwingungszahl n

$$v = v_0 \left(1 - \frac{\gamma}{D \sqrt{\pi n}} \right),$$

wo γ nach Kirchhoff für jedes Gas sich aus dem Reibungskoeffizienten μ , der Wärmeleitfähigkeit κ , der Dichte σ , dem

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 134. p. 177. 1868.

2) H. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. 1. p. 383.

Verhältnis der spezifischen Wärmen k und der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen c_v in folgender Weise zusammensetzt¹⁾:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left\{ \sqrt{\mu} + \left(\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \sqrt{\frac{x}{c_v}} \right\}.$$

Bei experimentellen Prüfungen ist die Korrektion hinsichtlich der Abhängigkeit von D und n bestätigt worden, doch ist, wie auch schon Kirchhoff für wahrscheinlich hielt, ein empirischer Wert für γ einzusetzen, der etwas größer ist, als der theoretische (etwa 0,59 [C.G.S.] für Luft). Nach den Bestimmungen von Low²⁾, Stevens³⁾, J. Müller⁴⁾ wähle ich für mein Rohr

$$\gamma = 0,8.$$

Diese Zahl gilt, wenn D in cm, n in sek^{-1} gemessen wird.⁵⁾

Da in E das Quadrat von v eingeht, so ist der aus Gleichung (4) berechnete Wert zu multiplizieren mit

$$1 + \Delta = 1 - \frac{2\gamma}{D\sqrt{\pi n}}.$$

Die Δ sind in der vierten Kolumne von Tab. 3 verzeichnet. Kolumne 6 gibt die endgültigen Werte des Elastizitätsmoduls aus Longitudinalschwingungen, die sehr nahe übereinstimmen mit den aus Dehnungsversuchen gefundenen (vgl. Tab. 8, p. 838).

3. Methode statischer Dehnungen.

§ 8. Anwendung des Interferenzprinzips auf Dehnungsmessungen.

Den Elastizitätsmodul aus Längsdehnungen zu bestimmen, hat den Vorteil, daß alle Teile des Materials in der gleichen Weise beansprucht werden, daß man also am ehesten einen Mittelwert des Moduls erhält. Nun gehören aber erhebliche

1) Vgl. S. Valentiner, Ann. d. Phys. 15. p. 93. 1904.

2) W. Low, Wied. Ann. 52. p. 641. 1894; Phil. Mag. (5) 38. p. 249. 1894.

3) E. H. Stevens, Ann. d. Phys. 7. p. 285. 1902.

4) J. Müller, Ann. d. Phys. 11. p. 331. 1903.

5) Der im Lehrbuch von F. Kohlrausch, X. Aufl. p. 231 (56 I, 2), 1905 angegebene Korrektions-term für die Luftwellenlänge entspricht einem fast doppelt so großen Werte für γ .

Kräfte dazu, die fingerdicken Metallstäbe so stark zu dehnen, daß die üblichen Methoden zur Messung der Verlängerung angewandt werden können. In den modernen mechanisch-technischen Laboratorien sind Festigkeitsprobiermaschinen aufgestellt, in denen die Probestäbe auf hydraulischem Wege mit vielen Tonnen Gewicht auf Zug und Druck beansprucht werden können.¹⁾ Zur Messung der Verlängerung dienen dort verschiedene Formen von Spiegelapparaten. Hr. Martens²⁾ gibt an, daß seine Apparate in Verbindung mit Fernrohr und Skala Längenänderungen „bis auf Größen von der Ordnung 0,0001 mm schätzen lassen, gelegentlich aber auch schon bis auf 0,00002 mm benutzt wurden. Die Ablesungen können dabei bis auf wenige Schätzungseinheiten zuverlässig ausgeführt werden“. Doch ist dabei zu beachten, daß die Angaben der Spiegelapparate gerade nach kleinen Dehnungen hin unsicher werden können³⁾, insofern eine Art „toter Gang“ nicht ausgeschlossen erscheint.⁴⁾

Abgesehen davon, daß mir eine Festigkeitsprobiermaschine nicht zur Verfügung stand, und die Versuchsstäbe nicht die für deren Einspannvorrichtungen notwendige Form besitzen, erschien es auch aus dem Grunde wünschenswert, eine Methode für kleinere Dehnungen auszuarbeiten, weil der Elastizitätsmodul für eine Anzahl von Metallen sich als abhängig von der Größe der Deformation erwiesen hat (vgl. § 19), und es zunächst im Interesse der Physik liegt, den Grenzwert des Moduls für kleine Deformationen kennen zu lernen. Ein weiterer Grund für die Wahl kleiner Deformationen liegt in der Annehmlichkeit, von der elastischen Nachwirkung befreit zu sein.

Die eleganteste Methode, kleine Verlängerungen zu messen, beruht auf der Anwendung von Interferenzerscheinungen. Solche sind seit langer Zeit gebräuchlich zur Beobachtung thermischer Ausdehnungen und auch elastischer Deformationen.⁵⁾

1) A. Martens, *Materialienkunde* 1. Berlin 1898.

2) Das Königl. Materialprüfungsamt der Techn. Hochschule Berlin, *Denkschrift* bearb. von A. Martens u. M. Guth, p. 324. 1904.

3) C. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, IV. Aufl. p. 42 Anm. 1902.

4) A. Martens, *Materialienkunde* 1. p. 456. 1898.

5) Die einschlägige Literatur vgl. z. B. in Winkelmanns *Handbuch* 2. Aufl. VI Optik. p. 978. 1906.

Einfache elastische Dehnungen scheinen bisher jedoch noch nicht nach dem Interferenzprinzip gemessen zu sein. Eine ausführliche Beschreibung des benutzten Apparates ist an anderer Stelle gegeben worden.¹⁾ Hier genügt es, sein Prinzip klar zu legen. Bemerkt sei noch, daß sich Hr. F. Kohlrausch schon früher mit Plänen zu solchen Messungen beschäftigt hat.

§ 9. Haidingersche Ringe in planparallelen Platten.

Die Haidingerschen Ringe²⁾, welche ich benutzt habe, entstehen z. B., wenn monochromatisches Licht durch eine planparallele Schicht hindurchtritt, deren Grenzflächen das auffallende Licht teils durchlassen, teils reflektieren, durch die Interferenz der direkt und nach mehrfacher Reflexion hindurchgekommenen parallelen Strahlen. Vereinigt man diese durch eine Sammellinse auf deren Brennebene, so entsteht hier ein System von hellen und dunklen Ringen.

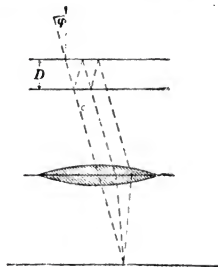


Fig. 1.

Betrachten wir einen Strahl, der aus Luft kommend mit dem Einfallswinkel φ auf die Luftschicht von der Dicke D trifft (Fig. 1). Die spiegelnden Grenzflächen seien durch einseitige schwache Versilberungen auf planparallelen Glasplatten gebildet. Dann ist der Gangunterschied zwischen den direkt und nach wiederholter Reflexion austretenden Strahlen

$$(5) \quad g = 2 D \cos \varphi,$$

oder ein ganzzahliges Vielfaches dieser Größe. Entsprechend diesem Gangunterschiede besteht eine bestimmte Helligkeit im Vereinigungspunkte der Strahlen in der Brennebene der auffangenden Linse. Gleiche Helligkeit herrscht auf dem

1) E. Grüneisen, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 27. p. 38. 1907.

2) Eine ausführlichere theoretische Behandlung vgl. z. B. bei O. Lummer, Müller-Pouillet's Lehrbuch 9. Aufl. 2. 1. § 349. 1897 und W. Feussner, Winkelmanns Handbuch 2. Aufl. VI Optik. p. 934. 1906.

ganzen Kreise, in dem sich alle die Strahlen des auffallenden Lichtes vereinigen, die den Neigungswinkel φ mit der Normalen der Planparallelschicht bilden.

Eine Änderung des Gangunterschiedes g um eine ganze Zahl von Wellenlängen λ des benutzten Lichtes wird die Helligkeit in jenem Vereinigungspunkte unverändert lassen.

Nun ändere sich g um $\nu \lambda$ ($\nu = 1, 2, 3 \dots$) *erstens* dadurch, daß D um

$$(6) \quad \Delta D = \frac{\nu \lambda}{2 \cos \varphi}$$

sich ändert, während der Einfallswinkel φ konstant bleibt. Dann werden sich die betrachteten Strahlen stets an demselben Punkte der Brennebene vereinigen, ihr Gangunterschied und damit die Helligkeit wird hier aber ν -mal wechseln, bis der ursprüngliche Wert wieder erreicht ist.

Eine Änderung von g kann aber *zweitens* dadurch hervor gebracht werden, daß das einfallende Licht seinen Einfallswinkel φ ändert, während die Schichtdicke D konstant bleibt. Für $\varphi = 0$ ist der Gangunterschied $2D$. Nehmen wir speziell an, $2D$ sei ein ganzzahliges Vielfaches von λ , so geben die Strahlen $\varphi = 0$ ein Ringzentrum mit maximaler Helligkeit. Lassen wir φ wachsen, bis g um $\rho \lambda$ abgenommen hat ($\rho = 1, 2, 3 \dots$), so wiederholt sich zum ρ^{ten} Male ein Helligkeitsmaximum im Vereinigungskreise der austretenden Strahlen. Die Winkel φ_ρ , bei denen dies geschieht, sind gegeben durch

$$2D - 2D \cos \varphi_\rho = \rho \lambda$$

oder

$$\cos \varphi_\rho = 1 - \frac{\rho \lambda}{2D}.$$

Wenn man nun, wie es hier geschah, bei Beobachtung des Ringsystems an Orte des zweiten oder dritten Ringes eine feste Marke anbringt, an der die bei einer Änderung von D vorüberwandernden Ringe gezählt werden, so hat man für ρ einzusetzen 2 oder 3. Bei Benutzung grünen Quecksilberlichtes ist $\lambda/2 = 0,000273 \text{ mm}$, D wurde zwischen 2 und 3 mm gewählt. Daraus folgt, daß $\cos \varphi_\rho$ nur um etwa 0,0003 von 1 verschieden ist.

Man darf daher unter den angegebenen Verhältnissen auch in Gleichung (6) $\cos \varphi = 1$ setzen und schreiben

$$(7) \quad \Delta D = v \frac{\lambda}{2}.$$

Die Dickenänderung der Planparallelschicht, welche am Orte des zweiten oder dritten Interferenzringes zum v^{ten} Male wieder die gleiche Helligkeit hervorbringt, kann also gleich dem v -fachen der halben Wellenlänge des benutzten Lichtes gesetzt werden.

§ 10. Optische Versuchsanordnung.

Um die soeben abgeleitete einfache Beziehung zur Messung der elastischen Stabdehnungen verwerten zu können, handelt es sich wesentlich darum, plane schwach versilberte Glasflächen so mit dem Stabe zu verbinden, daß sie einerseits eine zur Stabrichtung senkrechte, planparallele Luftschicht von etwa 2—3 mm Dicke begrenzen, andererseits die Abstandsänderung zweier möglichst voneinander entfernter Stabquerschnitte bei der Dehnung des Stabes mitmachen. Dann gibt nach § 9 die Anzahl der hervorquellenden oder versinkenden Ringe die Entfernungszunahme oder -abnahme jener Querschnitte in halben Lichtwellen.

Zur Verwirklichung des angegebenen Prinzips ist die in Fig. 2 schematisch skizzierte Anordnung getroffen.

S_1, S_2 und S_1', S_2' stellen zwei Glasplattenpaare vor, zwischen deren durchlässig versilberten inneren, d. h. einander gegenüberstehenden Grenzflächen die Interferenzringe erzeugt werden können. S_1 und S_1' sitzen an einem mit dem Querschnitt Q_1 des Stabes starr verbundenen Träger. Dieser hat die Form eines den Stab eng umschließenden Rohres aus Aluminium, an dessen unterem Ende drei Spitzenschrauben den Querschnitt Q_1 fassen, während am anderen Ende eine ringförmige Aluminiumplatte aufgesetzt ist mit zwei symmetrisch zur Mitte gebohrten Diaphragmen für die Platten S_1 und S_1' . Außerdem ist eine in der Figur nicht angedeutete Feinverstellung der Platten gegen den röhrenförmigen Träger bez. den Querschnitt Q_1 vorgesehen.

Die entsprechende Anordnung ist für die Platten S_2 u. S_2' getroffen.

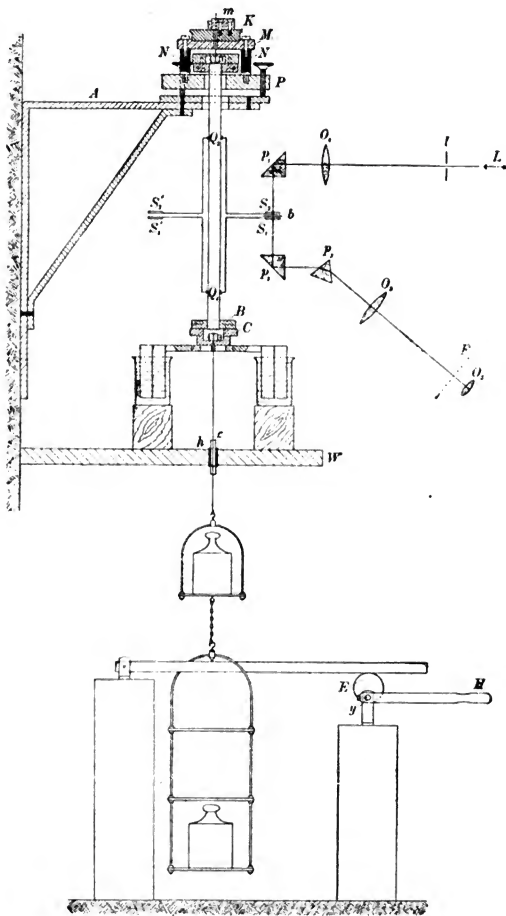


Fig. 2.

Die beiden Plattenpaare S_1, S_2 und S_1', S_2' sind notwendig, weil bei der Dehnung des Stabes *unvermeidliche Biegungen* auftreten¹⁾, die, wie leicht ersichtlich, zur gemessenen Abstandsänderung der spiegelnden Flächen einen Beitrag liefern können, offenbar aber eliminiert werden durch Beobachtung an zwei symmetrisch zur Stabachse gelegenen Planparallelschichten. *Das arithmetische Mittel der beiderseits gemessenen Verschiebungen gibt die wahre vom Biegungseinfluß befreite Dehnung.*

Die Symmetrie der wirksamen Plattenteile zur Stabachse wurde dadurch gesichert, daß man den Stab um seine Achse drehbar aufhing und die beiden durch eine halbe Umdrehung des Stabes vertauschbaren Plattenpaare nacheinander an derselben vom Stabe getrennt aufgestellten Blende b (Fig. 2) wirken ließ.

Infolgedessen bedurfte es auch nur *einer* vom Stabe getrennt aufgestellten optischen Einrichtung zur Erzeugung und Beobachtung der Interferenzringe. Sie ist in Fig. 2 schematisch angedeutet. Das von einer Quecksilberlampe L kommende Licht beleuchtet den Spalt t , dessen durch die Linse O_1 parallel gemachtes Licht vom Prisma p_1 total reflektiert und so durch die horizontale Interferenzluftplatte zwischen S_1 und S_2 geschickt wird. Hier entstehen die in § 9 besprochenen Interferenzen, die auf der Netzhaut eines auf Unendlich eingestellten Auges das in den Farben der Quecksilberlinien bunte Bild der Haidingerschen Ringe erzeugen, aus dem der Spalt t einen Streifen ausblendet. Zwecks genauer Messung der Ringverschiebung wird das aus S_1 austretende Licht durch das total reflektierende Prisma p_2 horizontal gerichtet, durch ein geradsichtiges Prisma p_3 (in Fig. 2 als gewöhnliches gezeichnet spektral zerlegt und durch das Objektiv O_2 des Fernrohres konvergent gemacht. Durch das Okular O_3 des Fernrohres sieht man dann in der Brennebene F von O_2 ein vergrößertes Bild der nach den Farben getrennten Ringsysteme. Alle Beobachtungen wurden an dem grünen System ($\lambda = 0,546 \mu$) ausgeführt, das hinreichend von den benachbarten gelben iso-

1) Biegungen können auch bei völlig zentriertem Angriff der Zugkräfte entstehen, wenn der Stab von vornherein Durchbiegungen besitzt oder inhomogen ist.

liert war. Der in der Brennebene sich gleichfalls abbildende Spalt wird so gerückt, daß er einen horizontalen, durch das Ringzentrum gehenden Streifen ausblendet (Fig. 3).

§ 11. Aufhängung und Belastung des Stabes.

Aus der in § 10 gegebenen Beschreibung der optischen Einrichtung ergeben sich folgende zwei Forderungen für die Aufhänge- und Belastungsvorrichtung des Stabes:

1. *Der Stab soll um seine Achse drehbar aufgehängt sein.*
2. *Bei beliebig häufiger Wiederholung der gleichen Belastung soll auch die gleiche, möglichst biegungsfreie Deformation des Stabes auftreten.*

Die Erfüllung der ersten Bedingung ist leicht, die der zweiten machte anfangs Schwierigkeiten.¹⁾ Schließlich wurde die Aufgabe gelöst durch folgende Anordnung.

Der Stab wird am oberen Ende seiner Längsachse von einer im Vergleich mit ihm selbst sehr dünnen, bez. biegsamen Stahlsaite getragen, die andererseits an einem Wandarm befestigt ist. Am unteren Ende der Stabachse greifen die Belastungsgewichte mittels einer gleichen Stahlsaite an.

Die Verbindung der Saitenenden mit den Stabenden geschieht durch Klemmvorrichtungen, die hier nicht näher beschrieben werden sollen.

Das obere Ende der oberen Saite von nur 2,5 cm freier Länge und 0,55 mm Durchmesser wird zwischen Klemmbacken *m* gehalten, die ihrerseits auf der drehbar gelagerten Kopfscheibe *K* so befestigt sind, daß die Saite und damit auch die Stabachse in die Drehachse von *K* zu liegen kommen. Das Lager von *K* ruht auf dem eisernen Wandarm *A*.

Die untere etwa 30 cm lange Saite ist mit möglichst geringer Reibung durch das Wandbrett *W* geführt, indem ein auf ihr *leicht gleitendes* Zylinderchen *c* mit schwacher Reibung in eine feste Hülse *h* des Wandbrettes paßt. Durch diese

1) Ein vergeblicher Versuch bestand z. B. darin, mit dem Stabe zwei in der Verlängerung seiner Achse liegende, ihm zugekehrte *Spitzen* starr zu verbinden, auf deren einer der Stab frei beweglich hing, während an der anderen die Belastungsgewichte angriffen. Die Spitzen bildeten offenbar keinen hinreichend konstanten Angriffspunkt.

Führung wird die Übertragung von Pendelungen der Gewichtsschalen auf den Stab ausgeschlossen. Die obere der beiden Schalen (0,27 kg) ist in eine Öse des Drahtes eingehängt und trägt die Dauerbelastung von meist 5 kg. Mit ihr ist durch eine kurze eiserne Kette die größere, zwecks bequemer Zentrierung der Gewichte dreiteilige Schale (1,12 kg) der Zusatzbelastungen verbunden, die durch einen Hebelarm bis zur Entlastung der Kette gehoben werden kann.

Dadurch ließ sich die Belastung und Entlastung des Stabes völlig *erschütterungsfrei* ausführen. Drehende oder pendelnde Schwingungen der Gewichtsschalen wurden durch weiche Pinsel, Erschütterungen des Stabes selbst durch zwei in Glyzeringefäße tauchende Dämpferflügel, die an der unteren Klemmvorrichtung des Stabes befestigt waren (Fig. 2), so gut wie vollständig beseitigt.

§ 12. Beobachtung der Ringverschiebung und Berechnung der Stabdehnung.

Fig. 3 soll das im Fernrohr gesehene Bild wiedergeben. Die Ringe sind vollständig gezeichnet, obwohl der außerhalb

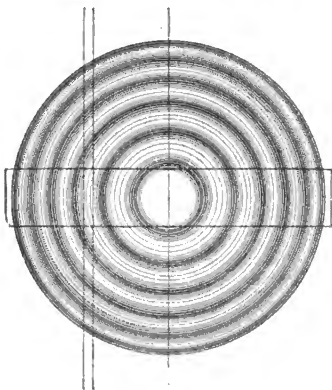


Fig. 3.

des horizontalen, durch das Spaltbild ausgeblendeten Streifens liegende Teil in Wirklichkeit nur schwach zu sehen ist. Auf diesem Streifen heben sich ein durch das Zentrum gehender, senkrechter Faden und ein auf den dritten hellen Ring links eingestellter Doppelfaden ab. Jener ist fest, dieser mikrometrisch in horizontaler Richtung verstellbar.

Tritt beim Belasten des Stabes lediglich eine Parallelverschiebung der Glasplatten ein, so wird das Ringzentrum an seinem Orte bleiben, die Ringe selbst aber werden

nach außen wandern. Ihre Verschiebung könnte, außer durch Abzählung der am Doppelfaden vorübergewanderten Streifen, durch Nachstellen des Doppelfadens auf den nächsten hellen Streifen mit der Mikrometerschraube ausgemessen werden. *Es ist aber zweckmäßiger, die Belastungsgewichte so abzugleichen, daß eine ganze Zahl von Ringen vorüberwandert*, also nach der Belastung das Ringbild die gleiche Gestalt hat wie vorher. Steht anfangs der Doppelfaden auf der Mitte eines hellen Streifens ein, so ist das auch nach der Belastung der Fall. Die Vorteile dieser Beobachtungsweise liegen in der wegen des Temperatureinflusses und elastischer Nachwirkung erwünschten Schnelligkeit und in der Bequemlichkeit, von Mikrometerablesungen befreit zu sein.

Nun erleiden aber die Platten kaum jemals eine reine Parallelverschiebung, sondern führen wegen der Biegung des Stabes zugleich kleine Drehungen aus, infolge deren sich das Ringzentrum im Gesichtsfelde des Fernrohres etwas verschieben kann. Während eine geringe Verschiebungskomponente in Richtung der Fäden ohne störenden Einfluß ist, wird durch eine gleiche Komponente senkrecht zu den Fäden bewirkt, daß verschiedene Belastungen π_l und π_r dazu gehören, um links und rechts vom Zentrum ν Ringe vorbeizuwandern zu lassen, oder m. a. W. daß die auf Einheitsbelastung umgerechneten Verschiebungen ν/π_l und ν/π_r links und rechts verschieden sind. Ihr arithmetisches Mittel gibt die Verschiebung im Ringzentrum mit Elimination der seitlichen Bewegung. Dieser Verschiebung entspricht eine Belastung π , die gegeben ist durch

$$\frac{\nu}{\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\pi_l} + \frac{\nu}{\pi_r} \right),$$

oder

$$(8) \quad \pi = \frac{1}{2} (\pi_l + \pi_r) \left[1 - \left(\frac{\pi_l - \pi_r}{\pi_l + \pi_r} \right)^2 \right].$$

Der Unterschied von π gegen das arithmetische Mittel von π_l und π_r kommt also nur bei starker seitlicher Verschiebung des Ringzentrums in Betracht.

Für die so berechneten Werte π ergab sich häufig schon für jedes einzelne Plattenpaar Proportionalität mit den zugehörigen ν . Dann berechnet man aus einer Wertereihe (ν , π)

den wahrscheinlichsten Wert ¹⁾ der für die Belastung 1 wandernden Ringzahl δ aus der Formel

$$\delta = \frac{\sum \nu^2}{\sum \nu \pi}.$$

Ergeben sich so für die zwei Plattenpaare verschiedene δ , so gibt deren Mittelwert die der wahren Stabdehnung entsprechende Ringverschiebung.

Nun kommt es aber auch vor, daß zwischen der an einem Plattenpaar beobachteten Verschiebung und der Belastung *keine Proportionalität* besteht. Bildet man aber für ein und dieselbe Belastung das Mittel der an *beiden* Plattenpaaren beobachteten *Verschiebungen*, eliminiert man also den Biegungseinfluß, so erweist sich dies Mittel wiederum der Belastung proportional. Die Erscheinung rührt also daher, daß in diesen Fällen die Biegung nicht proportional der Belastung ist. Aus den erhaltenen Mittelwerten, deren jeder der wahren Stabdehnung entspricht, wird dann wieder nach der angegebenen Formel der wahrscheinlichste Wert für δ abgeleitet.

Multipliziert man δ mit der halben Lichtwellenlänge $\lambda/2$, so erhält man nach § 9 (Gleichung (7)) die Dehnung des Stabes zwischen Q_1 und Q_2 für die Belastung 1 im gewöhnlichen Längenmaße.

§ 13. Schutz gegen Temperaturschwankungen.

Obwohl bei Temperaturschwankungen nur die Differenz der thermischen Ausdehnung von Stab und Glasplattenträgern zur Wirkung kommt, so genügt diese doch bei vielen Stäben, um Ringverschiebungen hervorzubringen, die bei Temperaturänderungen von etwa $0,2^\circ \text{C.}$ von der Größenordnung eines Ringes sind. Nun erfordert aber die in § 12 besprochene Beobachtungsweise lediglich, daß während der Belastungs- oder Entladungsdauer von nur einigen Sekunden der Temperatureinfluß unmerkbar sei. Einen hierfür ausreichenden Temperaturschutz gab ein auf das Wandbrett *W* (Fig. 2) gestellter, nach der Wand hin offener Holzkasten, der den ganzen über dem Wandbrett befindlichen Apparat einschloß und nur zwei

1) Wegen der linearen Abhängigkeit von π und ν ist es gleichgültig, welche von beiden Größen als mit Beobachtungsfehlern behaftet gilt.

Glasfenster für Ein- und Austritt der Lichtstrahlen besaß. Er konnte bequem gehoben und gesenkt werden. Ein in der Decke des Kastens montiertes, außen ablesbares $\frac{1}{10}^{\circ}$ -Thermometer gab die Temperatur im Innern des Kastens an.

Alle Versuche wurden bei *Zimmertemperatur* ausgeführt. Ihre Änderung während der ziemlich lange Zeit dauernden Versuchsreihen (vgl. § 15) war wegen des kleinen Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls von geringer Bedeutung.

§ 14. Vorbereitung und Durchführung der Versuche.

Nachdem das eine Ende des Stabes in der Aufhängung festgeklemt ist, so daß er frei beweglich an der kurzen oberen Saite pendelt, werden die Träger der Glasplattenpaare S_1, S_1' und S_2, S_2' mit ihren je drei Spitzenschrauben in den Querschnitten Q_1 und Q_2 festgeklemt.¹⁾ Darauf wird die Klemmvorrichtung der unteren Saite am Stabe befestigt, eine passende Belastung angebracht und nunmehr die Aufhängevorrichtung des Stabes auf dem Wandarm A so lange verschoben, bis das auf der unteren Saite gleitende Zylinderchen c , das anfangs aus der Hülse h herausgezogen ist, in dieselbe zurückgleitet, wo es mit leichter Reibung sitzen bleibt. *Dann kann die Stabachse als senkrecht gelten.*

Es kommt nun darauf an, *die spiegelnden Flächen der Glasplatten einander parallel und horizontal zu richten.* Man verstellt S_2 und S_2' gegen ihren Träger, bis ihre versilberten Schichten ein Senkel nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen ungebrochen spiegeln. Von da ab bleiben diese Platten unverändert. Die Interferenzerscheinung wird lediglich durch Verstellung der Platten S_1 bez. S_1' gegen ihren Träger erzeugt.

Von der äußeren optischen Einrichtung sind alle Teile vom vorigen Versuche her an ihrer Stelle geblieben, nur die Blende b und das untere Prisma p_2 sind wieder an ihren Platz zu bringen. Danach wird der Temperaturschutzkasten heruntergelassen.

Es sei hier nun kurz der Verlauf der Versuche mit dem Stabe „Eisen II“ von 1,6 cm Durchmesser und 27 cm Gesamt-

1) Die Eindrücke der Spitzen im Stabe gestatten nachträglich den Abstand der Querschnitte Q_1, Q_2 auszumessen.

länge beschrieben, da für ihn die Elimination des Biegungeinflusses besonders auffallend bewiesen wird.

Zwei Beobachtungsreihen am Plattenpaar 1, die hier nicht einzeln angeführt werden sollen ¹⁾, ergaben Proportionalität zwischen Ringverschiebung und Belastung, und im Mittel die in Tab. 4 unter Versuch 1 verzeichnete Verschiebung δ_1 . Zwischen beiden Beobachtungsreihen war durch Drehung der Kopfscheibe K um 180° das Plattenpaar 2 in den Strahlengang gebracht worden, wobei die Verschiebung δ_2 (Versuch 1) beobachtet wurde. δ ist das arithmetische Mittel von δ_1 und δ_2 und gibt nach § 12 die Dehnung der Meßlänge L (gleich Abstand der Querschnitte Q_1 Q_2) für die Belastung von 1 kg in halben Lichtwellenlängen ($\lambda/2 = 273 \cdot 10^{-7}$ cm). Endlich ist noch unter ϵ die Längsdilatation ($\lambda \delta/2 L$) für 1 kg Belastung angegeben.

Tabelle 4.

Eisen II $Q = 2,014 \text{ cm}^2$	δ_1 Ring/kg	δ_2 Ring/kg	δ Ring/kg	L cm	$\epsilon \times 10^7$ 1/kg
Versuch 1	0,1102	0,1683	0,1393	16,354	2,325
„ 2	0,1565	0,1199	0,1382	,305	2,314
„ 3	0,1452	0,1320	0,1386	,336	2,316

Im Mittel: 2,318

Der Unterschied von δ_1 und δ_2 rührt von der Stabbiegung her. Die Versuche 2 und 3 zeigen, wie diese Biegung tatsächlich durch Mittelnahme eliminiert wird. Sie unterscheiden sich nämlich von Versuch 1 dadurch, daß die röhrenförmigen Plattenträger *nach einer Drehung* (von 45° bez. 22°) *um die Stabachse* wieder an den Stab geklemmt sind, wodurch die Biegung einen wesentlich anderen Einfluß auf die Beobachtung an *einem* Plattenpaar gewinnt. Trotzdem zeigen die aus den Mitteln δ gewonnenen Längsdilatationen ϵ für die drei Versuche gute Übereinstimmung. Im Mittel folgt für den Elastizitätsmodul

$$E = \frac{1}{\epsilon Q} = 21420 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} (17,1^\circ).$$

¹⁾ Man findet das Versuchsprotokoll in Zeitschr. f. Instrumentenk. 27. p. 48. 1907.

§ 15. Elastische Nachwirkung und die Versuche am Bleistabe.

Es war bereits gesagt (§ 8), daß ein Vorteil der hier benutzten Methode in der Befreiung vom Einfluß der elastischen Nachwirkung liegt. In der Tat wurde diese nur bemerkt beim Blei, Zinn, Kadmium und Wismut. Hier machte sie sich durch ein mehr oder minder schnelles Weiterwandern der Ringe in der Richtung der durch die Belastung oder Entlastung eingeleiteten Bewegung bemerkbar. Mein Bestreben war, die bei sehr schneller Belastungsänderung sofort eingetretene Längenänderung zu beobachten, also die elastische Nachwirkung möglichst zu eliminieren.

Diese selbst zu verfolgen, eignete sich die vorliegende Versuchsanordnung deshalb nicht, weil 1. für die beobachtete Verschiebung ein fester, stets wieder zu erkennender Nullpunkt fehlt, 2. die Einflüsse der elastischen Nachwirkung von denen der Temperaturänderungen nicht zu trennen sind (vgl. § 13). Doch ist zu bemerken, daß sich jedenfalls der Temperatureinfluß für einen bestimmten Stab fast ganz eliminieren ließe, wenn man die röhrenförmigen Träger der Interferenzglasplatten, deren Gesamtlänge nahe gleich der Meßlänge des Stabes ist, aus einem Material herstellte, dessen thermische Ausdehnung der des Stabes nahe gleich ist.

Aus den angeführten Gründen habe ich über die elastische Nachwirkung nur *qualitative*, keine quantitativen Angaben notiert, z. B. im Protokoll der Versuche mit dem Bleistabe, Tab. 5 und 6, das hier ausführlich mitgeteilt werden soll, da gerade für derartiges Material die hier angewandte Methode *kleiner* Dehnungen zur Messung des Elastizitätsmoduls vor anderen geeignet erscheint. Die beiden Versuchsreihen unterscheiden sich u. a. durch die benutzten Dauerbelastungen von 2 bez. 5 kg.

Im Kopf der Tab. 5 und 6 sind Datum, Meßlänge L und deren mittlerer Querschnitt Q angegeben, in den Tabellen selbst neben der Zeit die Temperatur ϑ (Kolumne 2), die Dauerbelastung β (Kolumne 3) abgesehen von dem Gewicht des Stabes selbst und der Schale (0,27 kg), ferner in Kolumne 4 die Anzahl ν der am Doppelfaden vorüber gewanderten Ringe.

Tabelle 5. Blei.

Versuch 1 vom 15. 12. 05. Meßlänge $L = 16,327$ cm; $Q = 2,553$ cm³.

1	2	3	4	5	6	7	8	Bemerkungen
ϑ ° C.	β kg	ν Ringe	π_i kg	π_r kg	π kg	π/ν kg/Ring		
Plattenpaar 2								
12 ^a 28 ^m	18,79	2	2	1,450 ^r	1,420	1,435	0,717 _s	
43	,65	"	4	2,930	2,840	2,884	,721 _o	
55	,58	"	6	4,400	4,300	4,348	,724 _s	Nachwirkung bemerkt
1	,51	"	8	5,880	5,780	5,830	,728 _s	"
20	,51	"	10	7,350	7,250	7,300	,730 _o	störend
Plattenpaar 1								
2 ^a 58 ^m	18,66	"	10	(6,490)	(7,130)	(6,795)	(0,679 _s)	{ Unsicher wegen starker Nach-
5	17,92	"	2	1,370	1,420	1,395	,687 _s	wirkung
27	"	"	4	2,690	2,760	2,725	,681 _z	Nachwirkung bemerkt
33	,91	"	5	3,360	3,440	3,400	,680 _o	
41	,89	"	6	4,010	4,070	4,040	,678 _s	"
50	,88	"	3	2,040	2,100	2,070	,680 _o	schon sehr störend
Plattenpaar 2								
7 ^a 8 ^m	18,14	"	2	1,440	1,420	1,430	0,715 _o	
18	"	"	3	2,190	2,140	2,165	,721 _r	
25	"	"	4	2,920	2,870	2,895	,728 _s	
34	?	"	6	4,380	4,380	4,355	,725 _s	{ Keine Nachwirkung beobachtet

Tabelle 5a.

π_1 kg	$(\pi/\nu)_1$ kg/Ring	$(\pi/\nu)_2$ kg/Ring	δ_1 Ring/kg	δ_2 Ring/kg	δ Ring/kg
1,395	0,697 ₅	0,715 ₉	1,434	1,397	1,415
2,070	,690 ₀	,721 ₀	1,449	1,387	1,418
2,725	,681 ₂	,722 ₂	1,468	1,385	1,426
3,400	,680 ₀	,723 ₄	1,471	1,382	1,426
4,040	,673 ₃	,724 ₇	1,485	1,380	1,432
6,795	(,679 ₅)	,729 ₆	(1,472)	1,371	(1,421)

In Kolumne 5 und 6 stehen die Gewichte π_1 und π_2 , welche eine Verschiebung von ν Streifen links und rechts vom Zentrum bewirkten (vgl. § 12). Diese Gewichte setzen sich aus dem der größeren Schale (1,120 kg) und den darauf gelegten Gewichtsstücken zusammen. Das aus Formel (8) (p. 827) berechnete π gibt die Belastung, welche einer Verschiebung von ν Ringen im Zentrum des Ringsystems entspricht.

Die in Kolumne 8 berechneten π/ν zeigen nun, daß zwischen der an einem Plattenpaar beobachteten Verschiebung und der Belastung keine Proportionalität besteht. Entsprechend dem in § 12 angedeuteten Verfahren sind daher bei Versuch 1 (Tab. 5) durch Interpolation aus den beobachteten π/ν am Plattenpaar 2 solche Werte $(\pi/\nu)_2$ abgeleitet, welche den beim Plattenpaar 1 gebrauchten Belastungen π_1 entsprechen. Sie sind in Tab. 5a zusammengestellt mit den zu den π_1 direkt beobachteten $(\pi/\nu)_1$. Ihre Reziproken δ_1 und δ_2 (Kolumne 4 und 5) geben die Ringverschiebungen für 1 kg Belastung, aus denen in jeder Horizontalreihe das Mittel δ gebildet ist. Bei Versuch 2 (Tabb. 6 und 6a p. 834) wurde entsprechend verfahren.

Was nun die *Nachwirkung* betrifft, so trat eine die Beobachtung störende, d. h. mit störender Geschwindigkeit einsetzende Wanderung etwa bei den folgenden Zusatzbelastungen (in Kilogramm) auf:

	β	π_1	π_2
Versuch 1	2	4	7
„ 2	5	(7)	3

Tabelle 6. Blei.

Versuch 2 vom 20. 3. 06. Meßlänge $L = 16,296 \text{ cm}$; $Q = 2,558 \text{ cm}^2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Bemerkungen
	ϑ ° C.	β kg	ν Ringe	π_i kg	π_r kg	π kg	π/ν kg/Ring	
Plattenpaar 2								
1 ^b 9 ^m	16,44	5	2	1,385	1,395	1,390	0,6950	{ Nachwirkung nur bei längerer Belastungsdauer merkbar
32	,38	"	8	2,075	2,070	2,072	,6907	
43	,38	"	4	2,745	2,755	2,750	,6875	
50	,37	"	5	3,435	3,445	3,440	,6886	{ Nachwirkung innerhalb der ersten Sekunden deutlich
Plattenpaar 1								
2 ^b 51 ^m	16,52	"	2	1,465	1,440	1,452	0,7266	Nachwirkung noch sehr schwach
3	,47	"	4	2,900	2,860	2,880	,7206	
10	,45	"	3	2,185	2,155	2,170	,7233	
18	,43	"	5	3,605	3,575	3,590	,7186	{ Nachwirkung erst nach einigen Sekunden merkbar
—	—	—	—	7,520	—	—	—	
Stärke Nachwirkung!								

Tabelle 6a.

π_s kg	$(\pi/\nu)_h$ kg/Ring	$(\pi/\nu)_s$ kg/Ring	δ_1 Ring/kg	δ_2 Ring/kg	δ Ring/kg
1,380	0,7265	0,6950	1,377	1,439	1,408
2,072	,7237	,6907	,382	,448	,415
2,750	,7206	,6875	,388	,455	,421
3,440	,7184	,6886	,392	,453	,422

Die auffallende Erscheinung, daß die elastische Nachwirkung am einen Plattenpaar bereits störend auftritt, während sie am anderen noch kaum merkbar ist, weiß ich nicht sicher zu erklären. Sie zeigte sich auch bei den anderen oben genannten Metallen.

Da die Anfangsgeschwindigkeit der Nachwirkung mit der Größe der Deformation *sehr schnell* anwächst, so werden die kleineren Dehnungen prozentisch genauer beobachtet, als die größeren.¹⁾ Je größer die Dehnung ist, um so eher kann sie durch den Einfluß der Nachwirkung zu groß beobachtet sein. Deshalb kann auch aus dem Anstieg der δ -Werte mit zunehmender Belastung (Tabb. 5a und 6a) noch nicht mit Sicherheit geschlossen werden, daß für die von Nachwirkung befreite „vollkommen elastische“ Dehnung die Proportionalität mit der Spannung aufgehört hat. Fassen wir zur Berechnung des Elastizitätsmoduls nur die δ -Werte zusammen, bei denen elastische Nachwirkung noch nicht gestört haben kann, also in Tabb. 5a und 6a je die beiden obersten, so erhalten wir

Blei $Q = 2,553 \text{ cm}^2$	δ Ring/kg	L cm	$\varepsilon \times 10^6$ 1/kg
Versuch 1	1,416s	16,327	2,368
„ 2	1,411s	16,296	2,364
			Mittel: 2,366

woraus folgt

$$E = \frac{1}{\varepsilon Q} = 1656 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} (17,3^\circ).$$

§ 16. Zusammenstellung der Versuchsergebnisse.

Für die übrigen Stäbe genügt es, die Resultate (Tab. 7) anzugeben. Es bedeutet Q den mittleren Querschnitt der Meßlänge L , δ die für 1 kg Belastung beobachtete Verschiebung in Ringen ($= 273 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$), ϑ die mittlere Temperatur während des Versuches, ε die Längsdilatation für 1 kg Belastung, E den Elastizitätsmodul in kg/mm^2 .

1) Im Gegensatz hierzu nimmt J. O. Thompson Proportionalität der Nachwirkung mit der Größe der Dehnung an. Wied. Ann. 44. p. 561. 1891.

Tabelle 7.

	Q cm ³	L cm	δ 273 · 10 ⁻⁷ cm	ϑ C. °	$s \cdot 10^6$ 1/kg	E $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$
Aluminium .	1,143 ₇	16,302 ₃₂₈	0,728 ₄ 0,724 ₅	17,6 17,6	1,219 ₅ 1,211 ₅	1,215 ₅ 719 ₀
Kupfer IV a	1,123 ₄	,249 ,301	0,423 ₅ 0,425 ₅	16,4 16,1	0,711 ₅ 0,713 ₁	0,712 ₅ 1250 ₀
Silber . . .	0,966 ₆	,285	0,767	16,9	1,286	805 ₀
Gold I . . .	1,146	,333 ,322	0,671 ₆ 0,669 ₂	16,8 16,2	1,122 ₅ 1,119 ₅	1,121 ₀ 778 ₀
Gold II . . .	1,047	,316	0,703	16,5	1,176	812 ₀
Nickel . . .	2,022	,319	0,1439	17,4	0,2407	2054 ₀
Zink I . . .	1,121	,282	0,634	18,0	1,063	839 ₀
Zink II . . .	2,55 ₀	,338 ,285	0,1792 0,1771	17,7 17,6	0,2995 0,2969	0,2982 1310 ₀
Kadmium .	2,541	,282 ,331	0,460 0,463	16,9 16,9	0,771 ₅ 0,774 ₀	0,772 ₅ 509 ₀
Blei . . .	2,553	,327 ,296	1,416 1,411	18,2 16,5	2,368 2,364	2,366 165 ₀
Zinn . . .	2,552	,296	0,422	16,9	0,707 ₀	554 ₀
Platin II .	2,051 2,048	,322 ,293	0,1701 0,1712	18,7 17,4	0,284 ₅ 0,286 ₅	0,2857 1708 ₀
Palladium .	2,034	,298	0,2557	15,1	0,428 ₅	1148 ₀
Rhodium .	2,030 2,026	,362 ,360	0,1063 0,1048	17,8 16,9	0,1774 0,1749	277 ₇ 282 ₂ ₀
Iridium . .	2,369	,306 ,328 ,376 ,272	0,0479 0,0484 0,0481 0,0479	16,7 16,0 17,0	0,0802 809 802 804	0,0804 525 ₀ ₀
Eisen I . .	1,329	,380 ,354	0,2082 0,1393	18,4 16,4	0,3471 0,2325	2168 ₀
Eisen II . .	2,014	,305 ,336	0,1382 0,1386	18,0 17,0	0,2314 0,2316	0,2318 2142 ₀
Eisen III .	2,551	,337	0,1079	17,9	0,1803	2174 ₀
Stahl . . .	1,999	,338	0,1404	16,8	0,2347	2132 ₀
Gußeisen A6	3,150	,315	0,1428	16,4	0,2389	1329 ₀
„ GK3	3,173	,425	0,1798	17,3	0,2988	1054 ₀
Wismut . .	2,535	,328	0,725	16,8	1,212	325 ₀
Rotguß . .	1,697 1,699	,369 ,265	0,428 ₅ 0,425 ₅	18,2 16,4	0,714 ₅ 0,714 ₅	0,714 ₅ 824 ₀
Konstantan .	3,132	,345	0,1152	18,4	0,1924	1659 ₀
Manganin .	2,560	,322 ,289	0,1848 0,1844	18,3 17,7	0,309 ₁ 0,309 ₁	0,309 ₁ 1264 ₀

Bei Platin II, Rhodium und Rotguß sind für den Querschnitt zwei etwas verschiedene Zahlen angegeben. Diese Stäbe zeigen nämlich solche Ungleichmäßigkeiten im Querschnitt, daß dessen Mittelwert für die beiden Meßlängen, die um 2 cm gegeneinander verschoben waren, bereits merkbare Unterschiede gab. Bei Rhodium ist für jede der beiden Meßlängen auch der Elastizitätsmodul einzeln berechnet, da sich eine Differenz ergibt, die sich kaum durch Versuchsfehler erklären läßt. Es mag sein, daß sich hier der Einfluß von unregelmäßig verteilten Poren oder Rissen zeigt, deren Existenz im Rhodiumstabe wahrscheinlich ist (vgl. § 17). Für Kadmium, Blei, Zinn und Wismut sind wegen der elastischen Nachwirkung nur die Versuche bei kleinsten Belastungen benutzt (§ 15).

4. Besprechung des Zahlenmaterials.

§ 17. Vergleich der drei Methoden mit Rücksicht auf die Homogenität der Stäbe.

In Tab. 8 sind die nach den drei Methoden gefundenen Elastizitätsmoduln $E_{\text{transv.}}$, $E_{\text{long.}}$ und $E_{\text{stat.}}$ zusammengestellt. Die Unterschiede der $E_{\text{stat.}}$ und $E_{\text{long.}}$ sind kleiner als die möglichen Fehler des Versuchs und der Rohrweitenkorrektur (§ 7), man kann daher sagen, daß die Dehnungsversuche und die Longitudinalschwingungen zum gleichen Elastizitätsmodul führen. Weniger gut ist die Übereinstimmung zwischen der statischen und Transversalschwingungsmethode. Zwar ist sie bei den *gezogenen* Stäben im großen und ganzen so gut, als man es nur erwarten kann. Größere Abweichungen bis zu $1\frac{1}{2}$ Proz., für die ich besondere Gründe nicht anzugeben vermag, zeigen nur Gold II, Konstantan und Manganin. Dagegen sind die Abweichungen bei den *gegossenen* Stäben zum Teil sehr viel größer und überschreiten die möglichen Versuchsfehler (vgl. § 4).

Soweit die Stäbe schon äußerlich Poren zeigen, wie Zink II, Kadmium, Blei, Zinn, Wismut, wird man von vornherein darauf verzichten müssen, nach irgend einer der drei Methoden den wahren Elastizitätsmodul des Materials zu finden. Die Dehnungsversuche werden ihn sicher zu klein geben, da ja der wirksame Querschnitt geringer ist, als er aus der Messung des

Tabelle 8.

<i>Gestogene</i> Stäbe	Chemische Zusammensetzung	$E_{\text{transv.}}$ kg/mm ²	$E_{\text{long.}}$ kg/mm ²	$E_{\text{stat.}}$ kg/mm ²	E von gegossenen Platten, nach Voigt	E Mittel nach Kohlrausch
Aluminium .	99 Al; 0,5 Fe; 0,4 Cu	7130		7130 ($\sigma = 2,71$) [*]	6570 ** ($\sigma = 2,676$) [*]	6500
Kupfer IVa	rein	12530		12500 (8,96)	10850 ** (8,96)	12000
Silber . .	999,8 fein	8070		8050 (10,53)	7790 (10,49)	7300
Gold I . .	99,8 Au; 0,1 Fe; 0,1 Cu; Spur Ag	7830		7730 (19,22)		
Gold II . .	rein	8010		8120 (19,21)	7550 (19,28)	8000
Nickel . .	97,0 Ni; 1,4 Co; 0,4 Fe; 1,0 Mn; 0,1 Cu; 0,1 Si	20330		20540 (8,81)	20300 (8,795)	20000
Eisen I . .	0,1 C; Metalle nicht bestimmt	21540		21630 (7,84)		19000
„ II . .	99,5 Fe; 0,1 C; 0,2 Si; 0,1 Mn; (P, S, Cu) . .	21430		21420 (7,85)		
„ III . .	Schmiedeeisen	21760		21740 (7,85)		
Stahl . .	1,0 C; Metalle nicht bestimmt	21230		21330 (7,82)	20400 (7,826)	21000
Konstantan .	60 Cu; 40 Ni	16330	16500	16500 (8,92)		
Manganin .	84 Cu; 4 Ni; 12 Mn	12500	12600	12640 (8,44)		

Gegossene Stäbe					Gegossene Platten	
Zink I . .	98,6 Zn; 1,1 Pb; 0,08 Cd; 0,25 Cu; 0,03 Fe . .	89 ¹⁰			83 ⁹⁰ (7,17)	9000
" II . .	rein; [0,01 Pb; 0,01 Cd; 0,01 Fe]	123 ¹⁰			131 ⁰⁰ (7,11)	10300 ** (7,212)
Kadmium .	rein; [Pb; Zn; Fe] < 0,05	52 ⁴⁰			50 ⁹⁰ (8,63)	7070 (8,66)
Zinn . . .	rein; [Pb] < 0,03	56 ³⁰			55 ⁴⁰ (7,28)	5410 (7,328)
Blei . . .	rein; [Cu; Bi; Fe; Ni] < 0,05	178 ⁶			165 ⁴ (11,32)	1700
Wismut . .	rein; [Pb; Fe] < 0,03	93 ⁹⁰			92 ⁴⁰ (9,78)	3190 (10,06)
Rhodium .	rein	325 ⁰⁰			280 ⁰⁰ (12,28)	
Palladium .	rein	117 ⁰⁰	114 ⁷⁰		114 ⁴⁰ (11,96)	11000
Platin II .	rein	171 ⁷⁰	170 ⁷⁰		170 ⁹⁰ (21,89)	17000
Iridium . .	rein	529 ⁰⁰			525 ⁰⁰ (22,49)	
Guß Eisen A 6	2,7 Graphit; 0,8 geb. C; 0,5 Mn; 1,2 Si; 0,3 P; und 0,2 Cu, Ni, Co, S.	134 ⁴⁰			132 ⁹⁰ (7,22)	12800 (7,188)
" GK 3	3,0 Graphit; 0,5 geb. C; 0,7 Mn; 1,7 Si; 0,5 P; und 0,2 Cu, Ni, Co, S.	105 ¹⁰			105 ⁴⁰ (7,11)	
Rotguß . .	85,7 Cu; 7,15 Zn; 6,39 Sn; 0,58 Ni	84 ¹⁰	82 ⁴⁰		82 ⁴⁰ (8,40)	

** Unreines Material.

* Die kleinen geklammerten Zahlen bedeuten die Dichten.

Durchmessers hervorgeht. Bei den akustischen Methoden kommt es darauf an, wie die Poren im Stabe verteilt sind.

Ist die Verteilung längs des Stabes gleichmäßig und symmetrisch zur Stabachse, herrscht also in koaxialen Zylinderschichten gleiche Porosität, so ergibt die Methode der Longitudinalschwingungen den richtigen Wert von E , insofern die Poren nur einer gleichmäßigen Verringerung des Querschnittes gleich kommen, die Methode der Transversalschwingungen kann zu große oder zu kleine Werte liefern, je nachdem die Poren in den inneren oder äußeren Schichten des Stabes sich häufen. Denn die Schwingungszahl des transversal schwingenden Stabes hängt von dem Verhältnis ab, in dem das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf den auf der Schwingungsebene senkrechten Durchmesser, zum Querschnitt selbst steht, und dies Verhältnis ist größer, wenn die Poren im Innern liegen.¹⁾

Ist die Verteilung der Poren längs des Stabes ungleichmäßig, so können die Longitudinal-, wie die Transversalschwingungen zu große oder zu kleine Werte E liefern. Bezüglich der Longitudinalschwingungen geht der Einfluß der Poren parallel dem (in § 6 besprochenen) Einfluß variablen Querschnittes, bezüglich der Transversalschwingungen nur dann, wenn die Poren an der Oberfläche des Stabes liegen.

Man kann die Homogenität längs des Stabes dadurch prüfen, daß man den elektrischen Widerstand einzelner Stababschnitte vergleicht. Die Herren Jaeger u. Diesselhorst²⁾ haben diese Messung an verschiedenen Stäben ausgeführt. Dabei haben sich nur für Zinn bedeutende Unregelmäßigkeiten ergeben, während die äußerlich Poren zeigenden Metalle Blei, Zink II, Kadmium, Wismut elektrisch ziemlich homogen waren. Das beweist aber noch nichts über die Homogenität im Querschnitt, auf die es hier ebenfalls ankommt.

Abgesehen von Poren und Rissen sind auch Inhomogenitäten denkbar, die aus einer den Stab nach Art der bekannten

1) Infolge einer zylindrischen Bohrung, die mit dem Stabe koaxial dessen ganze Länge durchliefe, würde der Elastizitätsmodul eines sonst homogenen Stabes für Transversalschwingungsvorgänge im gleichen Verhältnis zu groß erscheinen, wie er nach den Dehnungsversuchen zu klein erscheint, d. h. im Verhältnis der Querschnittsverringerung.

2) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, l. c. p. 350.

Gußhaut umhüllenden Schicht bestehen, welche andere elastische Eigenschaften besitzt, als das Innere des Stabes. Hr. Bach¹⁾ stellte durch Dehnungsversuche fest, daß der Elastizitätsmodul eines Gußeisenstabes kleiner wurde, als man die Gußhaut durch Abdrehen entfernt hatte. Es ist sicher anzunehmen, daß hier anfangs die Transversalschwingungsmethode einen größeren Wert für E ergeben hätte als die Dehnungsversuche. Denn es läßt sich leicht berechnen, daß durch eine dünne Oberflächenschicht größeren Elastizitätsmoduls der aus Transversalschwingungen berechnete Modul gegen den wahren für das Innere geltenden Wert doppelt so stark vergrößert erscheint, wie der aus Longitudinalschwingungen oder Dehnungsversuchen berechnete. Die beiden letztgenannten Methoden würden hier jedoch den gleichen Wert geben, falls nicht zugleich Dichteänderungen in der Oberfläche eingetreten sind.

Man sieht, wie außerordentlich verwickelt und quantitativ kaum abschätzbar der Einfluß von Inhomogenitäten auf die Bestimmung des Elastizitätsmoduls ist. Man kann eigentlich nur mit Wertheim²⁾ sagen, daß die Übereinstimmung der verschiedenen Methoden ein Kriterium für die Homogenität des Materials bildet.

Was nun die Zahlen der Tab. 8 betrifft, so zeigt sich bei den gegossenen Stäben fast immer $E_{\text{transv.}} > E_{\text{stat.}}$, woraus man also auf eine Häufung von Poren im Innern oder das Vorhandensein einer äußeren Schicht von größerem Elastizitätsmodul schließen könnte. Ob solche Ursachen auch bei den Stäben aus Rotguß, Platin II, Palladium, Gußeisen A6 zutreffen, oder ob hier wegen der Schwebungen des Grundtones (vgl. § 4) und wegen des ungleichmäßigen Querschnittes größere Versuchsfehler bei der Transversalschwingungsmethode vorliegen, möchte ich dahingestellt sein lassen. Beim Rhodium kann man wohl nicht umhin, Poren oder Risse im stark kristallinischen Material anzunehmen. Nach Aussage der Firma Heraeus, die den Stab gegossen hat, ist es kaum möglich, Poren beim Guß auszuschließen, weil beim Erstarren absor-

1) C. Bach, Mitteil. über Forsch.-Arb. Heft 1. p. 22. 1901; auch Elastizität und Festigkeit 4. Aufl. § 22 Schluß. 1902.

2) G. Wertheim, Pogg. Ann. Ergbd. 2. p. 22. 1848.

biertes Gas frei wird. Endlich kann auch angeführt werden, daß die Dichte des Stabes (12,23) kleiner ist, als sie an „reinem“, sicherlich porenfreiem Rhodiumblech gefunden wurde ($= 12,44$).¹⁾

Eine auffallende Ausnahme hinsichtlich der Abweichungsrichtung des $E_{\text{transv.}}$ vom $E_{\text{stat.}}$ bildet der Stab Zink II, doch ist gerade dieser an der äußeren Oberfläche stark löcherig. Wäre er im Innern dichter, so wäre die Abweichungsrichtung erklärt.

§ 18. Unterschied zwischen isothermem und adiabatischem Elastizitätsmodul.

Daß aus den statischen und akustischen Messungen kein Unterschied zwischen isothermem und adiabatischem Elastizitätsmodul zutage tritt, hat zwei Gründe. Einmal findet die Beobachtung der Dehnung so bald nach eingetretener Deformation statt, daß bis dahin nur ein kleiner Teil der mit der Deformation verbundenen Temperaturänderung des Stabes zurückgegangen ist. Das zeigten einige Dehnungsversuche am Kupfer, bei denen die Stabtemperatur mittels Thermoelements verfolgt wurde. *Die statische Methode liefert also auch nahezu den adiabatischen Modul.* Zweitens aber beträgt der ganze Unterschied zwischen isothermem und adiabatischem Modul in der Regel nur wenige Promille, wie aus folgender Zusammenstellung ersichtlich ist.

Bezeichnen die Indizes i und a isotherm bez. adiabatisch, so ist nach den Gleichungen der Thermodynamik²⁾ die Temperaturänderung bei einer *adiabatischen* Dilatation ε_a des Stabes

$$dT = -\varepsilon_a T \frac{\alpha E_a}{s c_p},$$

wo T die absolute Temperatur, α den linearen Ausdehnungskoeffizienten, s die Dichte, c_p die spezifische Wärme des Stabes bei konstantem Druck, gemessen in Erg, bezeichnet. Bei isothermer Dilatation wird der Stab sich stärker dehnen, und zwar im Verhältnis

$$\varepsilon_i = \varepsilon_a - \alpha dT = \varepsilon_a \left(1 + \alpha T \frac{\alpha E_a}{s c_p} \right).$$

1) L. Holborn, L. Austin u. F. Henning, Wissensch. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 4. p. 87. 1903.

2) Vgl. R. Clausius, Mech. Wärmetheorie 2. Aufl. 1. p. 200. 1876.

Das Verhältniß der isothermen zur adiabatischen Dilatation, bez. das Verhältniß des adiabatischen zum isothermen Elastizitätsmodul ist daher

$$\frac{s_i}{s_a} = \frac{E_a}{E_i} = 1 + \alpha^2 T \frac{E_a}{s c_p}.$$

In Tab. 9, Kolumne 6 ist die für die Temperaturänderung maßgebende Größe $\alpha E_a / s c_p$ berechnet, wobei für α meist die Zahlen aus Kohlrauschs Lehrbuch entnommen sind, da α die einzige nicht an den Stäben selbst bestimmte Konstante ist. Für c_p und s sind die Jaeger-Dieselhorstschen Zahlen, für E_a die $E_{\text{stat.}}$ aus Tab. 8 in [C.G.S.] eingesetzt. Kol. 7 gibt das Verhältniß der Elastizitätsmoduln, welches so nahe gleich der Einheit ist, daß der Unterschied zwischen adiabatischer und isothermer Dehnung bei den meisten Metallen sich nur schwer feststellen läßt.¹⁾ Zink und Kadmium, die den größten Unterschied zeigen, eignen sich aus anderen Gründen nicht zu exakten Messungen.

Tabelle 9.

1	2	3	4	5	6	7
	$\alpha \cdot 10^6$	$E \cdot 10^{-11}$	$c_p \cdot 10^{-7}$	s	$\left(\frac{\alpha E_a}{c_p s} \right)_{18^\circ}$	$\frac{E_a}{E_i}$
Al	24	7,0	0,90	2,7	0,69	1,0048
Cu	16,1	12,2	,38	9,0	0,57	027
Ag	18,4	7,9	,23	10,5	0,60	032
Au II	13,8	8,0	,13	19,2	0,44	018
Ni	12,4	20,1	,45	8,8	0,63	023
Fe	11	21,1	,45	7,8	0,66	021
Zn II	28,6	12,8	,38	7,1	1,36	113
Cd	28,6	5,0	,23	8,6	0,72	060
Pb	27,5	1,6	,13	11,3	0,30	024
Sn	21,3	5,4	,22	7,3	0,72	044
Bi	12,8	3,2	,12	9,8	0,34	013
Pt	8,9	16,7	,13	21,4	0,53	014
Pd	11,7	11,3	,24	12,0	0,46	016
Rh	8,3	29,4*	,26	12,2	0,77	019
Ir	6,5	51,5	,13	22,5	1,14	022

* Mittel aus $E_{\text{stat.}}$ und $E_{\text{transv.}}$

1) Wertheim glaubte aus seinen Versuchen einen Unterschied nachweisen zu können, l. c. p. 62. Vgl. auch J. O. Thompson, l. c. p. 559.

Es sei hier noch daran erinnert, daß das Verhältnis des adiabatischen zum isothermen *Volumelastizitätsmodul* ($H_a : H_i$), bez. das der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und Volumen ($c_p : c_v$), nicht gleich dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln ist, sondern mit diesem zusammenhängt durch die Gleichung

$$\frac{c_p}{c_v} - 1 = \frac{H_a}{H_i} - 1 = \frac{3}{1 - 2\mu_a} \left(\frac{E_a}{E_i} - 1 \right),$$

wo μ_a das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation bei adiabatischer Dehnung ist. Nehmen wir hierfür etwa 0,25 als Mittelwert an, so wird $c_p/c_v - 1$ etwa 6mal größer sein, als der Überschuß über 1 in der 7. Kolumne von Tab. 9.¹⁾

§ 19. Änderung des Elastizitätsmoduls mit der Spannung.

Bei allen drei Methoden gilt der gefundene Elastizitätsmodul für sehr schwache Deformationen, z. B. ist bei den Dehnungsversuchen die maximale Längsdilatation, entsprechend der größten vorgenommenen Belastung von etwa 25 kg, gegeben durch 25 ϵ (Tab. 7).²⁾ Für eine Reihe von Metallen, wie Gußeisen, Messing, Silber, Kupfer, Stahl, ist nachgewiesen³⁾, daß der Elastizitätsmodul mit wachsender Spannung oder Deformation abnimmt, was natürlich beim Vergleich verschiedener Methoden zu beachten ist. Zur Orientierung über die Größe dieser Veränderlichkeit mit der Spannung seien hier einige Formeln angeführt, die den Elastizitätsmodul $E = d\sigma/d\epsilon$ (σ = Spannung in kg/mm², ϵ = Längsdilatation) als lineare Funktion der Spannung darstellen, also in der Form

$$(9) \quad E = E_0 - c \sigma.$$

1) Vgl. F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 712. 1893.

2) Über eine Schätzung der Deformationsgröße bei den Transversalschwingungen vgl. E. Grüneisen, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. 4. p. 469. 1906.

3) A. Miller, Bayr. Sitzungsber. 1. p. 9. 1885; Abhandl. d. bayr. Akad. 15. p. 707. 1886 und 16. p. 571. 1888; C. Bach, Elast. u. Festigkeit, 4. Aufl. 1902, Einleitung, wo auf die ältere Literatur hingewiesen ist; J. O. Thompson, Wied. Ann. 44. p. 555. 1891.

So gilt z. B. für zwei Gußeisenstäbe¹⁾, die aus dem gleichen Guß stammen, wie die in Tab. 8,

$$GK3: E = 10603 - 923 \sigma,$$

$$A1^2): E = 14019 - 505 \sigma.$$

Weiter ergibt sich für ein von Hrn. Bach untersuchtes³⁾

$$\text{weiches Kupfer, Zug: } E = 11732 - 184,7 \sigma.$$

Aus J. O. Thompsons⁴⁾ Messungen folgt

$$\text{Messingdraht: } E = 10576 - 29,829 \sigma,$$

$$\text{Kupferdraht: } E = 12920 - 23,865 \sigma,$$

$$\text{Silberdraht: } E = 8462 - 9,786 \sigma,$$

$$\text{Stahldraht: } E = 19975 - 17,730 \sigma.$$

Die von Thompson nach einer kubischen Formel mit drei Konstanten, die natürlich die Versuche etwas besser wiedergibt, extrapolierten E_0 sind der Reihe nach 10370, 12890, 8490, 20050. Die Unterschiede sind in Anbetracht der z. T. weiten Extrapolation gering, bez. praktisch von geringer Bedeutung.

§ 20. Einfluß der mechanischen und thermischen Behandlung, sowie der Zusammensetzung des Materials.

Die in den Abschnitten 17 und 19 besprochenen Punkte sind zu beachten, wenn man die Ergebnisse verschiedener Beobachter vergleichen will. Denn es zeigt sich, wie schon für dieselbe Materialprobe unter Umständen recht verschiedene Elastizitätsmoduln gefunden werden können, je nach der angewandten Methode und Deformationsgröße. Sofern aber den Untersuchungen auch verschiedenes Material zugrunde liegt, kommt noch der Einfluß mechanischer oder thermischer Behandlung, sowie der der chemischen Zusammensetzung in Betracht.

1) C. Bach, Mitteil. üb. Forsch.-Arb. Heft 9. p. 70. 1903; E. Grüneisen, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 4. p. 469. 1906.

2) A1 ist aus gleichem Guß wie A6 in Tab. 8. Über die Abweichung der Konstante 14019 von dem in Tab. 8 gefundenen Werte 13300 vgl. die in der vorigen Anmerkung zitierte Stelle.

3) C. Bach, Elast. u. Fest. 4. Aufl. p. 56. 1902. (Rundstab II.)

4) l. c.

Nur hinsichtlich des letzteren liefert die vorliegende Untersuchung einen Beitrag, da vorläufig tiefgreifende Änderungen der Metallstäbe durch thermische oder mechanische Behandlung vermieden werden sollten.¹⁾ Es wird jedoch für die richtige Beurteilung des Zahlenmaterials nötig sein, zunächst an einige wichtige Ergebnisse anderer Beobachter zu erinnern, die sich gerade auf den Einfluß solcher Behandlung beziehen.

Vor allem erscheint als feststehend²⁾, daß Änderungen der Dichte mit solchen des Elastizitätsmoduls verbunden sind. Jede Behandlungsweise, die eine Auflockerung des Materials zur Folge hat, verringert den Elastizitätsmodul, und umgekehrt. Bleibt dagegen trotz verschiedenartigster Behandlung die Dichte unverändert, so ist das häufig auch mit dem Elastizitätsmodul der Fall.³⁾

Es kommen jedoch auch Veränderungen des Elastizitätsmoduls vor, ohne daß erhebliche Dichteänderungen nachweisbar sind.⁴⁾ Sie werden hervorgebracht durch übermäßige Beanspruchung des Materials auf Zug oder Druck. Sie sind verhältnismäßig gering, aber dadurch von erhöhtem Interesse, daß sie langdauernde Nachwirkungen zeigen können, die im allgemeinen mit einer Erhöhung des Elastizitätsmoduls über seinen ursprünglichen Wert endigen. Bei Schweißeisen, Flußeisen, Bessemerstahl, Aluminium rechnet die Zeit bis zur Erreichung des Endzustandes nach Tagen oder Monaten, kann aber durch mäßiges Erwärmen (bis 100°) abgekürzt werden, bei Kupfer und Rotguß ist sie sehr klein. Ausglühen scheint das Material wieder dem ursprünglichen Zustande zu nähern.

Das gewöhnliche Ziehen des Materials wird nach dem Vorigen eine kleine Erhöhung des Elastizitätsmoduls zur Folge

1) Die Stäbe sind seit den Untersuchungen von W. Jaeger und H. Dieselhorst unverändert geblieben.

2) G. Wertheim, l. c. p. 69; J. O. Thompson, l. c. p. 573; G. Angenheister, Ann. d. Phys. 11. p. 188. 1903.

3) z. B. bei Stahl. Vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 48. p. 702. 1893.

4) J. Bauschinger, Der Zivilingenieur. 25. p. 80. 1879; 27. p. 289. 1881; Mitt. aus dem Mech.-Techn. Laborat. München. Heft 13. 1886; J. A. Ewing, Proc. Roy. Soc. 58. p. 123. 1895; J. Muir, Phil. Trans. Roy. Soc. 193. p. 1. 1900; A. Morley u. G. A. Tomlinson, Phil. Mag. (6) 11. p. 380. 1906; G. Angenheister, l. c.

haben, um so mehr, wenn die Dichte zunimmt. Zeitliche Änderungen des Moduls unmittelbar nach dem Ziehen sind wohl nicht beobachtet, aber durchaus nicht unwahrscheinlich.¹⁾

Bedeutsamer erscheint der Einfluß mechanischer und thermischer Behandlung auf die „Proportionalitätsgrenze“, d. h. auf die Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls mit der Spannung (§ 19). Nach den Versuchen von Bauschinger, Ewing etc. ist anzunehmen, daß mit der Vergrößerung von E_0 (vgl. Formel 9, § 19) eine Verkleinerung von c Hand in Hand geht. Als Beispiel hierfür können die in § 19 gegebenen Formeln für weiches Kupfer (Bach) und Kupferdraht (Thompson) gelten.

Der Einfluß der chemischen Zusammensetzung des Materials ist unter der Fragestellung zu betrachten: Gilt für die elastischen Eigenschaften die Mischungsregel? Hierauf lautet nach den bisherigen Untersuchungen die Antwort, daß zwar Fälle vorkommen, in denen die Mischungsregel ziemlich gut stimmt, daß aber andererseits deutliche Ausnahmen bekannt sind. Wertheim²⁾ fand die Mischungsregel für den Elastizitätsmodul mit Ausnahme einiger Legierungen von Zink und Kupfer bestätigt, doch darf man wohl seinem Zahlenmaterial nicht allzuviel Vertrauen schenken, denn die nach den verschiedenen Methoden gefundenen Moduln stimmen im allgemeinen sehr schlecht überein. Nach Angenheister³⁾ hat man besonders für den Volumelastizitätsmodul und das Verhältnis μ von Querkontraktion zu Längsdilatation Abweichungen von der Mischungsregel zu erwarten, doch zeigt sich für die von ihm untersuchten Silber-Kupfer-Legierungen auch hinsichtlich des Moduls E eine auffallende Abweichung. Obwohl nämlich Kupfer einen größeren Modul besitzt als Silber, wird durch den ersten Kupferzusatz (0,01 Äq.-Gew.) der Modul des Silbers um etwa 4 Proz. herabgedrückt. Bei größerem Kupfergehalt jedoch übersteigen die Abweichungen von der Mischungsregel nicht einige Prozent.

Man könnte zweifelhaft sein, ob dieses erste Sinken des

1) Für ausgeglühte Drähte findet Cl. Schaefer merkwürdig niedrige E -Werte (Ann. d. Phys. 5. p. 220. 1901).

2) G. Wertheim, l. c. p. 98.

3) G. Angenheister, l. c.

Moduls wirklich dem Kupferzusatz zuzuschreiben ist. Das möchte ich doch annehmen, denn auch die Zahlen von Tab. 8 deuten auf dergleichen Anomalien hin. So wird der Elastizitätsmodul reinen *Goldes* schon durch 2 Promille Fremdkörper um 3 Proz. herabgedrückt. Am empfindlichsten scheint in dieser Beziehung aber *Zink* zu sein. Für das reine Zink II ist hier ein Modul beobachtet, der wegen der Porosität des Materials jedenfalls noch zu klein ist, dennoch aber alle bisher für Zink beobachteten Zahlen weit übertrifft. Der Grund ist sicherlich wohl darin zu suchen, daß die Beimengungen, die das Zink erst zu dichtem Guß brauchbar machen und deshalb von den anderen Beobachtern mit in den Kauf genommen wurden, den Modul außerordentlich herabdrücken, wie z. B. auch beim Stabe Zink I.

In Legierungen wirkt Zink erniedrigend auf den Elastizitätsmodul. Für *Messing* mit 60 Proz. Cu, 40 Proz. Zn findet Hr. Voigt $E = 9220$, während nach der Mischungsregel ein Wert zwischen $12\text{--}13000 \text{ kg/mm}^2$ folgen würde. Für den *Rotgußstab*, der neben 85,7 Proz. Cu nur 7,15 Proz. Zn, 6,39 Proz. Sn und 0,58 Proz. Ni enthält, würde nach der Mischungsregel etwa $E = 12000$ zu erwarten sein, während beobachtet wurde 8300 kg/mm^2 (Tab. 8). Sind dagegen nur Kupfer, Zinn und Nickel ohne Zink legiert, so gilt die Mischungsregel annähernd, so bei der *Bronze* von Voigt, die mit 88 Proz. Cu und 12 Proz. Sn etwa $E = 11700$ erwarten läßt, während 10600 kg/mm^2 beobachtet wurde, und beim *Konstantan*, das mit 60 Proz. Cu und 40 Proz. Ni nach der Mischungsregel etwa $E = 15700$, in den Versuchen 16500 kg/mm^2 gibt.¹⁾

Bekanntlich treten auch bei den Nickelstählen Anomalien hinsichtlich der Mischungsregel auf. Guillaume²⁾ hat den Verlauf des Elastizitätsmoduls der *Nickelstähle* mit steigendem

1) Die von Hrn. F. A. Schulze (l. c.) ausgesprochene Vermutung, daß die Anomalie der Elastizitätsverhältnisse von Legierungen parallel gehe derjenigen des elektrischen und thermischen Leitvermögens, scheint also durch die vorliegenden Versuche nicht gestützt zu werden, da für Konstantan, die bekannte Legierung mit maximalem Leitungswiderstand, keine Anomalie eintritt. Doch kann die Frage nach Angenheister erst entschieden werden, wenn der Volumelastizitätsmodul bestimmt ist.

2) Ch. Éd. Guillaume, Compt. rend. 124. p. 753. 1897.

Nickelgehalt untersucht, wobei sich zeigt, daß die „Invar“ genannte Legierung von 36 Proz. Ni mit $E = 14700 \text{ kg/mm}^2$ ein Minimum des Elastizitätsmoduls erreicht, nachdem bei 22 Proz. Ni sich ein schwaches Maximum (19700) ausgebildet hat. Man bringt wohl mit Recht diese Änderungen der elastischen Eigenschaften ebenso wie der thermischen mit der Verwandlung der verschiedenen Modifikationen des Eisens (α - und γ -Eisen) in Zusammenhang. Insofern ist die Ausnahmestellung dieser Legierungen von vornherein wahrscheinlich.

Eins der auffallendsten Beispiele für den Einfluß von Fremdkörpern im Material bildet das gewöhnliche *Gußeisen*. *Graues* Gußeisen, aus dem die Stäbe *A 6* und *G K 3* bestehen, enthält die Kohle zumeist in Form von Graphit¹⁾, also *freiem* Kohlenstoff, Eisen und Stahl enthalten die Kohle *gebunden* im Cementit (Fe_3C), Perlit (eutektisches Gemenge von Ferrit und Cementit) und Martensit (feste Lösung von C in Eisen). Man kann auch durch schnelles Abkühlen geschmolzenen Gußeisens die Ausscheidung von Graphit hindern und erhält dann *weißes* Gußeisen mit *gebundenem* Kohlenstoff. Zusätze von C, Si etc., wie sie im Stahl vorkommen, d. h. etwa bis $1\frac{1}{2}$ Proz., ändern den Elastizitätsmodul wenig. Auch für Hartguß, d. h. beim Guß schnell gekühltes, daher graphitarmes weißes Eisen, fand Hr. Bach²⁾ einen gegen reines Eisen verhältnismäßig wenig erniedrigten Modul, etwa 18000 kg/mm^2 , während gewöhnliches, langsam gekühltes graues Eisen aus derselben Pflanze 13000 kg/mm^2 gab. Daraus geht hervor, daß *der Einfluß gebundenen Kohlenstoffs auf den Elastizitätsmodul des Eisens verhältnismäßig gering ist, daß aber die Anwesenheit von freiem Kohlenstoff ihn stark herunderdrückt*. Die Ausscheidung des Graphits ist mit einer bedeutenden Auflockerung des Materials verbunden, die Dichte sinkt von etwa 7,6—7,7 (weißes Eisen) auf 7,1—7,2 (graues Eisen).

§ 21. Vergleich mit bisher bekannten Zahlen.

Aus den vorigen Abschnitten geht hervor, wie wenig vergleichbar die Zahlen verschiedener Beobachter sind, wenn

1) Vgl. die Analysen Tab. 8.

2) C. Bach, Mitt. üb. Forsch.-Arb. Heft 1. p. 1. 1901.

nicht Methode und Deformationsgröße, Zusammensetzung und Vorgeschichte des Materials in Betracht gezogen werden. Selbst wenn eine Erörterung aller dieser Punkte für das bisher vorliegende Zahlenmaterial möglich wäre, würde sie hier zu weit führen. Deshalb habe ich mich darauf beschränkt, in Tab. 8 neben den von mir gefundenen Zahlen erstens diejenigen Elastizitätsmoduln anzuführen, die Hr. Voigt an gegossenen Platten von 10 cm Länge, 0,6 cm Breite, 0,1 cm Dicke und von bekannter Zusammensetzung gefunden hat (die Dichten sind zur Charakterisierung des Materials in Klammern beigelegt), und zweitens die abgerundeten Mittelwerte, wie sie Hr. F. Kohlrausch für die Tab. 20 seines Lehrbuches ¹⁾ aus dem bisherigen Zahlenmaterial abgeleitet hat. Im allgemeinen liegen meine Zahlen höher als die Voigtschen, doch nicht um so viel, daß die Unterschiede in der Reinheit und Dichte des Materials nicht zur Erklärung genügten. Dagegen bleibt meine Zahl für Kadmium bedeutend hinter der Voigtschen zurück. Hr. Voigt gibt an, daß sein Material anscheinend ganz dicht war, was ich von meinem Stabe nicht behaupten kann. Dennoch halte ich den Unterschied der Zahlen für zu groß, um ihn auf die Existenz von Poren zurückzuführen. Von anderer Seite liegen Beobachtungen über Kadmium meines Wissens nicht vor.

Überraschend groß haben sich die bisher wohl unbekannten Elastizitätsmoduln von *Iridium* und *Rhodium* ergeben. Iridium übertrifft noch um ein geringes den *Korund*, für den Hr. Auerbach ²⁾ $E = 52000 \text{ kg/mm}^2$ fand, während Rhodium etwa den gleichen Elastizitätsmodul hat wie der *Topas* ($E = 30000 \text{ kg/mm}^2$). Der Härte nach stehen Iridium und Rhodium unter den Metallen gleichfalls oben ³⁾, bleiben aber noch hinter dem *Topas* zurück. Rhodium reiht sich zwischen Apatit und Hornblende ein, Iridium zwischen Hornblende und Feldspat. ⁴⁾ Diese Angaben gelten für die vorliegenden Stäbe. Bei anders

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Physik. 10. Aufl. 1905.

2) F. Auerbach, Wied. Ann. 58. p. 381. 1896.

3) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, l. c. p. 322.

4) Vgl. über Beziehungen zwischen Härte und Elastizitätsmodul F. Auerbach, Wied. Ann. 53. p. 1000. 1894; über „absolute“ Härte der Minerale 58. p. 380. 1896.

behandeltem Material kann sich die Reihenfolge bezüglich der Härte ändern.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Die Messung elastischer Dehnungen mittels Interferenzen bildet eine auf *alle* Materialien, auch solche mit großer elastischer Nachwirkung, anwendbare Methode zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben.

Für homogenes Material führt diese statische Methode zum gleichen Resultat, wie die dynamischen Methoden der Transversal- und Longitudinalschwingungen. Unterschiede deuten auf Inhomogenitäten.

Für inhomogenes Material entspricht die aus der statischen Methode abgeleitete Zahl im allgemeinen am besten dem mittleren Elastizitätsmodul.

An dem erhaltenen Zahlenmaterial bestätigt sich die bekannte Tatsache, daß die Mischungsregel für den Elastizitätsmodul nur in manchen Fällen annähernd gilt. Silber, Gold, Zink scheinen durch kleine Mengen fremder Stoffe eine unverhältnismäßig große Erniedrigung des Elastizitätsmoduls zu erleiden. Zink drückt auch in Legierungen den Modul stark herab. Im Eisen wirkt besonders der als Graphit ausgeschiedene Kohlenstoff erniedrigend auf den Elastizitätsmodul.

Iridium steht mit seinem Elastizitätsmodul von 52500 kg/mm^2 unter den bisher untersuchten Metallen und Mineralen an erster Stelle.

(Eingegangen 1. März 1907.)

2. Untersuchung über selektive Absorption im Quecksilberlichtbogen; von R. Küch und T. Retschinsky.

(Mitteilung aus dem Laboratorium von W. C. Heraeus.)

(Hierzu Taf. IV, Fig. 1 u. 2.)

Wir haben früher¹⁾ aus der Tatsache, daß die Watt-Ökonomiekurve des bei hohem Druck brennenden Lichtbogens der Quecksilberlampe aus Quarzglas ein Maximum aufweist, geschlossen, daß wir darin die Wirkung regulärer Strahlung zu sehen hätten. Wir konnten im Anschluß daran nachweisen, daß im kontinuierlichen Spektrum des Bogens mit zunehmender Belastung der Lampe die kürzeren Wellenlängen an Intensität schneller zunehmen als die längeren, und daß die Gesamtemission der ultravioletten Strahlung schneller anwuchs als die der sichtbaren.

Bei Untersuchung von elf stärkeren Linien des sichtbaren Spektrums in dieser Richtung ergab sich, daß das Ansteigen der Intensität dieser Linien mit zunehmender Belastung in gruppenweise verschiedenem Grade stattfindet, aber in keinem nachweisbaren Zusammenhange mit der Wellenlänge stehe. Für dieses Verhalten bot die Annahme höherer Temperatur des Bogens bei höherer Belastung allein keine Erklärung, und es drängte sich uns daher die Vermutung auf, daß darin eine Wirkung der Absorption des Bogens sich äußere.

Wir versuchten deshalb zunächst die Absorption einzelner Linien im sichtbaren Spektrum, deren Emissionszunahme mit steigender Belastung wir früher untersucht hatten, zu messen.

Zu diesem Zweck stellten wir zwei Lampen der zu unseren früheren Untersuchungen²⁾ verwandten Form hintereinander auf und verglichen für einige Linien des sichtbaren Spektrums die Intensitäten der vorderen Lampe allein (J_v), die der hinteren Lampe allein (J_h), und diejenige beider gleichzeitig brennenden

1) R. Küch u. T. Retschinsky, Ann. d. Phys. 20. p. 563. 1906.

2) l. c. Taf. IV, Fig. 1.

Lampen (J_{v+h}) mit den Linien einer dritten konstant brennenden Lampe. $J_v + J_h - J_{v+h}$ ergab dann die durch die vordere Lampe absorbierte Intensität.

In die Wandung der vorderen, absorbierenden Lampe waren zwei zueinander parallele planparallele Platten eingeschmolzen, um Störungen des Strahlenganges durch die ungleichmäßige Form geblasenen Quarzglas auszuscheiden. Zwischen beiden Lampen befand sich ein Diaphragma von 2 mm Breite und 25 mm Länge; vor der vorderen Lampe wurde ein zweites gleiches Diaphragma aufgestellt. Um es zu vermeiden, daß an den planparallelen Platten sich Quecksilber kondensiere, wenn die Lampe nicht brannte und wir durch sie hindurch die hintere Lampe allein photometrierten, war unterhalb der Lampe ein elektrischer Heizkörper befestigt, der diese Kondensation verhinderte. Einrichtungen zum Höher- und Tieferstellen der Lampen ermöglichten die genaue Einstellung des Leuchtfadens. Die Lampen brannten an Akkumulatoren bis auf 1 Proz. konstant, sobald der stationäre Zustand erreicht war, was jedesmal etwa eine halbe Stunde dauerte.

Gemessen wurde mit der früher benutzten Einrichtung; in einem Spektroskop nach Hoffmann (*à vision directe*) wurden mit Hilfe eines Vergleichsprismas das Spektrum der Vergleichslampe und das zu messende Spektrum übereinander entworfen; zwischen den zu messenden Lichtquellen und dem Spektroskop befand sich ein Nicolpaar zur Schwächung.

Wir hofften anfangs, daß es gelingen würde, für eine größere Anzahl von Linien das Verhältnis von Emission und Absorption festzustellen, so daß man hätte untersuchen können, ob dieses Verhältnis für das entsprechende Stück des Spektrums kontinuierlich ineinander übergehende Werte ergab und eventuell auch ob die Änderung von E/A mit steigender Belastung für benachbarte Wellenlängen nahe gleich sei.

Wir haben diesen Versuchen sehr viel Zeit und Mühe gewidmet, mußten uns aber überzeugen, daß die uns zu Gebote stehende Meßvorrichtung für den beabsichtigten Zweck keine genügende Genauigkeit erreichen ließ.

Wir setzen hierher wenigstens eine der Messungsreihen an der gelbgrünen Serienlinie 5461 und der gelben Doppel-

linie 5769/90, aus der wir sehen, daß bei der gewählten Belastung der Lampen die Absorption einer etwa 1,5 cm dicken Schicht des Lichtbogens für erstere Linie im Mittel 52 Proz., für letztere Linie 15 Proz. des einfallenden Lichtes beträgt. Die Berücksichtigung der in den beobachteten Werten steckenden Werte für die Reflexionen Luft-Quarzglas und Quarzglas-Quecksilberdampf erschien bei der Ungenauigkeit der Methode unnötig.

Tabelle I.

Belastung der hinteren Lampe: 94—96 Volt; 4,2—4,3 Amp.

Belastung der vorderen Lampe: 85—95 Volt; 4,2—4,4 Amp.

λ	J_r	$J_r + J_h$	J_h	Absorption in Proz. des einfallenden Lichtes
5769/90	480	737	309	17
5461	477	635	302	48
5769/90	604	913	375	18
5461	580	730	336	55
5769/90	558	924	379	4
5461	558	740	353	49
5769/90	462	740	332	16
5461	484	624	309	55
5769/90	536	806	345	22
5461	511	650	302	54

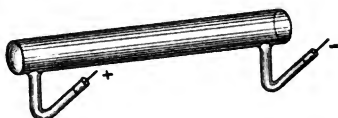
Aus dieser Messungsreihe geht hervor, daß die Linie 5461 und das Paar 5769/90 im Lichtbogen in sehr verschieden hohem Grade absorbiert werden. Wir durften annehmen, daß dieses auch für die übrigen Linien der Fall sein mußte, und konnten infolgedessen voraussehen, daß die verschiedene Absorption der verschiedenen Linien sich dann geltend machen würde, wenn wir das Intensitätsverhältnis der Linien im Spektrum verschieden dicker Schichten des Lichtbogens miteinander verglichen.¹⁾ Glichen wir die absoluten Intensitäten einer dünnen und einer dicken strahlenden Schicht so gegeneinander ab,

1) Vgl. hierzu H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 2. p. 232 und p. 241 ff. 1902.

daß irgend eine Linie in dem Spektrum beider Schichten gleiche Intensität besaß, so mußten alle Linien, welche stärker absorbiert werden als die gleichgestellten, im Spektrum der dünnen Schicht größere Intensität zeigen als in demjenigen der dicken Schicht, und alle Linien, welche schwächer absorbiert werden, umgekehrt sich verhalten.

Zur experimentellen Prüfung dieser Schlußfolgerung wählten wir folgende Versuchsanordnung.

Wir stellten uns zwei vollkommen gleiche Quecksilberlampen von folgender Form her:



Ein ca. 20 mm weites und ca. 460 mm langes Rohr ist an beiden Enden mit eingeschmolzenen, planparallelen Platten verschlossen. Nahe den Rohrenden sind zwei ca. 50 mm lange Rohrstücke senkrecht zur Achse des weiten Rohres angesetzt, von denen eines ca. 15 mm, das andere ca. 10 mm weit ist, und von denen das weitere den positiven und das engere den negativen Quecksilberpol aufnimmt. Die Stromzuführung geschieht durch Nickelstahlstifte, die in Rohrstopfen eingeschliffen sind, welche vom unteren Ende der Polrohre schräg nach oben führen. Die Abdichtung der Nickelstahlstifte geschieht durch einen Quecksilberverschluß, der durch Chattertonkitt überdeckt wird. Die Polgefäße werden in Gefäße aus Metall eingesetzt, durch welche Kühlwasser fließt.

Durch Regulierung der Kühlung und der elektrischen Belastung ist es möglich, beide Lampen bei jeder beliebigen Stromstärke und Spannung dauernd absolut konstant brennen zu lassen, so daß es erlaubt war, das Spektrum der Querdurchsicht der einen Lampe mit dem Spektrum der Längsdurchsicht der anderen Lampe zu vergleichen, wenn beide mit genau der gleichen Charakteristik brannten.

Wir hatten zuerst versucht, die Längsdurchsicht mit dem Spiegelbilde der Querdurchsicht derselben Lampe zu vergleichen, mußten hiervon aber absehen, da die selektive Re-

flexion des verwandten Silberspiegels das Resultat im Ultraviolett vollkommen fälschte. Von einem Drehen derselben Lampe dem Spektrographen gegenüber aus der Stellung der Querdurchsicht in diejenige der Längsdurchsicht sahen wir ab, da die jedesmalige genaue Orientierung der letzteren Stellung außerordentlich zeitraubend gewesen wäre.

Diese Orientierung mußte sehr genau geschehen, da wir den Spektrographen in großer Entfernung von der Lichtquelle aufstellen mußten. Sollten nämlich die von den hinteren Teilen des Rohres kommenden Strahlen den von den vorderen Teilen kommenden gegenüber nicht schon durch die größere Entfernung geschwächt zur Wirkung kommen, *so mußte die Entfernung des Spektrographen von der Lampe so groß gewählt werden, daß ihr gegenüber die Länge des Rohres vernachlässigt werden konnte.* Wir haben den Spektrographen deshalb in einer Entfernung von ca. 15 m von den Lampen aufgestellt.

Die beiden Lampen wurden in einer Entfernung von etwa 1,5 m voneinander mit den zugehörigen Kühlvorrichtungen auf einem Tische so aufgestellt, daß die eine ihre Breitseite, die andere eine Stirnfläche dem Spektrographen zukehrte.

Der Spektrograph von Schmidt & Haensch¹⁾, mit Glas- und Quarzoptik, war auf einer Drehscheibe so aufgestellt, daß die Kollimatorachse abwechselnd auf die Längs- und die Querlampe gerichtet werden konnte. Die genaue Orientierung der Längslampe geschah so, daß die Achse eines Fernrohres, welches zwischen Lampe und Spektrograph, etwa 1,5 m von letzterem entfernt, aufgestellt war, horizontal und in die Verlängerung der Kollimatorachse gerichtet wurde. Mit diesem Fernrohr wurde ein hinter der Längslampe gelegener Punkt fixiert, und dann die Lampe so aufgestellt, daß dieser Punkt in zentraler Lage durch die beiden Stirnflächen der Lampe hindurch sichtbar war. In entsprechender Weise geschah die Aufstellung der Querlampe. Die Drehscheibe, auf welcher der Spektrograph stand, hatte zwei Anschläge, welche die Richtungen der Kollimatorachse auf die Quer- und die Längslampe fixierten. Lampen und Spektrograph befanden sich in zwei durch eine Tür getrennten Räumen; verschließbare Diaphragmen

1) F. Schmidt & Haensch, Katalog II. p. 38. September 1903.

in der Tür erlaubten es, das Licht jeder Lampe gesondert zum Spektrographen zu senden, auch wenn beide Lampen gleichzeitig brannten. Diffuses Licht wurde durch geeignete Anordnung mehrerer Diaphragmen abgehalten. Die Intensität des von jeder Lampe zum Spektrographen gelangenden Lichtes konnte durch variierbare Diaphragmen geändert werden.

Es stellte sich nun alsbald heraus, daß in der Tat die Intensitätsverteilung im Spektrum der Längsdurchsicht eine so wesentlich andere war, als in demjenigen der Querdurchsicht, daß der Unterschied schon dem bloßen Auge sichtbar wurde. Die Gesamtfarbe des Lichtes der Längsdurchsicht erscheint bei weitem gelber und röter als diejenige des Lichtes der Querdurchsicht.

Wir verglichen nunmehr zunächst das sichtbare Spektrum der Querdurchsicht mit demjenigen der Längsdurchsicht durch okulare Beobachtung, indem wir durch einmalige Spiegelung des Lichtes der Querlampe und Vergleichsprisma die beiden Spektren übereinander entwarfen.

Es gelingt leicht, durch ein veränderbares Diaphragma, welches vor die Querlampe gestellt wird, die Intensitäten beider Spektren so gegeneinander abzugleichen, daß irgend eine Linie die gleiche Intensität zeigt. Wählt man hierzu z. B. die grüne Serienlinie 5461, so sieht man ohne weiteres, daß das gelbe Paar 5769/90 im Spektrum der Längslampe sehr erheblich größere Intensität besitzt. Annähernd die gleiche Intensität in beiden Spektren zeigt die blaue und violette Serienlinie (4358 und 4047). Alle übrigen Linien sind im Längsspektrum stärker; ebenso das kontinuierliche Spektrum. Stellt man durch Veränderung des Diaphragmas der Querlampe z. B. das gelbe Paar 5769/90 in beiden Spektren gleich, so erscheinen die Serienlinien 5461, 4358, 4047 in der Querlampe stärker, andere Linien sind in der Längslampe stärker. Betrachtet man benachbarte Linien von verschiedener Emission, so findet man, daß *beim Gleichstellen der stärkeren Linie die schwächere allemal in der Längslampe stärker ist*. Besonders klar tritt dieses Verhältnis bei den nahe beieinander liegenden blauen Linien 4358, 4347, 4339 hervor, indem bei gleichgestellter Linie 4358 die Linien 4347 und 4339 ganz außerordentlich in der Längslampe überwiegen. Auch die

schwächeren Linien im Gelbgrün und Grün bilden zahlreiche Beispiele.

Da wir voraussetzen dürfen, daß diejenige von zwei Linien in der dickeren Schicht der dünneren gegenüber am meisten absorbiert wird, welche am wenigsten an Intensität gewinnt, so folgt aus den mitgeteilten Beobachtungen, daß von nahe beieinander liegenden Linien im Quecksilberlichtbogen die stärkere am meisten absorbiert wird.¹⁾

Da wir die erhaltenen Resultate insbesondere auch im Ultraviolett prüfen wollten, wo die zahlreichen Serienlinien besonderes Interesse boten, so gingen wir dazu über, auf photographischem Wege zunächst im sichtbaren Gebiet die beobachteten Tatsachen zu fixieren und wandten hierfür die folgende Methode an:

Wie oben erwähnt, konnte der Spektrograph mittels einer Drehscheibe abwechselnd auf die Längs- und die Querlampe gerichtet werden. Wir ermittelten nun durch Veränderung des Diaphragmas der Querlampe zunächst ein Intensitäts-

1) Auf Veranlassung von Hrn. Prof. J. Stark stellten wir nach Abschluß der vorliegenden Untersuchung an einigen stärkeren Linien auf spektralphotometrischem Wege für die Querlampe und für die Längslampe das Intensitätsverhältnis zu den Linien einer Vergleichslampe fest. Wir bedienten uns der früher (Ann. d. Phys. 20. p. 563. 1906) benutzten Anordnung. Setzen wir die Intensitäten aller Linien der Vergleichslampe und der Linie 5461 in Quer- und Längslampe gleich 100, so ergeben sich für die Intensitäten der anderen Linien die in der Tabelle zusammengestellten Zahlen.

Tabelle II.

λ	Quer	Vergleichs- lampe	Längs
5790/69	81	100	212
5461	100	100	100
4959	66	100	443
4916	71	100	443
4358	92	100	96
4347/39	64	100	463

Das Verhältnis der Intensität in Quer- und Längslampe für die Linie 4358 ist dem der Linie 5461 gleich; für die anderen Linien ergibt sich ein starkes Anwachsen der relativen Intensitäten in der Längslampe.

verhältnis, bei welchem bei genau gleicher Expositionszeit geeignete Linien in der Querlampe deutlich stärker erschienen als in der Längslampe. Nun exponierten wir Längs- und Querlampe abwechselnd jedesmal genau gleich lang mit drei verschiedenen passend gewählten Expositionszeiten.

Es zeigte sich nämlich, daß man, um bei allen Linien die Intensitätsunterschiede erkennen zu können, mit einer einzigen Aufnahme jedes Spektrums nicht auskommt. Die Stärke zweier Linien läßt sich, wenn es sich um geringe Unterschiede handelt, nur vergleichen, wenn eine gewisse Schwärze der Platte noch nicht überschritten ist. Man braucht zum Vergleich der stärkeren Linien deshalb kürzere Expositionszeiten, bei denen die schwächeren Linien noch nicht herauskommen. Die Belastung beider Lampen wurde bei allen Aufnahmen untereinander genau gleich gehalten. Die kurz exponierten Aufnahmen erlauben nun den Vergleich der starken, die länger exponierten den der schwächeren und schwächsten Linien des Spektrums.

Für die Photographie des sichtbaren Spektrums verwandten wir mit „Orthochrom T“ sensibilisierte Platten der *Farbwerke Höchst*, für die Photographie des Ultraviolets gewöhnliche *Schleussnerplatten* des Handels. Die Reproduktion der Aufnahmen ist in etwa doppelter Vergrößerung des Originals geschehen.

Wir haben eine sehr große Anzahl von Aufnahmen gemacht, müssen uns aber naturgemäß darauf beschränken, die gefundenen Gesetzmäßigkeiten an einem typischen Beispiel, das sich auf Taf. IV abgebildet findet, zu demonstrieren.

I. Sichtbares Spektrum (Taf. IV, Fig. 1).

Belastung beider Lampen 5 Amp., 142 Volt. Spektrum 1, 3, 5: Längslampe; Spektrum 2, 4, 6: Querlampe. Spektrum 1 und 2: Expositionszeit 1 Stunde; Spektrum 3 und 4: Expositionszeit 2 Min.; Spektrum 5 und 6: Expositionszeit 5 Sek.

Die Intensitäten beider Lampen sind durch Diaphragmen so abgeglichen, daß die stärksten Linien 5461—4358—4047 in Querlampe deutlich stärker sind, als in Längslampe. Es ergibt sich dann, daß sämtliche übrigen Linien in der Längslampe stärker sind, als in der Querlampe. Auch das konti-

nuierliche Spektrum ist in der Längslampe stärker als in der Querlampe. Im einzelnen läßt sich dann noch vielfach erkennen, daß von benachbarten Linien die schwächeren in der Längslampe mehr überwiegen als die stärkeren.

II. Ultraviolettes Spektrum (Taf. IV, Fig. 2).

Belastung beider Lampen 5,1 Amp., 145 Volt. Spektrum 1, 3, 5: Längslampe; Spektrum 2, 4, 6: Querlampe. Spektrum 1 und 2: Expositionszeit 6 Min.; Spektrum 3 und 4: Expositionszeit 30 Sek.; Spektrum 5 und 6: Expositionszeit 5 Sek.

Die Intensitäten beider Lampen sind durch Diaphragmen so abgeglichen, daß die Linien 4359 (blau) und 4047 (violett), sowie noch einige andere Serienlinien, von denen weiter unten ausführlicher die Rede ist, in der Querlampe stärker sind als in der Längslampe. Es ergibt sich dann zunächst, daß die zwischen 4047 und 3341 liegenden schwächeren Linien in der Längslampe stärker sind als in der Querlampe. Wir haben also auch hier das Resultat, daß von benachbarten Linien die schwächeren in der Längslampe mehr überwiegen als die stärkeren.

Es lag nun nahe, die im Ultraviolett des Quecksilberspektrums vorhandenen Serienlinien bezüglich ihrer Absorption etwas genauer zu vergleichen und es ergab sich in der Tat, daß hier eine deutliche Gesetzmäßigkeit vorliegt.

Im Quecksilberspektrum sind bekanntlich sechs Serien (zwei Nebenserien von Triplets) vorhanden. In der folgenden Tabelle haben wir das Resultat unserer Beobachtungen an den Linien dieser sechs Serien zusammengestellt. Die Beobachtungen geschahen an den Originalplatten mit dem Mikroskop. In den Vergrößerungen sind die Intensitätsverhältnisse in den extremeren Fällen gleichfalls sichtbar.

Tabelle III.
Erste Nebenserie.

<i>n</i>	λ	Quer	Längs	λ	Quer	Längs	λ	Quer	Längs
4	3650	gleich		3125	stärker		2967	stärker	
5	3021	gleich		2652	stärker		2534	gleich	
6	2803		stärker	2482		gleich	2378		stärker
7	2699		stärker	2399		stärker	2301		stärker

Tabelle III (Fortsetzung).

Zweite Nebenserie.

<i>n</i>	λ	Quer	Längs	λ	Quer	Längs	λ	Quer	Längs
3	5461	—	—	4358	stärker		4047	stärker	
4	3341	stärker		2893	stärker		2752	stärker	
5	2925		stärker	2576		stärker	2464		stärker
6	2759		stärker	2446		stärker	2345		stärker
7	2675		stärker						

Die ersten, zweiten und dritten Linien der Triplets stehen je untereinander. Für jede Linie ist angegeben, ob sie in Querlampe oder in Längslampe stärker oder in beiden gleich ist. Es ergibt sich das Resultat, das allgemein in den Serien die Linien größerer Wellenlängen entweder in Querlampe stärker oder in beiden Lampen gleich, daß die Linien kleinerer Wellenlängen in der Längslampe stärker sind; d. h. also: *in allen Serien werden die Linien kleiner Wellenlängen weniger absorbiert als diejenigen großer Wellenlängen.*

Die Triplets der ersten Nebenserie zeigen bekanntlich einen zusammengesetzten Bau, indem in jedem Triplet die erste Linie aus vier, die zweite aus drei, die dritte aus zwei Komponenten besteht. Aus unseren Versuchen ergibt sich, daß in der ersten und zweiten zusammengesetzten Linie jeden Triplets die stärkste Komponente, die auch zugleich diejenige kleinster Wellenlänge ist, stärker absorbiert wird als ihre Begleiter; die relativen Intensitäten der schwächeren Komponenten sind in der Längslampe größer als in der Querlampe.¹⁾ Die allgemeine Regel, daß von benachbarten Linien die stärkeren

1) In dem Spektrum unserer Längslampe erscheint infolge der großen Schichtdicke außer den von Eder und Valenta gemessenen Linien 2806/4/3—2483/2/2 noch die Linie 2805,3. Wir haben sie mittels einer Skala unter dem Mikroskop bis auf 0,2 Å.-E. genau interpoliert. Die Rechnung ergibt, daß diese Linie, wie auch die Linien 2806/4/3 und 2483/2/2 dem Triplet der ersten Nebenserie für $n = 6$ angehört. Sein Bau wird dadurch dem der ersten zwei Triplets analog. Die Differenzen zwischen den Schwingungszahlen der Komponenten der ersten Linie dieses Triplets sind: 15,6—11,4—9,0; der zweiten Linie: 16,2—12,3.

Linien stärker absorbiert werden als die schwächeren, gilt also auch für die Komponenten dieser zusammengesetzten Serienlinien.¹⁾

Das Quecksilberspektrum hat bei 2536,7 bekanntlich noch eine besonders starke Linie, die nicht zu den Serienlinien gehört. Über die Absorptionsverhältnisse dieser Linie erlauben uns unsere Spektrogramme keinen sicheren Schluß zu ziehen, da die Linie uns sehr oft umgekehrt und an ihrer Stelle ein bis zu 5 Å.-E. breiter weißer Strich erschien. Die Linie erschien nur bei sehr niedriger Belastung nicht umgekehrt.

Die bisherigen Untersuchungen haben uns das allgemeine Resultat ergeben, daß die Intensitätsverteilung im Linienspektrum des Quecksilberbogens bei konstanter Temperatur eine sehr verschiedene ist, je nachdem das Spektrum von einer dünnen oder von einer dicken Schicht ausgestrahlt wird. Früher²⁾ haben wir nachweisen können, daß mit steigender elektrischer Belastung der Quecksilberlampe, bei welcher die mittlere Temperatur³⁾ und der Dampfdruck steigt, gleichfalls eine Änderung der Intensitätsverteilung eintritt. Wir ver-

1) Wir ließen durch die Lampen, welche uns den Lichtbogen geliefert hatten, die Entladungen eines kleinen Induktoriums von etwa 2 cm Funkenlänge gehen, dessen Primärspule mit zwei Akkumulatoren gespeist wurde, indem wir zur Erzielung größerer Intensität Rohr und Elektroden etwas erhitzen, und photographierten die Spektren der Längs- und der Querdurchsicht in der gleichen Weise, wie es oben beschrieben wurde. Das Resultat war genau das gleiche, wie beim Bogen. Ganz besonders deutlich war dies an den zusammengesetzten Linien der ersten Nebenserie zu erkennen. Die Intensitätsunterschiede der einzelnen Komponenten untereinander waren in der Querlampe bei weitem stärker, als in der Längslampe.

Nach Abschluß des Manuskriptes erschien die Notiz von R. W. Wood in Heft 25, 1906 der Physik. Zeitschr. p. 926, der den Unterschied in der Farbe einer dünnen und einer dicken Schicht elektrisch leuchtenden Wasserstoffs bemerkt und als wahrscheinlichen Grund die stärkere Absorption der Linie H_{α} gegenüber H_{β} und H_{γ} angibt. Aus der beigegebenen Skizze scheint hervorzugehen, daß Wood aus geringer Entfernung beobachtete. Wie oben bemerkt, muß man die Erscheinung deutlicher in größerem Abstand erhalten.

2) l. c. p. 578.

3) R. Küch u. T. Retschinsky, Ann. d. Phys. 22. p. 595. 1907.

glichen nunmehr das Spektrum der hochbelasteten Lampe in Querdurchsicht mit dem Längsspektrum der niedrig belasteten Lampe. Es fand sich, daß durch Steigerung der Belastung das Querspektrum dem Längsspektrum der niedrig belasteten Lampe genähert werden kann. Die Intensität aller schwächeren Linien steigt mit steigender Belastung schneller an, als die der stärkeren, so daß also Steigerung der Belastung in demselben Sinne wirkt, wie Vergrößerung der Schichtdicke. Nun haben wir früher¹⁾ mitgeteilt, daß der Lichtbogen unserer Lampe mit steigender Belastung sich einschnürt. Wir nehmen daher an, daß mit dieser Einschnürung infolge größerer Dichte der leuchtenden Schicht größere absorbierende Wirkung der letzteren eintritt, und daß in der früher beobachteten Änderung der Intensitätsverteilung im Spektrum mit steigender Belastung neben der Wirkung erhöhter Temperatur vor allem auch die Wirkung erhöhter Absorption in die Erscheinung trat.

Betrachtet man von diesem Standpunkt aus jetzt die Watt-Ökonomiekurve der hochbelasteten Quecksilberlampe²⁾, so erkennt man in dem Abfall der Kurve nach Erreichung des Maximums die Wirkung höherer Temperatur und kann den Umstand, daß die Kurve nach anfänglichem steilem Abfall abflacht, so deuten, daß in dem steilen Ast der Kurve die Absorption der gelben Doppellinie 5790/69, von deren Emission — neben derjenigen der grüngelben Serienlinie 5461 — die Gesamtökonomie in erster Linie abhängt, noch gering ist, während in der Abflachung sich die mit der Einschnürung des Leuchtfadens größer werdende Absorption dieses Linienpaares ausdrückt.

In welcher Weise erhöhte Temperatur für sich allein das Spektrum des Quecksilberbogens verändert, konnten wir nur erkennen, wenn wir zwei Schichten von gleicher absorbierender Wirkung und verschiedener Temperatur verglichen. Wir konnten gleiche absorbierende Wirkung zweier Schichten nach den vorher mitgeteilten Ergebnissen annehmen, wenn ein eng begrenztes Spektralgebiet in beiden Spektren gleiche relative Intensität aller Linien zeigte.

1) l. c. p. 566, Taf. IV, Fig. 3.

2) l. c. p. 569.

Wie oben erwăhnt, gelingt es nun zwar durch hűhere Belastung unserer Lampe das Spektrum dem Spektrum der Lăngsdurchsicht der niedrig belasteten Lampe in diesem Sinne nahe gleich zu machen. Es ergab sich indessen, daű die mit steigender Belastung eintretende Verbreiterung aller Linien einen genaueren Vergleich mit den unverbreiterten Linien der Lăngsdurchsicht unműglich machte.

Wir kűnnen indessen eine hűhere Belastung unserer Lampe in doppelter Weise vornehmen. Entweder lassen wir die Kűhlung der Elektroden dieselbe bleiben, dann steigt mit hűherer Belastung der Dampfdruck und die Elektrodenspannung, wăhrend die Stromstărke nach Erreichung des stationăren Zustandes dieselbe ist; von dieser Steigerung der Belastung war bisher die Rede. Oder wir verstărken die Kűhlung der Elektroden, dann steigt mit hűherer Belastung die Stromstărke, wăhrend Dampfdruck und Spannung dieselben bleiben. Fűr beide Fălle haben wir Steigerung der mittleren Temperatur und Sinken des spezifischen Wattverbrauches nachgewiesen.

Es stellte sich heraus, daű nur im ersteren Falle Verbreiterung der Linien eintritt, so daű diese Verbreiterung in unserer Lampe als eine Folge des erhűhten Druckes nachgewiesen erscheint.

Der Druck in unserer Lampe wird nun annăhernd gemessen durch den Spannungsabfall pro Zentimeter Lichtsăulenlănge, wenn man etwa 12 Volt fűr Elektrodengefălle in Abzug bringt. Zwei Lampen mit gleichem Spannungsabfall pro Zentimeter Lichtsăulenlănge haben demnach annăhernd den gleichen Dampfdruck und infolgedessen gleich breite Linien.

Von diesen Überlegungen geleitet, gelang es uns zwei vergleichbare Schichten von gleicher absorbierender Wirkung in dem Sinne, daű in eng begrenzten Spektralgebieten die Intensitătsverteilung die gleiche war, herzustellen, die verschiedene Temperatur besaűen. Wir fertigten eine Lampe an, welche genau so konstruiert war wie die beiden 46 cm langen Lampen, deren Leuchtrohr indessen nur etwa 10 cm lang war. Diese und eine der 46 cm langen Lampen wurden fűr Lăngsdurchsicht montiert. Beide Lampen wurden mit etwa dem gleichen Spannungsabfall pro Zentimeter Lichtsăule betrieben. Der langen Lampe gaben wir kleine, der kurzen Lampe groűe

Stromstärke. Das Spektrum der kurzen Lampe mußte deshalb ein solches höherer Temperatur sein.

Wenn wir die lange Lampe mit 125 Volt und 2,2 Amp., die kurze Lampe mit 41 Volt und 10,4 Amp. belasteten, zeigten beide Längsspektren für kleine Spektralbezirke die gleiche Intensitätsverteilung. Wir konnten z. B. durch Abgleichung mittels Diaphragmen erreichen, daß im Ultraviolett zwischen 3908 und 3341 die starken wie die schwachen Linien in beiden Spektren etwa gleich waren.

Wir stellten nun mittels Diaphragmen die Intensitäten beider Lampen so ein, daß die Linien 4358—4109—4078—4047 in der langen Lampe, d. h. derjenigen niedriger Temperatur, stärker waren als in der kurzen Lampe.

Es ergab sich das Resultat, daß unter diesen Umständen die Linien von etwa 3908 bis 2759 in beiden Lampen annähernd gleich, die Linien von da ab bis zum Ende des Spektrums in der kurzen Lampe stärker waren.

Bei gleicher absorbierender Wirkung unterscheidet sich also das Spektrum höherer Temperatur von demjenigen niedrigerer Temperatur dadurch, daß die Linien kürzerer Wellenlängen relativ größere Intensität besitzen.

Schlußfolgerungen.

Wir haben nachgewiesen, daß verschieden dicke Schichten des Quecksilberbogens von derselben Temperatur verschiedene Intensitätsverteilung im Linienspektrum zeigen. Im Spektrum der dickeren Schicht sind die schwächeren von benachbarten Linien relativ stärker. Dies ist als eine Wirkung der Absorption im Bogen, die wir direkt an zwei Linien gemessen haben, zu deuten, so daß wir folgern können: Im Quecksilberbogen wird von benachbarten Linien die Linie größerer Emission auch stärker absorbiert. Wir haben früher wahrscheinlich gemacht, daß reguläre Strahlung im Bogen unserer Lampe eine Rolle spielt. Bringen wir dementsprechend die Folgerungen aus dem Kirchhoffschen Satze zur Anwendung, so müssen wir, da $E/A = e^1$, und da e für benachbarte Wellenlängen bei derselben Temperatur nur wenig verschiedene Werte annehmen

1) Emission des schwarzen Körpers.

kann, verlangen, daß größerem E auch größeres A entspricht. Dies ist im Quecksilberbogen tatsächlich der Fall.

Wir fanden ferner, daß bei gleicher absorbierender Wirkung der Schichten die Spektren von Schichten verschiedener Temperatur sich dadurch unterscheiden, daß bei höherer Temperatur die Linien kleiner Wellenlängen relativ stärker sind, als bei niedriger. Auch dies Verhalten entspricht einer Folgerung aus dem Kirchhoffschen Satze. e wächst mit steigender Temperatur schneller für die kurzen Wellenlängen. Da $E/A = e$, so muß bei gleichem A auch E für die kurzen Wellen mit steigender Temperatur schneller wachsen als für die langen.

Hanau, Dezember 1906.

(Eingegangen 31. Januar 1907.)

3. Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum; von Kurd von Mosengeil †.

(Gekürzter und mit einer Korrektur von M. Planck versehener Abdruck
der Berliner Dissertation.)

§ 1. Historische Einleitung.

Im Vordergrund des Interesses der theoretischen Physik steht unter anderem seit längerer Zeit die Elektrodynamik und Optik bewegter Körper, die bis jetzt noch zu keinem endgültigen Abschlusse gelangt ist.

Alle Versuche, einen Einfluß der Erdgeschwindigkeit auf die elektrodynamischen Erscheinungen festzustellen, haben ein negatives Resultat ergeben. Um dies zu erklären, haben H. A. Lorentz¹⁾ und in noch allgemeinerer Fassung A. Einstein²⁾ das „Prinzip der Relativität“ eingeführt, nach welchem es prinzipiell unmöglich ist, einen derartigen Einfluß aufzufinden.

Eine Stütze für die Lorentzsche Theorie glaubte nun Hr. Fritz Hasenöhrle in einer „Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern“ betitelten Arbeit³⁾ gefunden zu haben. Er meinte dort nämlich zu einem Widerspruch gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gelangt zu sein, den er aber mit Hilfe der Lorentzschen Hypothese beseitigen konnte.

Gegen die Hasenöhrle'sche Arbeit muß ich aber Stellung nehmen, weil sich im Laufe seiner Untersuchung ein Fehler eingeschlichen hat, auch abgesehen von dem Rechenfehler, dessen Aufdeckung Hr. Abraham veranlaßt hat, und der in

1) H. A. Lorentz, Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 1904. p. 809.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

3) F. Hasenöhrle, Ann. d. Phys. 15. p. 344. 1904 u. 16. p. 589. 1905.

der zweiten Arbeit von Hasenöhrl seine Berichtigung gefunden hat. Um dies klar zu legen, ist es erforderlich, auf den Hasenöhrlschen Gedankengang näher einzugehen.

Hr. Hasenöhrl führt zunächst die Begriffe „absolute Strahlung“, „totale“ und „wahre relative Strahlung“ ein, deren Bedeutung hier (zum größten Teil wörtlich) wiedergegeben werden möge:

„Unter absoluter Strahlung versteht man die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer senkrecht zur absoluten Strahlenrichtung gelegenen, absolut ruhenden Ebene durchsetzt.“

„Unter totaler relativer Strahlung versteht man die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer (gedachten) Ebene durchsetzt, welche sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie die emittierende Materie bewegt, und welche senkrecht zur relativen Strahlenrichtung orientiert ist. Ersetzt man diese gedachte Ebene durch eine materielle, schwarze (gleich bewegte und orientierte) Ebene, so ist diese totale relative Strahlung nicht identisch mit dem Betrag der von letzterer absorbierten Wärme; denn es kommt hier noch die Arbeit des Strahlungsdruckes oder die (äußere) Arbeit gegen denselben in Betracht, je nachdem sich die schwarze Ebene in negativem oder positivem Sinne bewegt. Vermindert bez. vermehrt man die totale relative Strahlung um den Betrag dieser Arbeit, so erhält man den Betrag der von der schwarzen Ebene absorbierten Wärme, welcher Betrag die wahre relative Strahlung heißen soll.“

Um die Beziehung zwischen der totalen und wahren relativen Strahlung aufzusuchen, betrachtet Hr. Hasenöhrl einen zylindrischen Hohlraum, dessen Basisflächen A und B zwei schwarzen Körpern angehören sollen, während die Mantelfläche des Zylinders, sowie die äußere Begrenzung der beiden schwarzen Körper nach innen vollkommen spiegelnde Flächen sein sollen. Dieses System soll sich mit konstanter Geschwindigkeit in der Richtung der Erzeugenden des Zylinders bewegen.

Hr. Hasenöhrl greift diejenige totale relative Strahlung heraus, deren relative Richtung (d. h. deren Richtung in bezug auf ein mit dem Hohlraum bewegtes Bezugssystem) mit der

Bewegungsrichtung Winkel zwischen ψ und $\psi + d\psi$ einschließt. Ihren Betrag bezeichnet er mit:

$$2\pi i \cos \psi \sin \psi d\psi,$$

die entsprechende wahre relative Strahlung bezeichnet er mit:

$$2\pi i_0 \cos \psi \sin \psi d\psi.$$

Er wird dann zu dem Schlusse geführt, daß die wahre relative Strahlung allein für den Wärmetransport zwischen den Körpern A und B maßgebend ist.

Weiter folgert er ganz richtig: „Sind die beiden Flächen A und B auf derselben Temperatur, so fordert der zweite Hauptsatz, daß ihre gesamte gegenseitige wahre relative Zustrahlung gleich sei; denn nur dann bleiben ihre Temperaturen einander gleich.“

Nun aber heißt es weiter:

„Damit dasselbe auch von zwei beliebigen, beliebig gegen einander orientierten Flächenelementen gelte, muß für die wahre relative Strahlung das Kosinusetz gelten; d. h. es muß i_0 von ψ unabhängig sein und muß ferner für A und B , also für eine positiv und negativ bewegte Fläche, denselben Wert haben. Wir erhalten also den für das Folgende wichtigen Satz: Die wahre relative Ausstrahlung eines bewegten schwarzen Körpers befolgt (im relativen Strahlengange) das Lambertsche Kosinusetz.“

In dieser Schlußweise liegt ein Fehler. Es darf nur geschlossen werden, daß die gegenseitige wahre relative Zustrahlung der beiden Flächenelemente einander gleich ist; d. h. es muß i_0 für ψ und $\psi + \pi$ denselben Wert haben.

Wenn nun auch die Schlußweise des Hrn. Hasenöhrlich nicht stichhaltig ist, so könnte doch die These, daß i_0 von ψ unabhängig sei, richtig sein.

Es wird im folgenden, wie ich glaube, in einwandfreier Weise eine Theorie der stationären Hohlraumstrahlung für bewegte Körper entwickelt werden, die zu einem anderen Resultat führt¹⁾. Damit verlieren auch alle weiteren Folgerungen der Hasenöhrlichschen Arbeit ihre Bedeutung.

1) Vgl. Ende von § 3, p. 875.

§ 2. Die Unabhängigkeit der stationären Strahlung in einem bewegten Hohlraum von den in ihm befindlichen materiellen Substanzen.

Wir denken uns einen beliebig gestalteten Hohlraum, in dem sich auch beliebige materielle Substanzen befinden können; nur muß er von einer vollkommen spiegelnden Fläche eingeschlossen sein, damit keine Strahlung nach außen dringen kann. Dieser Hohlraum bewege sich (in einem strahlungsfreien Vakuum) mit der konstanten Geschwindigkeit v . Im allgemeinen wird es nötig sein, um die Geschwindigkeit konstant zu halten, eine äußere Kraft auf das System wirken zu lassen. Wenn wir hinreichend lange warten, wird schließlich ein stationärer Zustand eintreten.

Es sind von vornherein zwei Fälle denkbar: Entweder ist zur Aufrechterhaltung dieses Zustandes eine äußere Kraft erforderlich oder nicht. Im ersteren Falle würde dauernd an dem System (positive oder negative) Arbeit geleistet werden; seine Energie und daher auch seine Temperatur müßte dauernd zu- bez. abnehmen. In diesem Falle könnten wir das System mit einem großen Wärmereservoir in Verbindung setzen, dann ändert sich die Temperatur nicht merklich, und infolgedessen bleibt auch der Strahlungszustand konstant.

Nun ist nach Hrn. M. Abraham¹⁾ die an irgend einem System angreifende Kraft gleich der zeitlichen Änderung der Summe der mechanischen und elektromagnetischen Bewegungsgröße. Beide sind aber in unserem Falle konstant. Unser System bewegt sich daher kräftefrei.

Wir denken uns nun zwei mit gleicher Geschwindigkeit v parallel bewegte Systeme der beschriebenen Art I und II, deren Temperatur die nämliche ist. Diese sollen sich in folgender Weise gegenseitig Energie zustrahlen können. Wir machen an jedem in der äußeren spiegelnden Wand an beliebiger Stelle ein Loch, A_1 und A_2 . Aus diesen Löchern könnten Strahlen nach allen möglichen Richtungen dringen. Wir wollen aber nur Strahlen von ganz bestimmter Richtung haben. Deshalb umgeben wir die Löcher außen mit einer vollkommen spiegelnden Hülle, die so orientiert und gestaltet

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. p. 29.

ist, daß sie alle durch A_1 bez. A_2 austretenden Strahlen ebendorthin zurückreflektiert. Durch die Löcher B_1 und B_2 in diesen Hüllen bewirkt man dann, daß nur Strahlen von der Richtung $\overrightarrow{A_1 B_1}$ bez. $\overrightarrow{A_2 B_2}$ herausdringen können. Wir vernachlässigen hierbei die Beugung, was erlaubt ist, wenn die Dimensionen sehr groß gegen die Wellenlängen sind.

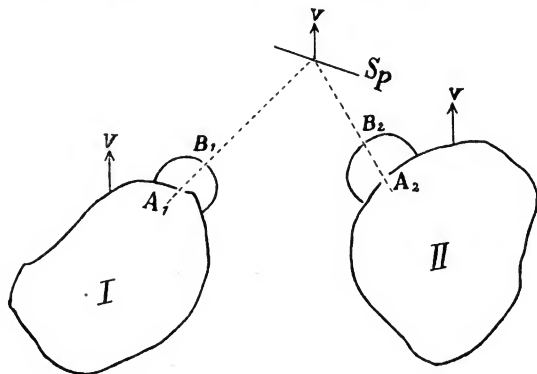


Fig. 1.

Wir stellen einen Spiegel¹⁾, der mit den beiden Systemen zusammen bewegt wird, derart auf, daß er die von $\overrightarrow{A_1 B_1}$ kommenden Strahlen des Systems I nach $\overrightarrow{B_2 A_2}$ reflektiert; nach dem Reziprozitätsgesetz reflektiert er dann die von $\overrightarrow{A_2 B_2}$ kommenden Strahlen des Systems II nach $\overrightarrow{B_1 A_1}$. Die vier Löcher müssen natürlich in gewisser Größenbeziehung zueinander stehen, derart, daß sie von den Strahlen gerade ausgefüllt werden. Falls sie nicht in einer Ebene, wie in der Figur angenommen, liegen, muß man statt der einen eine zweimalige Reflexion anwenden.

1) Wenn hier von Spiegeln die Rede ist, ist immer ein vollkommener Spiegel gemeint.

Wir nehmen an, daß sich in den Hohlräumen hinreichend absorbierende Substanz befindet, so daß die Strahlen, die von I nach II gelangen, dort so gut wie vollständig absorbiert werden und nicht wieder durch A_1B_1 herausgelangen. Der von dem System II durch A_2B_2 emittierte Strahl hat dann seinen Ursprung nur in der Emission der Substanzen des Systems II und ist daher unabhängig von dem einfallenden von I herkommenden Strahl.

Wenn nun die Intensität des von I emittierten Strahles von der Beschaffenheit und Lage der Substanzen abhinge, von denen er ausgeht, so würde er je nachdem dem System II mehr oder weniger Energie zuführen, so daß sich dessen Temperatur ändern könnte. Da aber die Temperaturen der beiden Systeme als gleich vorausgesetzt sind, darf dies nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht geschehen.

Wir werden daher zu dem Schlusse geführt, daß die Intensität der stationären Strahlung in einem bewegten Hohlraum nicht von der Beschaffenheit der emittierenden Substanzen abhängt.

§ 3. Die Abhängigkeit der spezifischen Strahlungsintensität von der Strahlungsrichtung.

Wir bezeichnen, wie vorher, die konstante Geschwindigkeit des Hohlraumes mit v ; ferner sei c die Lichtgeschwindigkeit, ϑ der Winkel, den die (absolute¹⁾) Strahlenrichtung mit der Bewegungsrichtung bildet ($0 \leq \vartheta \leq \pi$), φ der Winkel, den die durch Strahlen- und Bewegungsrichtung gehende Ebene mit einer festen durch die Bewegungsrichtung gelegten Ebene bildet ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

Wir definieren die spezifische Strahlungsintensität $K(\vartheta, v)$ dadurch, daß die Intensität J eines Strahlenbündels vom Öffnungswinkel

$$d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

gegeben wird durch:

$$J = K(\vartheta, v) d\Omega.$$

1) Wir beziehen uns hier durchweg auf ein ruhendes Koordinatensystem, d. h. eines, für das die Maxwellschen Gleichungen gelten.

Wir stellen uns folgende Aufgabe: Aus dem Werte von K für einen bestimmten Wert von ϑ , K für einen anderen Wert von ϑ zu berechnen.

Wir untersuchen die Reflexion an einem in dem Hohlraum befindlichen Spiegel. Dessen von der Reflexionsseite abgewandte Normale n bilde mit der Bewegungsrichtung v den Winkel α . Es falle auf diesen Spiegel ein Strahl in einer Einfallsebene, die mit der v, n Ebene den Winkel ψ einschließt, unter dem Einfallswinkel χ von der Intensität $J = K(\vartheta, v) d\Omega$ auf, und werde unter dem Reflexionswinkel χ' mit der Intensität $J' = K(\vartheta', v) d\Omega'$ reflektiert.

Mit Hilfe der Reflexionsgesetze für bewegte Spiegel läßt sich diese berechnen; nach dem in § 2 gefundenen Resultat gilt dann der so berechnete Wert von $K(\vartheta', v)$ für alle Stellen des Hohlraums.

Es wird gut sein, die Reflexionsgesetze für bewegte Spiegel hier zusammenzustellen, um im Verlaufe der Untersuchung darauf zurückgreifen zu können¹⁾.

Bezeichnet man mit v' die Geschwindigkeitskomponente des Spiegels in Richtung seiner Normalen, positiv gerechnet, wenn sich der Spiegel von der einfallenden Strahlung weg bewegt, so gelten zwischen dem Einfalls- und dem Reflexionswinkel die Beziehungen:

$$(1) \quad \frac{\sin \chi'}{\sin \chi} = \frac{1 + \frac{v'}{c} \cos \chi'}{1 - \frac{v'}{c} \cos \chi} = \frac{\cos \chi' + \frac{v'}{c}}{\cos \chi - \frac{v'}{c}} = \frac{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}{1 - 2 \frac{v'}{c} \cos \chi + \left(\frac{v'}{c}\right)^2}.$$

Für die Öffnungswinkel $d\Omega$ und $d\Omega'$ gilt:

$$(2) \quad \frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \chi'}{\sin^2 \chi}.$$

Ist ν die Schwingungszahl des einfallenden, ν' die des reflektierten Strahles, so ist

$$(3) \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\sin \chi}{\sin \chi'}.$$

Das Verhältnis der Intensitäten ist:

$$(4) \quad \frac{J'}{J} = \frac{\sin^2 \chi}{\sin^2 \chi'};$$

1) Eine Ableitung dieser Gesetze findet sich z. B. bei M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. p. 343.

und daher nach (3) und (5) das Verhältnis der spezifischen Intensitäten:

$$(5) \quad \frac{K(\vartheta', v)}{K(\vartheta, v)} = \frac{J' d\Omega}{J d\Omega'} = \frac{\sin^4 \chi}{\sin^4 \chi'}.$$

Nun sind α, χ, ϑ die Seiten eines sphärischen Dreiecks, in welchem α und χ den Winkel ψ einschließen. Nach dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie ist daher:

$$(6) \quad \cos \alpha \cos \chi = \cos \vartheta - \sin \alpha \sin \chi \cos \psi.$$

Ebenso sind $\alpha, \chi', 2R - \vartheta'$ die Seiten eines sphärischen Dreiecks, in welchem α und χ' den Winkel $2R - \psi$ einschließen. Es ist daher:

$$(7) \quad \cos \alpha \cos \chi' = -\cos \vartheta' + \sin \alpha \sin \chi' \cos \psi.$$

Setzt man für v' seinen Wert

$$v' = v \cos \alpha$$

ein, so geht aus der Formel (1) die Formel:

$$\frac{\sin \chi}{\sin \chi'} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha \cos \chi}{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \cos \chi'}.$$

hervor. Setzt man hierin für $\cos \alpha \cos \chi$ und $\cos \alpha \cos \chi'$ die Werte aus (6) und (7) ein, so erhält man:

$$(8) \quad \frac{\sin \chi}{\sin \chi'} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta + \frac{v}{c} \sin \alpha \cos \psi \sin \chi}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta' + \frac{v}{c} \sin \alpha \cos \psi \sin \chi'},$$

woraus folgt:

$$(9) \quad \frac{\sin \chi}{\sin \chi'} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta'}.$$

Formel (5) geht darnach über in:

$$(10) \quad \frac{K(\vartheta', v)}{K(\vartheta, v)} = \left(\frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta'} \right)^4.$$

ψ und α kommen in dem Ausdruck, wie man sieht, nicht vor, der von der Form $f(v, \vartheta)/f(v, \vartheta)$ ist. Es ließ sich dies voraussehen, da nur in diesem Fall der nämliche Wert für

$K(\vartheta', v) / K(\vartheta, v)$ herauskommt, wenn der Strahl nicht durch eine einmalige, sondern durch eine mehrmalige Reflexion aus der einen Richtung in die andere übergeführt wird. Wir hätten uns unsere Aufgabe daher sehr erleichtern können, indem wir den Spiegel in speziellerer Weise gegen den einfallenden Strahl orientiert hätten. Es schien mir aber ganz nützlich, zu zeigen, daß die thermodynamischen Überlegungen des § 2 für den Fall, daß wir es nur mit spiegelnden Substanzen zu tun haben, durch die Geometrie bestätigt werden.

Wir wollen unsere Formel (10) in der für das Folgende zweckmäßigen Form schreiben, indem wir $\vartheta' = \pi/2$ setzen:

$$(11) \quad K(\vartheta, v) = K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}.$$

Berechnen wir nun die spezifische „wahre relative Strahlung“ i_0 . Nach Hasenöhrle ist die absolute Strahlung, d. h. unser

$$K(\vartheta, v) d\Omega = i_0 \left(\frac{c}{c'}\right)^4 d\Omega',$$

wo

$$c' = c \sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 - 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta^2}.$$

Hieraus folgt in Hinblick auf (11):

$$i_0 = K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\left(1 - 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^4}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}.$$

§ 4. Die Änderung der spezifischen Strahlungsintensität bei einer adiabatischen, isochorischen²⁾, reversiblen Beschleunigung des Hohlraumes.

Um die Geschwindigkeit des Hohlraumes auf adiabatischem Wege ändern zu können, entfernen wir alle absorbierenden Substanzen; damit der Prozeß reversibel sei, soll er unendlich langsam verlaufen. Durch unregelmäßig im Hohlraum verteilte Spiegel sorgen wir dafür, daß sich die Strahlung in den

1) F. Hasenöhrle, Ann. d. Phys. 16. p. 589. Gl. (1). 1905.

2) F. Hasenöhrle, Ann. d. Phys. 15. p. 347. Gl. (1). 1904.

3) Das heißt bei konstant gehaltenem Volumen.

verschiedenen Richtungen ausgleichen kann. Daß dann auch die spektrale Energieverteilung bei dem Prozesse den Charakter der schwarzen Strahlung bewahrt hat, wird nachher eine einfache Überlegung zeigen.

Wir bringen die Geschwindigkeit des Hohlraumes plötzlich von v auf $v + \Delta v$ und warten, bis der stationäre Zustand eingetreten ist. War die spezifische Strahlungsintensität vorher:

$$(11) \quad K(\vartheta, v) = K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4},$$

so ist sie dann:

$$(11^*) \quad K(\vartheta, v + \Delta v) = K\left(\frac{\pi}{2}, v + \Delta v\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta\right)^4}.$$

Wir betrachten nun ein Strahlelement, d. h. ein begrenztes, unendlich kleines Stück eines Strahlenbündels. Das Volumen des Strahlelementes sei dV , der Öffnungswinkel des Strahlenbündels:

$$d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Wir haben es also mit denjenigen Strahlen zu tun, deren Polarwinkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ und deren Azimut zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegt, und die sich in dem Volumenelement dV befinden. Ihre spezifische Intensität ist (vor der Geschwindigkeitszunahme Δv) $K(\vartheta, v)$. Die Energie des Strahlelementes ist:

$$(12) \quad dE = \frac{1}{c} K(\vartheta, v) d\Omega dV.$$

Wir verfolgen nun das Strahlelement von dem Augenblick der Geschwindigkeitsänderung an bis zu dem Augenblick, wo der stationäre Zustand eingetreten ist. Während dieser Zeit erleidet das Strahlelement sehr viele Reflexionen. Bei jeder einzelnen Reflexion ändert sich die Richtung ϑ, φ , der Öffnungswinkel $d\Omega$, die spezifische Intensität K , das Volumen dV , die Energie dE . Die Änderung von $d\Omega$ und von K wird durch Gleichung (3) und (6) bestimmt. Einer besonderen Untersuchung bedarf es nur noch, um die Änderung von dV bei der Reflexion festzustellen.

Der Einfachheit halber geben wir dem Volumen eine

spezielle Gestalt, was man unbeschadet der Allgemeinheit tun kann, da man sonst das Volumen in lauter Teile von dieser speziellen Gestalt einteilen kann, nämlich die eines schiefen Zylinders, dessen Erzeugende mit der Strahlenrichtung zusammenfällt, und dessen Endflächen zur Spiegelebene parallel sind.

Wenn die Reflexion gerade beginnt, möge das Strahlelement die Lage $ABCD$ haben; CD liegt dann in der Spiegelebene. Bis zum Ende der Reflexion möge die Zeit t vergehen.

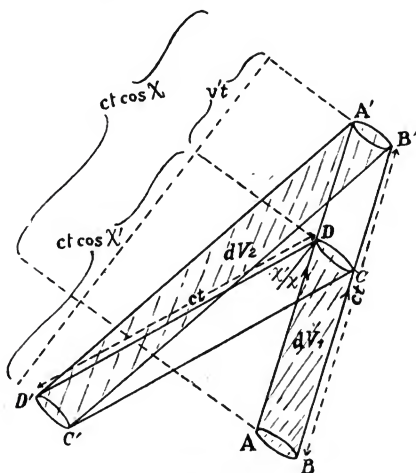


Fig. 2.

Der Spiegel hat sich dann um die Strecke $v't$ in Richtung seiner Normalen verschoben. Die eine Endfläche des Strahlelementes ist von AB nach $A'B'$ gelangt mit Lichtgeschwindigkeit, so daß $AA' = BB' = ct$. Die andere Endfläche hat sich unterdessen unter dem Reflexionswinkel χ' von CD nach $C'D'$ bewegt, so daß $CC' = DD' = ct$. Die Lage des Strahlelementes nach der Reflexion ist durch $A'B'C'D'$ gegeben. Die Volumina der beiden schiefen Zylinder dV_2 und dV_1 verhalten sich wie

ihre Höhen, deren Betrag aus der Figur abzulesen ist. Man erhält:

$$\frac{dV_2}{dV_1} = \frac{ct \cos \chi' + v't}{ct \cos \chi - v't}$$

oder

$$\frac{dV_2}{dV_1} = \frac{\cos \chi' + \frac{v'}{c}}{\cos \chi - \frac{v'}{c}}.$$

Nach (2) erhält man:

$$(13) \quad \frac{dV_2}{dV_1} = \frac{\sin \chi'}{\sin \chi}.$$

Für das Verhältnis der Energie des Strahlelementes nach der Reflexion dE_2 zu der vor der Reflexion dE_1 erhält man nach (12), (4) und (13):

$$(14) \quad \frac{dE_2}{dE_1} = \frac{\sin \chi}{\sin \chi'}.$$

Wie wir sehen, ändern sich alle für das Strahlelement charakteristischen Größen bei einer Reflexion im Verhältnis $\sin \chi' / \sin \chi$ oder einer (positiven oder negativen) Potenz hiervon. Nun ist nach (9):

$$(15) \quad \frac{\sin \chi}{\sin \chi'} = \frac{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta_1}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta_2},$$

wo ϑ_1 den Polarwinkel der Strahlungsrichtung vor, ϑ_2 nach der Reflexion bedeutet. Wir mußten hier beachten, daß die Geschwindigkeit des Systems nicht mehr v , sondern $v + \Delta v$ ist.

Wenn nun viele Reflexionen stattfinden, so sieht man leicht, daß die Änderungen der charakteristischen Größen nur von dem Polarwinkel ϑ vor den Reflexionen und dem Polarwinkel ϑ' nach den Reflexionen abhängen. So erhält man z. B. für das Verhältnis der Energie des Strahlelementes nach den vielen Reflexionen dE' zu der vor den Reflexionen dE entsprechend (14) und (15):

$$(16) \quad \frac{dE'}{dE} = \frac{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta'}.$$

Da es dagegen auf den Weg, den das Strahlelement inzwischen zurückgelegt hat, gar nicht ankommt, so können wir

den in Wirklichkeit zurückgelegten, komplizierten Weg durch einen fingierten, einfachen ersetzen.

Wir haben nur dafür zu sorgen, daß die Verteilung der Strahlelemente am Schlusse eine derartige ist, wie sie der stationären Strahlung bei der Geschwindigkeit $v + \Delta v$ entspricht, d. h. wie sie durch (11*) vorgeschrieben wird.

Wir gehen in folgender Weise vor: Wir lassen jedes einzelne Strahlelement durch einen passend aufgestellten (mitbewegten) Spiegel in eine Richtung reflektieren, die senkrecht zur Bewegungsrichtung des Systems steht. Wir wollen die Energie E berechnen, die das System nach diesem Prozeß besitzt. Die Energie eines Strahlelementes vor der Reflexion beträgt nach (12):

$$\frac{1}{c} K(\vartheta, v) d\Omega dV,$$

nach der Reflexion in die zur Bewegung senkrechte Richtung nach (16):

$$\frac{1}{c} K(\vartheta, v) d\Omega dV \left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta\right).$$

Wir finden E durch Integration dieses Ausdruckes über $d\Omega$ und dV :

$$(17) \quad E = \int \int \frac{1}{c} K(\vartheta, v) d\Omega dV \left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta\right).$$

Setzen wir für $d\Omega$ seinen Wert $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ und den Wert von $K(\vartheta, v)$ aus (11) ein, so wird nach Ausführung der Integration nach φ und V :

$$E = \frac{2\pi V}{c} \int_0^\pi K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta\right)}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Führt man auch noch die Integration nach ϑ aus, so wird:

$$(18) \quad E = \frac{4\pi V}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \left\{ \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4}{3} \frac{\frac{v \Delta v}{c^2}}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right\}.$$

Wir lassen nun die Strahlelemente durch passend aufgestellte Spiegel aus der zur Bewegung senkrechten Richtung nach allen möglichen Richtungen reflektieren, und zwar in der

Verteilung auf die einzelnen Richtungen, wie sie der stationären Strahlung und Gleichung (11*) entspricht. Die Energie eines Strahlelementes wird alsdann betragen:

$$\frac{1}{c} K(\vartheta, v + \Delta v) d\Omega dV,$$

vor der Reflexion muß sie zufolge (16) gewesen sein:

$$\frac{1}{c} K(\vartheta, v + \Delta v) d\Omega dV \left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta\right).$$

Durch Integration dieses Ausdruckes über Ω und V finden wir einen zweiten Ausdruck für E :

$$(19) \quad E = \int \int \frac{1}{c} K(\vartheta, v + \Delta v) d\Omega dV \left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta\right).$$

Setzen wir für $d\Omega$ seinen Wert $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ und den Wert von $K(\vartheta, v + \Delta v)$ aus (11*) ein, so wird nach Ausführung der Integration nach φ und V :

$$E = \frac{2\pi V}{c} \int_0^\pi K\left(\frac{\pi}{2}, v + \Delta v\right) \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta\right)^4}.$$

Führt man auch noch die Integration nach ϑ aus, so wird:

$$(20) \quad E = \frac{4\pi V}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, v + \Delta v\right) \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v + \Delta v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Durch Vergleich von (18) und (20) erhält man, wenn man gleichzeitig nach Δv entwickelt:

$$\begin{aligned} & K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \left\{ \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{4}{3} \frac{v}{c} \frac{\Delta v}{c} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{5/2}} \right\} \\ &= K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \left\{ \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}} + 4 \frac{v \Delta v}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{5/2}} \right\} \\ &+ \frac{\partial K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Hieraus berechnet sich:

$$\frac{\partial K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial v} = -\frac{16}{3} \frac{v}{c^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right).$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$(21) \quad K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2} K(0),$$

wo $K(0)$ die Strahlungsintensität des ruhenden Hohlraumes bezeichnet.

Für $K(\vartheta, v)$ erhalten wir dann nach (11):

$$(21^*) \quad K(\vartheta, v) = K(0) \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}.$$

Setzen wir dem Stefan-Boltzmannschen Gesetze¹⁾ gemäß:

$$K(0) = \frac{\alpha c}{4\pi} T_0^4,$$

so geht die Formel über in:

$$(22) \quad K(\vartheta, v) = \frac{\alpha c}{4\pi} T_0^4 \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4},$$

wobei T_0 die Temperatur des ruhenden Hohlraumes bedeutet.

Wir untersuchen jetzt, ob auch die spektrale Energieverteilung den Charakter der schwarzen Strahlung bewahrt hat. Zu dem Zwecke machen wir folgenden Kreisprozeß: Wir bringen den Hohlraum zuerst auf adiabatisch reversiblen Wege aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit v . Hierbei wird eine Arbeit geleistet, die gleich dem Unterschied der Strahlungsenergie nachher und vorher ist. Dann bringen wir den Hohlraum mit einem schwarzen Körper von solcher Temperatur in Verbindung, daß seine Strahlungsintensität durch

$$K(\vartheta, v) = \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} K(0)$$

bestimmt wird, dessen emittierte Strahlen aber möglicherweise eine andere spektrale Energieverteilung aufweisen als die Strahlen des Hohlraumes. Ist dieses der Fall, so wird eine Entropievermehrung stattfinden. Eine Arbeitsleistung oder

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung p. 62 (76).

-gewinnung oder eine Wärmeaufnahme oder -abgabe durch den schwarzen Körper findet hierbei nicht statt. Nach Entfernung des schwarzen Körpers bringen wir den Hohlraum wieder auf adiabatisch reversiblen Wege zur Ruhe. Hierbei wird dieselbe Arbeit, die vorher geleistet worden war, zurückgewonnen. Schließlich wird der Hohlraum wieder mit einem schwarzen Körper in Verbindung gebracht, dessen Strahlungsintensität durch $K(0)$ gegeben ist. Hierbei kann eventuell wieder eine Entropievermehrung stattfinden; Arbeit wird keine dabei geleistet, Wärme keine abgegeben. Der Prozeß ist jetzt vollständig rückgängig gemacht; es kann also während des Prozesses keine Entropievermehrung stattgefunden haben. Dieser Bedingung wird nur genügt, wenn auch die spektrale Energieverteilung der Hohlraumstrahlung bei der adiabatisch reversiblen Beschleunigung den Charakter der schwarzen Strahlung bewahrt.

§ 5. Eine zweite Herleitung des in § 4 gewonnenen Resultates.

Man kann zu der Gleichung (21) für die Änderung der spezifischen Strahlungsintensität bei adiabatischer, reversibler Beschleunigung auf einem anderen Wege gelangen, der weniger Anforderungen an das Anschauungsvermögen stellt.

Wir setzen das Volumen des Hohlraumes der Einfachheit halber gleich Eins.

Nach Hrn. Abraham¹⁾ ist die Kraft $\mathfrak{F}$, die an einem elektromagnetischen Systeme von außen angreift, gleich der zeitlichen Zunahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße $\mathfrak{G}$,

$$(23) \quad \mathfrak{F} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt};$$

$\mathfrak{G}$ ist hierbei definiert durch:

$$(24) \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{c^2} \mathfrak{S},$$

wo $\mathfrak{S}$ den Poyntingschen Vektor bezeichnet. Da $\mathfrak{S}$ jedenfalls in die Richtung von v fällt, so brauchen wir nur die in diese Richtung fallende Komponente des Poyntingschen

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. p. 28.

Vektors für die einzelnen Strahlen zu berücksichtigen, die wir mit $d\mathfrak{S}$ bezeichnen wollen. Es ist:

$$d\mathfrak{S} = K(\vartheta, v) d\Omega \cos \vartheta,$$

oder nach (11):

$$d\mathfrak{S} = K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\cos \vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Durch Integration über ϑ, φ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\cos \vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{16}{3} \pi \frac{v}{c} \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Dies in (24) und (23) einsetzend erhalten wir:

$$\begin{aligned} (24^*) \quad \mathfrak{G} &= \frac{16}{3} \pi \frac{v}{c^3} \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \mathfrak{F} &= \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} \frac{d}{dt} \frac{v K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

wofür wir auch schreiben können, da der zu differenzierende Ausdruck bei der adiabatisch reversiblen Beschleunigung nur von v abhängt:

$$\mathfrak{F} = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{v K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \frac{dv}{dt}.$$

Die in der Zeit dt geleistete Arbeit ΔA finden wir durch Multiplikation mit dem Wege $v dt$:

$$(25) \quad \Delta A = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} v \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{v K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \frac{dv}{dt} dt.$$

Diese Arbeit muß gleich sein der Energiezunahme ΔU des Systems in der Zeit dt . Die Gesamtenergie U des Systems beträgt:

$$(25^*) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} \\ &= \frac{4\pi}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus ergibt sich die Änderung der Energie:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta U &= \frac{\partial U}{\partial v} \frac{dv}{dt} dt \\ &= \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\} \frac{dv}{dt} dt. \end{aligned} \right.$$

Durch Vergleich von (25) und (26) findet man:

$$\frac{4}{3} \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{v K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\};$$

hieraus folgt nach einigen Umformungen:

$$\frac{K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\partial \left\{ \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\}}{\partial \left\{ \log \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} \right\}}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert die uns schon bekannte Gleichung (21):

$$K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2} K(0).$$

§ 6. Die Abhängigkeit der spektralen Energieverteilung von der Strahlungsrichtung.

Wir definieren die spezifische Intensität der monochromatischen Strahlung $\mathfrak{R}(v, \vartheta, v)$ damit, daß $\mathfrak{R}(v, \vartheta, v) dv$ derjenige

Teil von $K(\vartheta, v)$ ist, dessen Schwingungszahlen zwischen v und $v + dv$ liegen.

Wir gehen nun genau so wie in § 3 vor, indem wir einen Strahl von der Intensität $\mathfrak{R}(v, \vartheta, v) dv$ an einem im Hohlraum befindlichen Spiegel reflektieren lassen. Nach (3) und (9) hat dann der reflektierte Strahl die Schwingungszahl:

$$(27) \quad v' = v \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta'}$$

und seine Intensität beträgt nach (10):

$$(28) \quad \mathfrak{R}(v', \vartheta', v) dv' = \mathfrak{R}(v, \vartheta, v) dv \left(\frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta'} \right)^4.$$

Durch Vergleich von (27) und (28) folgt:

$$(29) \quad \frac{\mathfrak{R} \left(v \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta'}, \vartheta', v \right)}{\mathfrak{R}(v, \vartheta, v)} = \left(\frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta'} \right)^4.$$

Setzt man hierin $\vartheta' = \pi/2$, so läßt sich die Formel schreiben:

$$(30) \quad \mathfrak{R}(v, \vartheta, v) = \mathfrak{R} \left(v \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right), \frac{\pi}{2}, v \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right)^4}.$$

§ 7. Die Änderung der spektralen Energieverteilung bei der adiabatischen, isochorischen, reversiblen Beschleunigung des Hohlraumes.

Wir können hier wieder nach der in § 4 zur Bestimmung der Änderung der Gesamtintensität benutzten Methode vorgehen, weil auch die Änderung der Schwingungszahl eines Strahles bei einer oftmaligen Reflexion nur von der Anfangs- und Endrichtung des Strahles, aber nicht von dem inzwischen durchlaufenen Weg abhängt.

Wir bringen also wieder den Hohlraum von der Geschwindigkeit v auf die Geschwindigkeit $v + dv$ und lassen dann jedes einzelne Strahlelement durch einen passend auf-

gestellten (mitbewegten) Spiegel in eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Richtung reflektieren. Anstatt nun wie in § 4 die Gesamtenergie des Systems nach diesem Prozeß zu berechnen, berechnen wir jetzt nur die Energie $\mathfrak{E}$ der Strahlen, deren Schwingungszahlen zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegen.

Soll die Schwingungszahl eines Strahlelementes, dessen ursprüngliche Richtung durch ϑ gekennzeichnet ist, nach der Reflexion in die zur Bewegungsrichtung des Systems senkrechte Richtung ν betragen, so hat sie vorher gemäß (27) betragen:

$$\nu \frac{1}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}.$$

Wir erhalten daher $\mathfrak{E}$, wenn wir in der Formel (17) für E an die Stelle von $K(\vartheta, \nu)$

$$\mathfrak{R} \left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}, \vartheta, \nu \right) d \left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta} \right)$$

setzen:

$$\mathfrak{E} = \int \int \frac{1}{c} \mathfrak{R} \left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}, \vartheta, \nu \right) d\nu d\Omega dV.$$

Setzen wir für $d\Omega$ seinen Wert $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ und den Wert von

$$\mathfrak{R} \left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}, \vartheta, \nu \right)$$

aus (30) ein, so wird nach Ausführung der Integration nach φ und V :

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi V}{c} \int_0^\pi \mathfrak{R} \left(\nu \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}, \frac{\pi}{2}, \nu \right) d\nu \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right)^{-1}.$$

Um auch die Integration nach ϑ ausführen zu können, entwickeln wir nach Δv ; man gelangt dann zur Gleichung:

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi V d\nu}{c} \left\{ \mathfrak{R}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right) \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} + \frac{\partial \mathfrak{R}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial \nu} \frac{\nu}{c} \Delta v \int_0^\pi \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} \right\}.$$

Führt man jetzt die Integrale aus, so erhält man:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{c} V d\nu & \left\{ \mathfrak{R}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \mathfrak{R}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial \nu} \frac{4}{3} \nu \frac{v}{c^2} \Delta v \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wir stellen nun, wie in § 4 für E , so jetzt für $\mathfrak{E}$ einen zweiten Ausdruck auf, indem wir in (19) an die Stelle von $K(\vartheta, v + \Delta v)$

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}, \vartheta, v + \Delta v\right) d\left\{\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}\right\}$$

setzen:

$$\mathfrak{E} = \int \int \frac{1}{c} \mathfrak{R}\left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}, \vartheta, v + \Delta v\right) d\nu d\Omega dV.$$

Setzt man für $d\Omega$ seinen Wert $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ und den Wert von

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta}, \vartheta, v + \Delta v\right)$$

gemäß (30) ein, so wird nach Ausführung der Integration nach φ und V :

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi V}{c} \int_0^\pi \mathfrak{R}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v + \Delta v\right) d\nu \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta\right)^4}.$$

Führt man auch noch die Integration nach ϑ aus, so erhält man:

$$\mathfrak{E} = \frac{4\pi}{c} \mathcal{V} dv \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v + \Delta v \right) \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v + \Delta v}{c} \right)^2 \right)^{3/2}}.$$

Durch Entwicklung nach Δv formt sich der Ausdruck um in:

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{4\pi}{c} \mathcal{V} dv \left\{ \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right) \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{3/2}} \right. \\ & + \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right) 4 \frac{v}{c^2} \frac{\Delta v}{\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{5/2}} \\ & \left. + \frac{\partial \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right)}{\partial v} \frac{\Delta v}{\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{5/2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Aus dem Vergleich von (31) mit (32) folgt dann:

$$\frac{\partial \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right)}{\partial \nu} \cdot \frac{\frac{4}{3} \nu \frac{v}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} = \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right) \frac{4 \frac{v}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} + \frac{\partial \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right)}{\partial v}.$$

Wir bringen diese Gleichung in die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right)}{\partial \nu} \frac{1}{\nu^3} - 3 \frac{\mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right)}{\nu^3} \\ = \frac{3}{4} \frac{c^2}{v} \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \frac{1}{\nu^3} \frac{\partial \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right)}{\partial v}. \end{aligned}$$

Hierfür läßt sich schreiben:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\nu^3} \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right) \right)}{\partial (\log \nu)} = \frac{\partial \left(\frac{1}{\nu^3} \mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right) \right)}{\partial \left(\log \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{-1/2} \right)}.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$\frac{\mathfrak{R} \left(\nu, \frac{\pi}{2}, v \right)}{\nu^3} = F \left(\log \nu + \log \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{-1/2} \right),$$

wo F eine willkürliche Funktion seines Argumentes bedeutet.

Dies läßt sich anders schreiben:

$$(33) \quad \mathfrak{R}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}\right),$$

wo jetzt F eine andere willkürliche Funktion ist.

Aus (30) folgt dann:

$$(34) \quad \mathfrak{R}(\nu, \vartheta, v) = \nu^3 F\left(\nu \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}\right).$$

Für $v = 0$ muß dieser Ausdruck in die Plancksche Formel¹⁾:

$$\mathfrak{R}(\nu, 0) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT_0}} - 1}$$

übergehen, in der h und k Konstanten, T_0 die absolute Temperatur bezeichnet. Wir erhalten daher:

$$(35) \quad \mathfrak{R}(\nu, \vartheta, v) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT_0} \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}} - 1}.$$

Wir haben hier sowie in Formel (22) an T den Index 0 geschrieben, um anzudeuten, daß es die Temperatur ist, die die Strahlung hatte, als das System in Ruhe war. Nach der adiabatischen, reversiblen Beschleunigung wird die Temperatur eine andere sein, deren Bestimmung unsere nächste Aufgabe bilden soll.

§ 8. Die Änderung der Temperatur bei der adiabatischen, isochorischen, reversiblen Beschleunigung.

Nach der Definition der Temperatur verhalten sich die absoluten Temperaturen zweier Körper wie die Wärmemengen, welche von den Körpern verloren oder gewonnen werden, wenn in einem umkehrbaren Carnotschen Kreisprozeß der eine die Rolle der Wärmequelle, der andere die Rolle des Kühlers spielt.

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung p. 157 (232).

An dieser Definition der Temperatur halten wir fest auch in dem Falle, daß es sich um bewegte Körper handelt.

Als Wärmequelle wählen wir einen ruhenden schwarzen Körper von großer Wärmekapazität von der Temperatur T_0 , dessen Emissionsvermögen $K(0)$ ist; als Kühler einen mit der Geschwindigkeit v bewegten schwarzen Körper von der zu bestimmenden Temperatur T_v , dessen Emissionsvermögen nach (21*) gleich:

$$K(v) = \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}$$

ist.

Wir führen nun folgenden umkehrbaren Carnotschen Kreisprozeß aus: Wir bringen den Hohlraum mit dem ruhenden schwarzen Körper in Verbindung und expandieren ihn isotherm und reversibel von dem Volumen V_1 auf das Volumen V_2 . Die vom schwarzen Körper hierbei abgegebene Wärmemenge möge Q_0 heißen. Hierauf trennen wir den Hohlraum von dem schwarzen Körper ab und bringen ihn auf adiabatischem, reversiblen Wege auf die Geschwindigkeit v . Dann wird seine Strahlung dieselbe wie die des bewegten schwarzen Körpers sein, also auch seine Temperatur die nämliche. Wir bringen ihn mit diesem in Verbindung und komprimieren ihn isotherm und reversibel von dem Volumen V_2 auf das Volumen V_1 . Die vom bewegten schwarzen Körper hierbei aufgenommene Wärmemenge möge Q_v heißen. Schließlich trennen wir den Hohlraum wieder ab und bringen ihn auf adiabatischem, reversiblen Wege zur Ruhe. Hiermit ist er in seinen Anfangszustand zurückgekehrt.

Es verhält sich dann:

$$(36) \quad \frac{T_v}{T_0} = \frac{Q_v}{Q_0}.$$

Q_0 und Q_v setzen sich je aus der von der Strahlung bezogenen geleisteten Arbeit und der Strahlungsenergie in dem Volumen $V_2 - V_1$ zusammen.

Da der Lichtdruck auf eine Fläche sowohl in dem ruhenden als auch in dem bewegten Hohlraum von der Orientierung der Fläche unabhängig ist, so wählen wir uns eine

Fläche zur Betrachtung, die auf der Bewegungsrichtung senkrecht steht.

Der Druck eines einzelnen Strahles im ruhenden Hohlraum beträgt¹⁾:

$$dp_0 = \frac{2K(0)}{c} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Durch Integration über alle einfallenden Strahlen, d. h. über φ von 0 bis 2π und über ϑ von 0 bis $\pi/2$ erhält man den Gesamtdruck:

$$p_0 = \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2}{c} K(0) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$(37) \quad p_0 = \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0).$$

Durch Multiplikation mit $V_2 - V_1$ erhalten wir die bei der Dilatation des Hohlraumes gewonnene Arbeit:

$$(38) \quad \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0) (V_2 - V_1).$$

Die Energiedichte U_0 erhält man durch Integration über die durch c dividierten Strahlungsintensitäten:

$$U_0 = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{c} K(0) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

$$(39) \quad U_0 = \frac{4\pi}{c} K(0).$$

Die in dem Volumen $V_2 - V_1$ enthaltene Energie ist daher:

$$(40) \quad \frac{4\pi}{c} K(0) (V_2 - V_1).$$

Q_0 erhält man nun durch Addition von (38) und (40):

$$(41) \quad Q_0 = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c} K(0) (V_2 - V_1).$$

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung p. 56 (65).

Im bewegten Hohlraum beträgt der Druck eines einzelnen Strahles¹⁾:

$$dp_v = \frac{2}{c} K(\vartheta, v) \frac{\left(\cos \vartheta - \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Durch Integration über alle einfallenden Strahlen, d. h. über φ von 0 bis 2π und über ϑ von 0 bis $\arccos v/c$, erhält man den Gesamtdruck:

$$p_v = \int_{\varphi=0}^{\arccos \frac{v}{c}} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{2}{c} K(\vartheta, v) \frac{\left(\cos \vartheta - \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Setzt man für $K(\vartheta, v)$ seinen Wert nach (21*) ein und führt die Integration aus, so wird:

$$(42) \quad p_v = \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Durch Multiplikation mit $V_2 - V_1$ erhalten wir die bei der Kompression des bewegten Hohlraumes geleistete Arbeit:

$$(43) \quad \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2} (V_2 - V_1).$$

Ferner ist die bei der Änderung der elektromagnetischen Bewegungsgröße $\mathfrak{G}$ geleistete Arbeit nach (24*) und (21):

$$(43^*) \quad -v \mathfrak{G} (V_2 - V_1) = -\frac{16\pi}{3c} K(0) \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} (V_2 - V_1).$$

Die Energiedichte in dem bewegten Hohlraum ist:

$$U_v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{c} K(\vartheta, v) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

oder, das Integral ausgeführt:

$$(44) \quad U_v = \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}.$$

1) M. Abraham, Lehrbuch der Elektrizität 2. p. 351.

Die in dem Volumen $V_2 - V_1$ enthaltene Energie ist daher:

$$(45) \quad \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} (V_2 - V_1).$$

Q_v erhält man nun durch Addition von (43), (43*), und (45):

$$(46) \quad Q_v = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2} (V_2 - V_1).$$

Durch Division von (41) in (46) erhalten wir nach (36) das Verhältnis der Temperaturen des bewegten und des ruhenden Hohlraumes:

$$(47) \quad \frac{T_v}{T_0} = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Führen wir nun in die Formeln (22) und (35) statt der Temperatur T_0 die eigene Temperatur des bewegten Hohlraumes T_v ein, so gehen sie über in:

$$(48) \quad K(\vartheta, v) = \frac{ac}{4\pi} \left(T_v \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta} \right)^4,$$

$$(49) \quad \mathfrak{R}(v, \vartheta, v) = \frac{2h}{c^3} \frac{v^3}{\frac{h\nu}{kT_v} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) - 1}.$$

Wir können dies Resultat dahin aussprechen:

Um das Stefan-Boltzmannsche und das Plancksche Gesetz auch für bewegte Körper anwenden zu können, hat man die absolute Temperatur mit dem Faktor

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}$$

zu multiplizieren.

§ 9. Die Ausdrücke für die Energiedichte, die Beschleunigungsarbeit, die scheinbare Masse bei der adiabatischen und bei der isothermen Beschleunigung des Hohlraumes und die Wärmeabsorption bei der letzteren.

Die Energiedichte bei der adiabatischen Beschleunigung haben wir schon in (44) berechnet:

$$U_{ad} = \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}.$$

Hieraus ergibt sich die Beschleunigungsarbeit, indem man die Energiedichte des ruhenden Hohlraumes (39) abzieht:

$$A_{\text{ad}} = \frac{4\pi}{c} K(0) \left\{ \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{1/2}} - 1 \right\}.$$

Durch Differentiation nach $v^2/2$ erhält man die scheinbare Masse:

$$m_{\text{ad}} = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} K(0) \frac{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{3/2}}.$$

Die Energiedichte bei der isothermen Beschleunigung ist:

$$\begin{aligned} U_{\text{is}} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{c} K(0) \left(\frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta} \right)^4 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^3}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Arbeit bei der isothermen Beschleunigung wenden wir den Abrahamschen Satz an, daß die an dem Hohlraume angreifende Kraft gleich der zeitlichen Änderung der elektromagnetischen Bewegungsgröße ist. In Formel (25) steht der Ausdruck für das Differential der Arbeit. Für $K(\pi/2, v)$ haben wir hier nach Gleichung (48), da hier T_v konstant = T_0 ist,

$$\frac{ac}{4\pi} T_0^2 = K(0)$$

einzusetzen. Man erhält dann:

$$\Delta A = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} v \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{v K(0)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^3} \right\} \Delta v$$

oder nach Ausführung der Differentiation:

$$\Delta A = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} \frac{v \left(1 + 5 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^4} \Delta v K(0).$$

Dividiert man durch $v \Delta v = \Delta(v^2/2)$, so erhält man auf der linken Seite die scheinbare Masse:

$$m_{\text{is}} = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} K(0) \frac{1 + 5 \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}.$$

Durch Multiplikation mit $d(v^2/2)$ und Integration von $v=0$ bis $v=v$ erhält man die Arbeit bei der isothermen Beschleunigung:

$$A_{\text{is}} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{2 + 3 \left(\frac{v}{c}\right)^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}.$$

Die Wärmeabsorption schließlich bei der isothermen Beschleunigung bestimmt sich als Differenz der Änderung der Energiedichte und der geleisteten Arbeit:

$$Q = (U_{\text{is}} - U_0) - A_{\text{is}} = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}.$$

§ 10. Die Erscheinungen der Wärmestrahlung vom Standpunkte eines bewegten Beobachters. Begriff der relativen Temperatur.

Hr. Einstein hat gezeigt¹⁾, daß die Maxwell'schen Gleichungen ihre Gültigkeit behalten für ein Koordinaten- und Zeitsystem x', y', z', t' , das aus dem ursprünglichen x, y, z, t durch folgende Transformation hervorgeht:

$$(50) \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} (x - v t), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(t - \frac{v x}{c^2}\right). \end{cases}$$

Er hat auch die Beziehungen angegeben, die zwischen der Intensität eines Lichtstrahles, seinem Richtungswinkel, seiner Schwingungszahl, einmal gemessen im ruhenden System,

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

das andere Mal in dem transformierten System, bestehen. Die auf das letztere bezüglichen Größen seien durch einen Akzent bezeichnet.

Es gilt dann:

$$(51) \quad J' = J \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

$$(52) \quad \cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta},$$

$$(53) \quad \nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}.$$

Es ist nun leicht, auch die Beziehung zwischen dem Öffnungswinkel eines Strahlenbündels $d\Omega'$, bezogen auf das bewegte, und $d\Omega$, bezogen auf das ruhende System, zu berechnen. Es ist

$$d\Omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi',$$

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Da nun φ' und φ identisch sind, so folgt mit Rücksicht auf (52):

$$(54) \quad d\Omega' = d\Omega \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}.$$

Dividiert man (51) durch (54), so erhält man die Beziehung zwischen den spezifischen Strahlungsintensitäten K' und K :

$$(55) \quad K' = K \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}.$$

Bei einem monochromatischen Strahl hat man für K' $\Re'(\nu) d\nu'$ und für K $\Re(\nu) d\nu$ einzusetzen:

$$\Re'(\nu) d\nu' = \Re(\nu) d\nu \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}.$$

Mit Rücksicht auf (53) geht dies über in:

$$(56) \quad \mathfrak{R}'(\nu) = \mathfrak{R}'\left(\nu \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}\right) = \mathfrak{R}(\nu) \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Wir wollen die Formeln (55) und (56) einmal auf die (schwarze) Strahlung eines ruhenden Körpers, dann auf die eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Körpers anwenden. Wir werden dabei zu dem auf den ersten Blick überraschenden Resultat geführt werden, daß die Temperatur in bezug auf das bewegte System eine andere ist als in bezug auf das ruhende System.

Wir bezeichnen die Temperatur des ruhenden Körpers in bezug auf das ruhende System mit T_0 , in bezug auf das bewegte System mit T_0' .

Die Strahlungsintensitäten K und $\mathfrak{R}(\nu)$ in bezug auf das ruhende System ergeben sich dann nach dem Stefan-Boltzmannschen und Planckschen Gesetze für ruhende Körper:

$$(57) \quad \begin{cases} K = \frac{a c}{4 \pi} T_0^4, \\ \mathfrak{R}(\nu) = \frac{2 h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h \nu}{k T_0}} - 1} \end{cases}$$

In bezug auf das bewegte System hat der ruhende Körper die Geschwindigkeit $-v$. K' und $\mathfrak{R}'(\nu')$ finden wir daher, wenn wir in (48) und (49) v durch $-v$, ϑ durch ϑ' , T_v durch T_0' ersetzen:

$$K' = \frac{a c}{4 \pi} T_0'^4 \left(\frac{1}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta'} \right)^4,$$

$$\mathfrak{R}'(\nu') = \frac{2 h}{c^2} \frac{\nu'^3}{e^{\frac{h \nu'}{k T_0'} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta'\right)} - 1}.$$

Drückt man gemäß (52) und (53) $\cos \vartheta'$ und ν' durch $\cos \vartheta$ und ν aus, so wird:

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} K' &= \frac{ac}{4\pi} T_0' \left(\frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathfrak{R}'(v) &= \frac{2h}{c^2} \frac{v^3}{e^{\frac{h\nu}{kT_0'}} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2} - 1} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man die Werte (57) und (58) in (55) und (56) ein, so erhält man aus jeder der beiden Formeln:

$$(59) \quad T_0' = T_0 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Betrachten wir jetzt den mit der Geschwindigkeit v bewegten Körper. Seine Temperatur in bezug auf das ruhende System bezeichnen wir mit T_v , in bezug auf das bewegte System mit T_v' .

K und $\mathfrak{R}(v)$ werden dann durch die Formeln (48) und (49) dargestellt.

K' und $\mathfrak{R}'(v')$ ergeben sich, da der Körper in bezug auf das bewegte System ruht, nach den Strahlungsgesetzen für ruhende Körper:

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} K' &= \frac{ac}{4\pi} T_v', \\ \mathfrak{R}'(v') &= \frac{2h}{c^2} \frac{v'^3}{e^{\frac{h\nu'}{kT_v'}} - 1}, \end{aligned} \right.$$

oder nach (53):

$$(61) \quad \mathfrak{R}'(v') = \frac{2h}{c^2} \frac{v^3}{e^{\frac{h\nu}{kT_v'} \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}} - 1} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man die Werte (48), (49), (60), (61) in (55) und (56) ein, so ergibt sich aus jeder der beiden Formeln:

$$(62) \quad T_v' = T_v \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}.$$

Ein Vergleich mit (59) lehrt, daß zwei Körper, die der ruhende Beobachter als gleich heiß bezeichnet, einem bewegten Beobachter verschieden heiß erscheinen können, nämlich dann, wenn die Körper verschiedene Geschwindigkeit haben. Am

höchsten wird die Temperatur eines Körpers immer dem Beobachter erscheinen, der relativ zu ihm ruht.

Lediglich um uns die Bedeutung der hier eingeführten relativen Temperatur recht klar zu machen, wollen wir den in § 8 beschriebenen Kreisprozeß, durch den wir die Temperatur eines bewegten Hohlraumes aus seiner Strahlungsintensität bestimmten, vom Standpunkte des bewegten Beobachters aus betrachten.

Wir berechnen die von den beiden schwarzen Körpern emittierte bez. absorbierte Wärmemenge Q_0' und Q_v' , bezogen auf das bewegte System.

Betrug der Lichtdruck eines Strahles im ruhenden Hohlraum, auf das ruhende System bezogen:

$$dp_0 = \frac{2}{c} K(0) d\Omega \cos^2 \vartheta,$$

so beträgt er, auf das bewegte System bezogen:

$$(63) \quad dp_0' = \frac{2}{c} K'(0) d\Omega' \frac{\left(\cos \vartheta' + \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

oder nach (52) und (54):

$$dp_0' = \frac{2}{c} K(0) d\Omega \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2} \cos^2 \vartheta,$$

und daher der Gesamtdruck:

$$p_0' = \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2}{c} K(0) d\Omega \cos^2 \vartheta = \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0).$$

Die auf das bewegte System bezogene Energiedichte U_0' beträgt:

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} U_0' &= \int \frac{1}{c} K'(0) d\Omega' = \int \frac{1}{c} K(0) d\Omega \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \\ &= \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \end{aligned} \right.$$

War $V_2 - V_1$ das Kompressionsvolumen, bezogen auf das ruhende System, so ist es, auf das bewegte System bezogen:

$$(V_2 - V_1)' = (V_2 - V_1) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Wir erhalten nun durch eine ähnliche Rechnung wie die, welche zur Gleichung (46) führte:

$$(65) \quad Q_0' = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung von Q_v' über. Wir erhalten den Lichtdruck p_v' und die Energiedichte U_v' in dem Hohlraum, wenn er auf adiabatischem Wege auf die Geschwindigkeit v gebracht ist, bezogen auf das bewegte System, wenn wir in (62) und (63) an die Stelle von $K(0)$

$$K(\vartheta, v) = K(0) \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2},$$

und in (62) außerdem an die Stelle von

$$\frac{\left(\cos \vartheta' + \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$\cos^2 \vartheta'$ setzen. Es wird dann:

$$dp_v' = \frac{2}{c} K(0) \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2} d\Omega \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cos^2 \vartheta'$$

oder nach (52):

$$dp_v' = \frac{2}{c} K(0) \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2} d\Omega \left(\cos \vartheta - \frac{v}{c}\right)^2$$

und:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arccos \frac{v}{c} \quad 2\pi \\ p_v' &= \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{2}{c} K(0) \frac{\left(\cos \vartheta - \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2} d\Omega \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}, \\ p_v' &= \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2} K(0). \end{aligned}$$

Für U'_v erhalten wir:

$$U'_v = \int \frac{1}{c} K(0) \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} d\Omega \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

$$U'_v = \frac{4\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Das Kompressionsvolumen des bewegten Hohlraumes, bezogen auf das bewegte System, ist:

$$(V_2 - V_1)'_v = (V_2 - V_1) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Wir erhalten nun:

$$(66) \quad \begin{aligned} Q'_v &= p'_v (V_2 - V_1)'_v + U'_v (V_2 - V_1)'_v, \\ Q'_v &= \frac{16}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Durch Division von (65) in (66) finden wir das Verhältnis der Temperaturen des Hohlraumes vor und nach der adiabatischen Beschleunigung, bezogen auf das bewegte System:

$$(67) \quad \frac{T'_v}{T'_0} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}},$$

während das Verhältnis der Temperaturen, auf ein ruhendes System bezogen, nach (47) dargestellt war durch:

$$\frac{T_v}{T_0} = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Wie man sieht, stehen diese Formeln im Einklang mit (59) und (62).

Wir wollen einen mit Strahlung erfüllten, ruhenden Hohlraum vom Volumen V_0 auf adiabatischem, reversiblen Wege auf die Geschwindigkeit v bringen, gleichzeitig aber sein Volumen (ebenfalls auf adiabatische, reversible Weise) so weit komprimieren, daß es nach dem Prozeß, wenn man es auf ein gemäß (50) transformiertes System bezieht, denselben Wert hat, den es vorher, auf das ruhende System bezogen, hatte. Der Hohlraum befindet sich alsdann in bezug auf das bewegte System in ganz genau demselben Zustande wie vorher in bezug

auf das ruhende System. Denn der Zustand hängt nur von zwei Variablen ab. Dafür, daß das Volumen in beiden Fällen dasselbe ist, haben wir gesorgt; aber auch die Entropie ist dieselbe, weil sie sich bei einem adiabatischen, reversiblen Vorgang nicht ändert, und ihr Wert vom Bezugssystem überhaupt unabhängig ist, da er allein durch die Wahrscheinlichkeit des Zustandes bestimmt ist. Sind die Strahlungsintensitäten des ruhenden Hohlraumes, auf das ruhende System bezogen, bekannt, so werden sie nach dem Prozeß, bezogen auf das transformierte System, denselben Wert haben. Wenn wir dann mit Hilfe von (55) und (56) auf das ruhende System zurücktransformieren, werden wir zu einer neuen Ableitung der Strahlungsgesetze für bewegte Körper gelangen¹⁾.

Ob wir bei dem Prozesse die Beschleunigung und die Kompression des Hohlraumes gleichzeitig oder hintereinander ausführen, ist gleichgültig. Wir wollen zuerst die Kompression von dem Volumen V_0 auf das Volumen V_1 ausführen, wo V_1 so zu wählen ist, daß es durch eine Transformation mit Hilfe von (50) wieder in V_0 übergeht.

$$(68) \quad V_1 = V_0 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Bei der adiabatischen, reversiblen Kompression steigt die Temperatur von T_0 auf T_1 gemäß der Gleichung²⁾:

$$T_1^3 V_1 = T_0^3 V_0.$$

Mit Rücksicht auf (68) folgt hieraus:

$$(69) \quad T_1 = T_0 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/6}.$$

Die spezifischen Strahlungsintensitäten K und $\mathfrak{R}(\nu)$ betragen zu Anfang, den Strahlungsgesetzen für ruhende Körper zufolge:

$$(70) \quad \begin{cases} K = \frac{a c}{4 \pi} T_0^4, \\ \mathfrak{R}(\nu) = \frac{2 h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h \nu}{k T_0}} - 1}. \end{cases}$$

1) Auf diesen Weg hat mich Hr. Prof. Dr. M. Planck aufmerksam gemacht.

2) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung p. 66.

Nach dem (Gesamt-)Prozesse haben sie, auf das bewegte System bezogen, denselben Wert. Wir finden ihre Werte $K(\vartheta, v)$ und $\mathfrak{R}(v, \vartheta, v)$, bezogen auf das ruhende System, wenn wir in (55) und (56) für K' und $\mathfrak{R}'(v')$ die Werte aus (70) einsetzen:

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(\vartheta, v) = \frac{ac}{4\pi} T_0^4 \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} \\ \mathfrak{R}(v, \vartheta, v) = \frac{2h}{c^2} \frac{\frac{h\nu}{kT_0} - 1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} \end{array} \right.$$

Ersetzt man in der zweiten Gleichung noch ν' durch ν gemäß (53), so erhält man:

$$(72) \quad \mathfrak{R}(v, \vartheta, v) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{\frac{\frac{h\nu}{kT_0} - 1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \cdot \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}}$$

Die Formeln (71) und (72) beziehen sich auf die adiabatische, reversible Beschleunigung des Hohlraumes, wenn gleichzeitig eine adiabatische, reversible Kompression entsprechend (68) stattfindet.

Wenn wir in den Formeln T_0 durch T_1 aus (69) ersetzen, so erhalten wir die Formeln für die adiabatische, reversible Beschleunigung bei konstantem Volumen:

$$K(\vartheta, v) = \frac{ac}{4\pi} T_1^4 \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}$$

$$\mathfrak{R}(v, \vartheta, v) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{\frac{\frac{h\nu}{kT_1} - 1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \cdot \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}}$$

Hierdurch haben wir für Formel (22) eine dritte und für (35) eine zweite Ableitung gefunden.

Schluß.

Man braucht also, wie wir gesehen haben, keinerlei neue Hypothese in bezug auf die Längenänderungen bewegter Körper einzuführen, um die Gesetze der stationären Strahlung in einem bewegten Hohlraum sowohl mit der Elektrodynamik als auch mit der Thermodynamik in Übereinstimmung zu bringen (wie das Hr. Hasenöhr! für notwendig hält). Ob das Prinzip der Relativität (auch für materielle Körper) richtig ist, bleibt eine noch offene Frage, welche die Resultate dieser Arbeit nicht berührt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit bin ich meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Dr. M. Planck zu sehr großem Danke verpflichtet.

(Eingegangen 12. Februar 1907.)

4. *Über den Energieverlust im Dielektrikum in wechselnden elektrischen Feldern; von Bruno Monasch.*

(Auszug aus der Danziger Dissertation.)

Der Energieverlust, der in festen und flüssigen Dielektrizis stattfindet, wenn sie sich in einem periodisch sich ändernden elektrischen Felde befinden, bietet heute in gleicher Weise physikalisches und technisches Interesse. Über die Ursache des Verlustes stehen einander im wesentlichen zwei Ansichten gegenüber. Die eine will den Verlust oder wenigstens einen Teil desselben molekularen Reibungsvorgängen und einem dadurch verursachten Zurückbleiben der elektrischen Induktion hinter der Intensität des vorhandenen elektrischen Feldes zuschreiben, erblickt also in ihm ein vollständiges Analogon zu dem in ferromagnetischen Körpern beobachteten Verlust durch magnetische Hysterese. Die andere sucht ihn durch das Vorhandensein irgendwelcher Leitungserscheinungen, etwa elektrolytischer Art oder als eine besondere Form eines in einem Widerstande stattfindenden Verlustes zu erklären, wie dies z. B. mit Hilfe der mehrfach dazu herangezogenen Maxwell'schen Anschauung vom geschichteten Dielektrikum ausführbar ist.¹⁾ Die experimentellen Untersuchungen, die sich mit der Hysteresefrage befaßten, waren durch die mit der Rückstandsbildung zusammenhängenden viskosen Vorgänge, die sich bei den weitaus meisten Dielektrizis zeigen, sehr erschwert und ergaben, soweit sie sich den Nachweis einer rein statischen Hysterese in dem Sinne eines von der Änderungsgeschwindigkeit des Feldes unabhängigen Vorganges zum Ziele gesetzt hatten, meist ein negatives Resultat.²⁾ Ein Experimentator

1) A. Heß, Journ. de phys. (3) 1. p. 459. 1892; J. Hanauer, Wied. Ann. 65. p. 789. 1898; H. A. Rowland u. T. D. Penniman, Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 17. p. 52. 1898.

2) A. W. Porter u. D. K. Morris, Proc. of Roy. Soc. 57. p. 469. 1895; F. Beaulard, Journ. de phys. (3) 9. p. 422. 1900.

jedoch, v. Hoor¹⁾, berichtet von Versuchen an einem besonders präparierten Papier, bei denen es ihm gelungen ist, eine regelrechte statische Hysteresis, also einen pro Zyklus konstanten Verlust, auch bei ganz langsam durchgeführtem elektrischen Kreisprozeß zu erkennen.

Man kann sich aber auch, wie dies bei dem größeren Teil der bisherigen experimentellen Untersuchungen der Fall war, ohne zunächst eine bestimmte Anschauung über die Natur des Verlustes zur Richtschnur zu nehmen, die Aufgabe stellen, die Gesetze zu ermitteln, die der Verlust in wechselnden oder rotierenden elektrischen Feldern überhaupt befolgt. Die Resultate dieser Untersuchungen sind, besonders was den Einfluß der Feldintensität auf den Verlust betrifft, außerordentlich ungleich und einander widersprechend. In bezug auf die Art der Abhängigkeit des Verlustes von der Spannung oder Feldintensität kommen mehrere Forscher zu dem Ergebnis, daß der Verlust bei geringeren Feldintensitäten annähernd proportional dem Quadrate der Feldintensität zunehme, wie dies als Erster schon Borgmann²⁾ 1886 vermutet hatte, in stärkeren Feldern jedoch schneller als mit dem Quadrate der Feldintensität wachse. Doch finden sich auch ebenso viele hiervon gänzlich abweichende Angaben über den Exponenten der Feldintensität in der den Verlust durch die Feldintensität ausdrückenden Gleichung. Als Grenzwerte dieses Exponenten erscheinen die Zahlen 1,5³⁾ und 3⁴⁾, doch sind auch die verschiedensten Abstufungen zwischen diesen Grenzen vertreten. Da ferner gerade in neuester Zeit mehrfach die Ansicht ausgesprochen worden ist, der Verlust lasse sich überhaupt nicht als proportional einer Potenz der Feldintensität mit konstantem Exponenten ausdrücken⁵⁾, kann man wohl nicht behaupten,

1) M. v. Hoor, *Elektrotechn. Zeitschr.* 22. pp. 170, 187, 213, 716, 749 u. 781. 1901.

2) J. Borgmann, *Journal d. russ. physik.-chem. Gesellsch.* (1) 18. p. 1. 1886.

3) R. Threlfall, *Phys. Review* 4. p. 457; 5. p. 21 u. 65. 1897; R. Arno, *Rend. della R. Acc. dei Lincei* (5) 1. 2. Sem. p. 284. 1892; 2. 1. Sem. p. 341; 2. Sem. p. 260. 1893; 3. 1. Sem. p. 272, 585; 2. Sem. p. 294. 1894.

4) P. Holitscher, *Elektrotechn. Zeitschr.* 24. p. 635. 1903.

5) J. Moscicki, *Elektrotechn. Zeitschr.* 25. p. 549. 1904.

daß wir heute bereits imstande seien, uns ein abschließendes Urteil über die Art des Zusammenhanges zwischen dem Energieverlust im Dielektrikum und der Intensität des elektrischen Feldes zu bilden. Bemerkt sei nur noch, daß alle jene Anschauungen, welche den Verlust, als durch irgend eine Form von Leitung verursacht, erklären wollen, seine genaue Proportionalität mit dem Quadrate der Spannung bez. Feldintensität zur notwendigen Voraussetzung haben.

Auch für die Technik, insbesondere für zwei ihrer Gebiete, die drahtlose Telegraphie und die Kabeltechnik, besitzt die Kenntnis des Energieverlustes im Dielektrikum von Kondensatoren und Kabeln und seiner Gesetze Wichtigkeit. Es erscheint demnach nicht ohne Interesse, zu untersuchen, ob gerade das Quadratgesetz für die Abhängigkeit des dielektrischen Verlustes von der Spannung oder von der elektrischen Feldintensität als genau gültig angesehen werden kann oder nicht, und im letzteren Falle die Größe der Abweichungen von diesem Gesetze festzustellen, wenn sich eine Methode finden läßt, die hierzu besser als die bisher benutzten geeignet ist. Eine solche Methode, die außerdem noch einige andere Vorzüge aufweist und auf die mich Hr. Prof. Dr. M. Wien aufmerksam machte, ist nebst ihrer Anwendung im folgenden beschrieben.

A. Die Methode.

I. Die Methode und ihre prinzipiellen Eigenschaften.

Die Methode besteht in der Nulleinstellung in der in Fig. 1 dargestellten Brückenordnung¹⁾, die bisher zur Kapazitätsmessung, sowie auch zum Studium der Änderung der Dielektrizitätskonstante mit der Schwingungszahl²⁾ benutzt worden ist. In unserem Falle haben die vier Brückenseiten folgende Bedeutung: Die Seite AD enthält den Kondensator, dessen Verlust bestimmt werden soll. Wir können ihn hier in der Brücke, ohne zunächst über die Natur des Verlustes irgendwelche Voraussetzung zu machen, immer durch einen verlustlosen Kondensator mit der Kapazität c_1 ersetzt denken,

1) M. Wien, Wied. Ann. **44**. p. 689. 1891.

2) J. Hanauer, l. c.

dem ein reiner, d. h. kapazitäts- und induktionsloser Widerstand w_1 parallel geschaltet ist. Diese Substitution ist deshalb

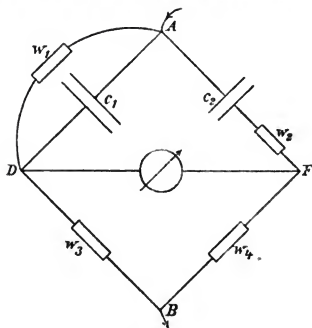


Fig. 1.

unter allen Umständen zulässig, weil es sich ja nur darum handelt, den Phasenunterschied zwischen der Spannung an und dem Strome in der Brückenseite AD darzustellen. In der Seite AF befindet sich ein verlustloser Kondensator von der Kapazität c_2 mit einem davor geschalteten reinen Widerstände w_2 , in den Seiten BD und BF reine Widerstände w_3 und w_4 .

Alle Widerstände seien im folgenden durchgehends in Ohm, alle Kapazitäten, wo nicht ausdrücklich anderes bemerkt ist, in Farad eingeführt. Von den sonst noch vorkommenden Bezeichnungen bedeute:

n die Anzahl ganzer Schwingungen des benutzten Wechselstromes in 2π Sekunden;

E den Effektivwert der Spannung an der Brückenseite AD in Volt;

A die in der Seite AD (dem untersuchten Kondensator) verbrauchte Leistung in Watt;

ψ das Komplement des Phasenverschiebungswinkels zwischen Strom und Spannung am untersuchten Kondensator.

Gegenüber der ebenfalls anwendbaren Parallelschaltung von c_2 und w_4 hat die hier benutzte Anordnung vor allem den praktischen Vorteil, daß man bei ihr mit viel kleineren Werten des Widerstandes w_2 auskommt.¹⁾ Die Stromlosigkeit des Brückenzweiges erfordert hier unter Voraussetzung reinen Sinusstromes die Erfüllung der beiden Bedingungen

$$(1a) \quad n^2 c_1 c_2 w_1 w_2 = 1$$

und

$$(1b) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{w_4}{w_3} - \frac{w_2}{w_1},$$

1) Vgl. auch J. Hanauer, l. c., wo auch der „wirksame Widerstand“ w_1 der dort untersuchten Dielektrika berechnet ist.

und man muß daher, um die Messung auszuführen, entweder c_2 und das Verhältnis w_3/w_4 , oder w_2 und w_3/w_4 , oder c_2 und w_2 so lange verändern, bis DF stromlos ist.

Aus den beiden Gleichungen (1a) und (1b) sollen nun einige Schlüsse gezogen werden:

1. *Quadratgesetz*. — Eliminiert man aus ihnen c_1 , so erhält man für w_1 den Ausdruck

$$w_1 = \frac{1 + n^2 c_2^2 w_2^2}{n^2 c_2^2 w_2} \cdot \frac{w_3}{w_4}.$$

Die in AD verbrauchte Leistung ist dann

$$(2) \quad A = \frac{E^2}{w_1} = \frac{n^2 c_2^2 w_2}{1 + n^2 c_2^2 w_2^2} \cdot \frac{w_4}{w_3} \cdot E^2 \text{ Watt.}$$

Der Faktor von E in Gleichung (2) bleibt bei sich änderndem E nur dann konstant, wenn A , also der Verlust in dem zu untersuchenden Kondensator, dem Quadrate der Spannung E genau proportional ist. *Da aber die Konstanz dieses Faktors nach den Gleichungen (1a) und (1b) das Stromlosbleiben des Brückenzweiges bedingt, besitzt man also in dieser Methode ein sehr geeignetes und sicheres Mittel, um gerade die Gültigkeit des Quadratgesetzes für die Abhängigkeit des Verlustes A von der Spannung E zu prüfen. Nur bei genauer Gültigkeit des Gesetzes zeigt das Brückeninstrument, nachdem die Brücke einmal ins Gleichgewicht gebracht worden ist, auch dann keinen Strom an, wenn man die Spannung ändert.*

Die Gleichung (2) ist nicht genügend durchsichtig, um auf den ersten Blick erkennen zu lassen, wie groß die Änderungen der Brückeneinstellung bei einer angenommenen Abweichung vom Quadratgesetz sein müßten. Ich habe deshalb die nachstehende Tab. 1 berechnet, der folgende, den wirklich ausgeführten Messungen entsprechende Voraussetzungen zugrunde liegen: Die Brücke wäre bei 1000 Volt mit den Werten $n = 538,0$, $w_3 = w_4$, $c_2 = 2,3 \cdot 10^{-4}$ Mikrof., $w_2 = 100000 \Omega$ zum Einstehen gebracht worden. Die Tabelle gibt die Werte an, die w_2 , das natürlich konstant bleibt, sobald das Quadratgesetz genau erfüllt ist, annehmen müßte, wenn der Verlust proportional der 2,1^{ten} Potenz der Spannung wachsen würde. Die Zunahme, die w_2 hier mit steigender Spannung aufweist, muß als sehr erheblich bezeichnet werden, wenn man in Betracht

zieht, daß die Empfindlichkeit der Einstellung bei den ausgeführten Messungen gewöhnlich derart war, daß bei 2000 Volt Änderungen von w_2 um 1500—2000 Ohm, bei 8000 Volt aber solche von weniger als 1000 Ohm mit Sicherheit wahrnehmbar waren.

Tabelle 1.

E	w_2
1000	100 000
2000	107 140
4000	114 830
6000	119 580
8000	123 070

2. *Proportionalität des Verlustes mit der Kapazität.* — Noch etwas läßt sich aus Gleichung (2) ersehen: Aus (1a) und (1b) berechnet sich c_1 zu

$$c_1 = \frac{c_2}{1 + n^2 c_2^2 w_2^2} \cdot \frac{w_4}{w_3}.$$

Die hier im Nenner vorkommende Größe $1 + n^2 c_2^2 w_2^2$ ist in allen hier in Betracht kommenden Fällen von 1 sehr wenig verschieden. Sie beträgt z. B. in dem soeben betrachteten Beispiele 1,000153. Man kann also mit außerordentlich großer Annäherung setzen:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{w_4}{w_3}.$$

Diese vereinfachte Beziehung ist auch im folgenden durchweg zur Berechnung der Kapazität c_1 des zu untersuchenden Kondensators aus den Daten der Brücke herangezogen. Denken wir uns nun den genauen Ausdruck für c_1 in die Gleichung (2) eingesetzt.

Diese nimmt dann die Form an

$$(2') \quad A = n^2 c_2 w_2 \cdot c_1 E^2.$$

Hieraus folgt: *bleibt bei derselben Spannung und Schwingungszahl, aber verschiedenen Werten der Kapazität c_1 das Produkt $c_2 w_2$ unverändert, so ist der Verlust A proportional der Kapazität c_1 .*

3. *Kurvenform der Spannung.* — Es sollen nun die Größen c_2 und w_2 aus den Gleichungen (1a) und (1b) berechnet werden. Man erhält:

$$c_2 = \frac{1 + n^2 c_1^2 w_1^2}{n^2 c_1 w_1^2} \cdot \frac{w_3}{w_4} \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{w_1}{1 + n^2 c_1^2 w_1^2} \cdot \frac{w_4}{w_3}.$$

Wie man sieht, enthält jeder dieser Ausdrücke die Schwingungszahl n . Da nun die Einstellung der Brücke nur so vorgenommen werden kann, daß entweder beide Größen c_2 und w_2 oder eine von ihnen und w_3/w_4 verändert werden, ergibt sich hieraus ein wichtiger Schluß: Die Brückeneinstellung ist für jede Schwingungszahl eine andere. Wird die Brücke also gleichzeitig von mehreren Strömen verschiedener Schwingungszahl durchflossen, so ist eine Nulleinstellung überhaupt nicht mehr möglich, es sei denn, daß man ein Brückeninstrument verwendet, das nur auf Ströme einer einzigen Schwingungszahl anspricht, das also gewissermaßen aus allen Strömen, welche die Brücke durchfließen, einen bestimmten herausfiltriert und zwar jenen, der eine ganz bestimmte Schwingungszahl aufweist. Diese Eigenschaft besitzt das optische Telephon¹⁾ von M. Wien, mit welchem die vorliegenden Untersuchungen ausgeführt wurden. Für dieses Instrument, somit auch für die Brückeneinstellung mit ihm, ist es genau so, als ob überhaupt nur die Grundschiwingung existierte, oder als ob zwischen den Punkten A und B eine reine Sinusspannung bestände. *Es wird also hier auch nicht der ganze in dem zu untersuchenden Kondensator wirklich auftretende Verlust gemessen, sondern nur jener, der durch die Grundschiwingung der Spannung an der Seite AD verursacht ist, d. h. der stattfindet, wenn nur die Grundschiwingung dieser Spannung, also eine reine Sinusspannung auf den Kondensator wirken würde.* Beim Vorhandensein einer Hysterese hätte man allerdings auch bei sinusförmiger Spannung mit dem Auftreten von Oberströmen zu rechnen. Auch in diesem Falle würde jedoch, wie sich leicht beweisen läßt (vgl. Dissert.), der durch die Grundschiwingung der Spannung verursachte Verlust richtig gemessen werden.

Der Erfüllung der Bedingung der reinen Sinusform der Spannung am untersuchten Kondensator nahe zu kommen, hat man sich zwar bei den bisher vorliegenden Untersuchungen über den Verlust im Dielektrikum mehrfach auf verschiedenen Wegen, wie durch Herstellung von Spannungsresonanz²⁾ und

1) M. Wien, Wied. Ann. **42**. p. 593. 1891; **44**. p. 681. 1891.

2) E. B. Rosa u. A. W. Smith, Phil. Mag. (5) **47**. p. 19. 1899; Ch. P. Steinmetz, Electrical World, New-York **37**. p. 1065. 1901.

durch Benutzung von Duddellströmen¹⁾ bemüht, doch ist sie, soviel ich weiß, noch niemals wirklich erreicht worden. Daß die Kurvenform den Verlust beeinflussen muß, unterliegt wohl heute keinem Zweifel mehr; es erhellt das daraus, daß der Verlust bei gleicher Spannung von der Schwingungszahl abhängt und zwar im allgemeinen mit der Schwingungszahl zunimmt. Man müßte deshalb, um wirklich definierte Resultate zu erhalten, entweder die Kurvenform genau feststellen, oder reine Sinusspannungen verwenden. Die Abhängigkeit des Verlustes von der Kurvenform der Spannung bildet übrigens auch bei der Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Verlust und Spannung eine Fehlerquelle, die bisher oft nicht genügend beachtet worden ist. Diese gerade bei Messungen an Kondensatoren keineswegs unwesentliche Fehlerquelle ist hier durch Verwendung des geeigneten Meßinstrumentes in der Brücke, wie gesagt, von vornherein umgangen.

II. Ausführung der Methode.

Bei der Ausführung dieser Methode und ihrer Anwendung auf den vorliegenden Zweck stößt man auf eine Reihe von Schwierigkeiten und Fehlerquellen, die um so größer werden, mit je höheren Spannungen und je kleineren Kapazitäten man arbeitet und die teils der Methode selbst eigentümlich sind, teils bei der Ermittlung des Energieverlustes im Dielektrikum überhaupt in Betracht kommen. Da man häufig gezwungen ist, kleine Kapazitäten bei hohen Spannungen zu messen, ist es vielleicht nicht unangebracht, auf diese Fehlerquellen, die zum Teil für die Verwendung von Kondensatoren überhaupt von Bedeutung sind, hier etwas näher einzugehen.

1. *Ladungserscheinungen im Brückenzeige.* — Eine Fehlerquelle, die sich, bevor sie erkannt wurde, besonders störend bemerkbar gemacht hatte, äußerte sich darin, daß bei Vertauschung der beiden Brückenseiten AD und AF gänzlich verschiedene Werte von c_2 und w_2 zur Nulleinstellung erforderlich waren, auch wenn die beiden Widerstände w_3 und w_4 einander genau gleichgemacht wurden. Sie hatte ihre Ursache in Ladungserscheinungen, die sich im Brückenzeige, speziell

1) O. M. Corbino, Il nuovo cimento (5) 9. p. 31. 1905.

in den Rollen des optischen Telephons abspielten. Besitzt dieser eine Kapazität c und befindet er sich auf einem Potentiale von der Amplitude V , so muß ihm ja ein Ladestrom von der Amplitude ncV zufließen, der die Fehler verursacht. Um diese Fehler klein zu machen, muß man das Potential V verringern, indem man den Punkt B der Brücke (vgl. Fig. 1, p. 908) mit der Erde verbindet. Wenn die Widerstände w_3 und w_4 genügend klein im Vergleiche zu den scheinbaren Widerständen der Brückenseiten AD und AF gewählt werden, ist dann auch das Potential in D und F , also V , sehr wenig von Null verschieden, und die besprochenen Fehler sind vernachlässigbar klein. Auf diese Weise konnte vollständige Gleichheit der Brückeneinstellung beim Vertauschen der Seiten AD und AF erzielt werden.

2. *Stromübergänge zwischen Teilen der Brücke und zwischen Brücke und Erde.* — Die eben besprochene Maßregel brachte andererseits die Notwendigkeit mit sich, alle übrigen Teile der Brücke sorgfältig von der Erde (Fußboden, Zimmerwänden etc.) zu isolieren, was durch ausgiebige Verwendung von Paraffin gelang. Das gleiche Mittel wurde auch mit gutem Erfolge dazu benutzt, direkte Stromübergänge zwischen den einzelnen Teilen der Brücke zu vermeiden.

3. *Ladungsströme zwischen Teilen der Brücke und zwischen Brücke und Erde.* — Neben den so vermiedenen Nebenschlüssen in Form von Leitungsströmen gab es jedoch noch andere Störungen, die von den Ladungsströmen herrührten, welche einerseits zwischen den einzelnen Bestandteilen der Brücke, vornehmlich den Kondensatoren, andererseits aber zwischen den Kondensatoren und der Erde flossen. Die ersteren konnten dadurch, daß bei der Aufstellung der Apparate, sowie bei der Führung der Leitungen auf sie Rücksicht genommen wurde, leicht unschädlich gemacht werden, nicht immer aber die letzteren. Es könnte scheinen, als ob durch diese Kapazitätswirkungen zwischen Brücke und Erde eine Abhängigkeit der Brückeneinstellung von der Spannung verursacht würde, wodurch natürlich die Verwirklichung des Zieles der Messungen, die Prüfung des Quadratgesetzes zwischen Verlust im Dielektrikum und Spannung, unmöglich gemacht wäre. Führt man, um diese Frage zu untersuchen, die Kapazität C_1 bez. C_2 , welche

die Niederspannungsbelegung von c_1 bez. c_2 gegen Erde besitzt, in die Rechnung ein, so erhält man statt der Gleichungen (1a) und (1b) die Stromlosigkeitsbedingungen

$$(3a) \quad n^2 c_1 (c_2 + C_2) w_1 w_2 = 1 - n^2 (c_1 C_2 - c_2 C_1) w_1 w_4$$

und

$$(3b) \quad (c_2 + C_2) w_2 w_3 = (c_2 w_4 - c_1 w_3) w_1 - C_2 w_3 w_4.$$

Daraus ergibt sich 1.), daß die Brückeneinstellung von der Spannung unabhängig bleibt, 2.), daß die Brückeneinstellung sowohl von C_1 als auch von C_2 beeinflusst wird, daß aber vor allem C_2 möglichst klein gehalten werden muß. Dies ist leicht zu erreichen, solange die Messungen bei verhältnismäßig niedrigen Spannungen (bis etwa 1500 Volt) vorgenommen werden, bietet jedoch Schwierigkeiten, sobald man zur Verwendung höherer Spannungen übergeht. Wie später gezeigt werden wird, ist man nämlich bei hohen Spannungen zur Anwendung von Vergleichskondensatoren sehr kleiner Kapazität aber großer Oberfläche gezwungen, die also eine verhältnismäßig große Kapazität gegenüber Erde besitzen. Durch diese Fehlerquelle ist somit eine Grenze der Verwendbarkeit der Methode für quantitative Messungen, zumal bei hohen Spannungen, gegeben.

4. *Kapazität der Widerstände.* — Von den Widerständen w_2 ,

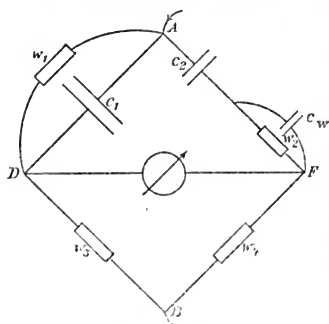


Fig. 1 a.

w_3 und w_4 ist vorausgesetzt worden, daß sie weder Kapazität noch Selbstinduktion besitzen. Wenn es nun auch gelingen mag, die Selbstinduktion der als Widerstände dienenden Apparate auf ein unschädliches Maß herabzubringen, so ist dies jedoch viel weniger leicht für die Kapazität, die hier besonders in Betracht kommt, zumal bei größeren Widerständen, ausführbar. Es möge

zunächst untersucht werden, welche Veränderung die Stromlosigkeitsbedingungen erfahren, wenn die Voraussetzung der

Kapazitätslosigkeit nur bei dem Widerstande w_2 nicht erfüllt ist. Die Kapazität von w_2 sei c_w (vgl. Fig. 1a); dann wird der Widerstandsoperator des Zweiges AF

$$a_2 = \frac{w_2}{1 + i n c_w w_2} + \frac{1}{i n c_2},$$

während die der übrigen drei Seiten unverändert bleiben

$$a_1 = \frac{w_1}{1 + i n c_1 w_1}, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4.$$

Als Bedingungen für die Stromlosigkeit des Brückenzeuges findet man jetzt

$$(4a) \quad n^2 c_1 c_2 w_1 w_3 = 1 + n^2 c_w w_1 w_2 \left(c_2 \frac{w_4}{w_3} - c_1 \right)$$

und

$$(4b) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{w_4}{w_3} - \frac{w_2}{w_1} \left(1 + \frac{c_w}{c_2} \right).$$

Gleichung (4b) zeigt, daß es zur Bekämpfung des Einflusses dieser Fehlerquelle wesentlich ist, das Verhältnis c_w/c_2 möglichst klein zu halten.

Widerstände.

Für w_2 zeigten sich, wie zu erwarten war, gewöhnliche bifilar gewickelte Widerstände infolge ihrer Kapazität gänzlich unverwendbar. Ich griff daher zuerst zu dem Mittel, zu dem man gewöhnlich seine Zuflucht nimmt, wenn man reiner Widerstände bedarf, zu Glühlampen. Es zeigte sich jedoch, daß diese auch schon bei den sehr geringen hier in Betracht kommenden Stromstärken (2—3 Milliamp. wurden nie überschritten) eine so große Änderung des Widerstandes mit der Stromstärke aufwiesen, daß sie für meine Zwecke nicht benutzt werden konnten. Wenigstens gilt dies für Lampen mit größeren Widerständen (von etwa 1000 Ohm aufwärts), bei denen diese Erscheinung natürlich am stärksten auftritt; Lampen kleineren Widerstandes waren ganz gut verwendbar. Dieselbe Eigenschaft der Änderung des Widerstandes mit der Stromstärke zeigte sich auch bei Graphitwiderständen und schloß ihre Benutzung völlig aus.

Dagegen bewährte sich eine Art von Widerständen sehr gut, bei der sehr dünner Manganindraht auf etwa 1 mm dicke Glimmerplatten in nur einer Lage aufgewickelt war. Solche Widerstände standen mir in Beträgen von 10000—100000 Ohm

zur Verfügung. Eine Reihe von Widerständen von 1000 bis 5000 Ohm stellte ich mir selbst aus 0,05 mm starkem Manganindraht her. Sie wurden nach Chaperon mit abwechselndem Wicklungssinn der einzelnen Lagen auf einen Holzkern gewickelt. Für noch kleinere Widerstände (von 50—500 Ohm), deren ich bei größeren Kapazitäten der untersuchten Kondensatoren bedurfte, benutzte ich Glühlampen. Alle diese Widerstände wurden wiederholt sorgfältig auf ihre Konstanz bei veränderlicher Stromstärke geprüft und zeigten sich vollkommen verlässlich.

Um diese Widerstände bequem in die Brücke ein- und aus derselben ausschalten zu können, bediente ich mich folgender Anordnung: In einer rechteckigen Paraffinplatte wurde, etwa 2 cm von den Rändern entfernt, eine Anzahl gläserner Quecksilbernäpfe von etwa 6 mm Durchmesser und 1 cm Tiefe in beiläufig 5 cm Entfernung voneinander angebracht. An den beiden Enden jedes der Widerstände wurde je ein Zugführungsdraht angebracht, der an seinem freien Ende einen Haken aus 2 mm dickem Kupferdraht trug, mit dem er in einen Quecksilbernapf tauchte. Die Schaltungen an dem so hergestellten Rheostaten nahm ich mit Hilfe $\sqcap$ -förmiger Bügel aus 1 mm starkem Kupferdraht vor, von denen jeder zwei benachbarte Näpfe miteinander verband und durch deren Herausnehmen und Einsetzen die einzelnen Widerstände nach Belieben eingeschaltet und kurzgeschlossen werden konnten. Auf derselben Paraffinplatte brachte ich noch eine Wippe an, die zur Vornahme der früher erwähnten Vertauschung der Zweige AD und AF erforderlich war.

Später benutzte ich auch noch einen Stöpselrheostat von O. Wolff, Berlin, mit Widerständen von 0,1—50000 Ohm, die nach Chaperonscher Art gewickelt waren und sehr geringe Kapazität besaßen.

Die Kapazität aller dieser in w_2 verwendeten Widerstände war an sich wohl klein, doch machte sie sich bei kleineren Kapazitäten der Kondensatoren c_1 und c_2 schon bemerkbar. Es gibt heute, soviel ich weiß, überhaupt noch keine Vorrichtungen, die als wirklich „reine“ und konstante Widerstände größeren Betrages dienen könnten. Dies gilt schon für Widerstände von etwa 10000 Ohm aufwärts. Es handelt sich, wie

erwähnt, hauptsächlich darum, Widerstände von großem Betrage und dabei kleiner Oberfläche herzustellen, die genügend starke Ströme vertragen, ohne ihren Wert zu ändern, und da solche Widerstände ja für viele Zwecke gebraucht werden, glaube ich, daß hier von einem wirklichen Bedürfnis die Rede sein kann.

Durch die Kapazität der Widerstände ist also der Anwendung der Methode wiederum eine Grenze bezüglich der Größe der Kapazitäten c_1 und c_2 gesetzt, unterhalb deren quantitativ richtige Messungen nicht mehr ausgeführt werden können. Es wird sogleich noch näher besprochen werden, daß die Methode für kleinere Kapazitäten als ca. 0,001 Mikrof. (bei meiner Anordnung) nicht mehr sicher arbeitet.

Was nun die Widerstände w_3 und w_4 anbelangt, so besitzt man ein Mittel, die Brückeneinstellung von dem Einfluß ihrer Kapazität von vornherein zu befreien. Dieses besteht darin, daß man w_3 und w_4 in jeder Hinsicht einander völlig gleich macht. Da auf jeder Seite der Bedingungsgleichung für die Stromlosigkeit des Brückenzeiges eine dieser beiden Größen als Faktor auftritt, fallen sie dann mit ihrer Kapazität und Selbstinduktion ganz aus der Rechnung. Von diesem Mittel ist bei den meisten Messungen Gebrauch gemacht worden. Schließlich wurde doch bei einigen Versuchen, wo es besonders wünschenswert war, von der Erfüllung dieser Bedingung ($w_3 = w_4$) abgesehen. Die Möglichkeit hierzu gewährte der genannte Wolfsche Widerstandskasten, bei dem die Abstufungen von 0,1—2000 Ohm, die ich daraufhin genau untersuchte, selbst in meiner gerade dafür sehr empfindlichen Anordnung keinen merklichen Einfluß von Kapazität erkennen ließen.

5. *Verlust der Vergleichskondensatoren.* — Eine weitere Voraussetzung, die den Gleichungen (1a) und (1b) zugrunde gelegt worden ist, betraf den Kondensator c_2 , von dem angenommen war, daß er selbst keinerlei Verlust besitze. Wenn wir diese Voraussetzung jetzt fallen lassen, dagegen von der soeben behandelten Fehlerquelle zunächst absehen, die von der Kapazität des Widerstandes w_2 herrührt, erhalten wir die Stromlosigkeitsbedingungen

$$(5a) \quad n^2 c_1 c_2 w_1 w_2 = 1 + \frac{1}{w_2} \left(w_2 - w_1 \frac{w_4}{w_3} \right)$$

und

$$(5b) \quad \frac{c_1}{c_2} \left(1 + \frac{w_2}{w'_2} \right) = \frac{w_4}{w_3} - \frac{w_3}{w_1},$$

worin (vgl. Fig. 1 b), ganz ebenso wie dies für den untersuchten Kondensator dargestellt wurde, w'_2 einen zu einem verlustlos

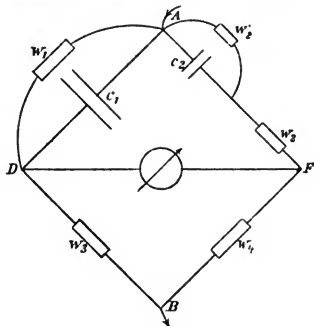


Fig. 1 b.

angenommenen Kondensator von der Kapazität c_2 parallel geschalteten Widerstand bedeutet.

Vergleichskondensatoren für höhere Spannungen.

Von allen bisher erörterten Fehlerquellen war die zuletzt erwähnte diejenige, deren Beseitigung die größten Schwierigkeiten machte. Es erwies sich nämlich, daß die Herstellung wirklich verlustfreier Kondensatoren, ja selbst solcher mit vernachlässigbar kleinem Verlust eine zumal dann nichts weniger als leichte Aufgabe ist, wenn es sich um höhere Spannungen handelt. Die Hauptursache hierfür sind die bei hohen Spannungen nur schwer zu vermeidenden Spitzenentladungen¹⁾ an den Belegungen und der durch sie bewirkte Energieverlust. Verschiedene fertige Luftkondensatoren, die mir zur Verfügung

1) Unter Spitzenentladungen sollen hierbei nicht nur die an den Belegungsrandern von Leidener Flaschen auftretenden Erscheinungen, sondern allgemein die Entladungsvorgänge verstanden werden, die an Stellen stattfinden, an denen die Intensität des elektrischen Feldes bestimmte Grenzen überschreitet.

standen, waren bei nur einigermaßen höheren Spannungen überhaupt nicht verwendbar, und ich ging deshalb daran, mir einen Luftkondensator selbst herzustellen. Derselbe bestand aus 38 Zinkblechplatten, die in einen Zinkblechkasten von 30 cm Länge, 14 cm Breite und 25 cm Höhe eingesetzt waren. Sie wurden mit Hilfe kleiner Bleiglasstückchen in etwa 3 mm Abstand voneinander gehalten und ruhten auf zwei Bleiglasstäben. Jede zweite Platte wurde mit dem Blechkasten leitend verbunden, die übrigen untereinander. Die Anordnung in der Brücke wurde immer so gemacht, daß der Blechkasten und die mit ihm verbundene Plattenschar auf niedrigem Potential waren. Dieser Kondensator erwies sich, nachdem an sämtlichen Platten alle Ecken sorgfältig nach einem Krümmungsradius von etwa 1,5 cm abgerundet worden waren, als gut brauchbar bei niedrigen Spannungen bis etwa 900—1000 Volt. Sein Verlust war sehr gering, und er wurde auch bei einzelnen Messungen später benutzt. Seine Kapazität, die im ganzen nicht ganz 0,01 Mikrof. betrug, konnte natürlich durch Ausschalten einer beliebigen Anzahl Platten leicht verändert werden. Sowie man aber die Spannung über den angegebenen Wert hinaus steigerte, zeigte er einen Verlust infolge von Spitzenwirkung, der viel schneller als mit dem Quadrate der Spannung wuchs. Dieser Verlust ist bei den Messungen immer daran leicht zu erkennen, daß eine gewisse Unstetigkeit, ein fortwährendes Sichändern der Brückeneinstellung eintritt, und schon dadurch läßt sich seine etwaige Anwesenheit immer mit Bestimmtheit nachweisen. Nicht viel besser erwies sich in dieser Hinsicht ein zweiter Kondensator, den ich nach demselben Prinzip, aber mit 1 cm Plattenabstand herstellte.

Ich suchte dann durch Anwendung von Ölen als Dielektrikum zum Ziele zu kommen. Auch dies mißlang. Rizinusöl, mit dem ich zuerst Versuche anstellte, zeigte selbst nicht unerheblichen Verlust, Paraffinöl, bei dem der Verlust vernachlässigbar klein war, erwies sich infolge seiner sehr geringen Durchschlagsfestigkeit als für höhere Spannungen un verwendbar, und ich erkannte bald, *daß, wenn das Ziel, einen Kondensator mit vernachlässigbar kleinem Verlust für höhere Spannungen herzustellen, überhaupt erreicht werden konnte, dies nur durch die Verwendung von Luft als Dielektrikum möglich war.*

Tatsächlich gelang auch schließlich die Konstruktion eines Luftkondensators, der auch bei hohen Spannungen (bis etwa 10000 Volt Effektivwert) seinen Zweck in vollkommen befriedigender Weise erfüllte. Dieser Kondensator, der in Fig. 2a dargestellt ist, bestand aus zwei Messingrohren von 1 mm Wandstärke, 1 m bez. 95 cm Länge und 110 mm bez. 85 mm äußerem Durchmesser. Das eine Ende des äußeren Rohres wurde, nachdem es durch einen halbkugelförmigen Boden verschlossen worden war, mit einem zylindrischen Paraffinblock von 20 cm Höhe und 13 cm Durchmesser umgossen. Das innere Rohr wurde an beiden Enden durch Halbkugeln abgeschlossen und erhielt an einem Ende einen 1 cm starken Messingstab von 24 cm Länge angelötet, der an seinem freien Ende ein Gewinde trug und zur Befestigung des Rohres diente. Die Art seiner



Fig. 2a.

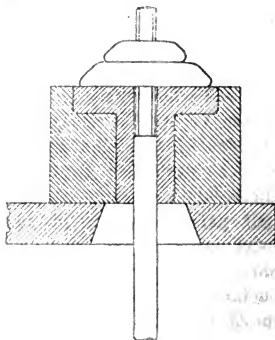


Fig. 2b.

Aufhängung ist durch Fig. 2b dargestellt. Auf das Gewinde waren zwei Muttern aufgebracht, von denen die obere zum Festschrauben der Zuleitung bestimmt war, während die untere und mit ihr der ganze aufzuhängende Kondensator-
teil auf einer Holzbüchse ruhte, die ihrerseits mit einem

Paraffinklotz von 5 cm Höhe umgossen war. Dieser wurde von einem durchbohrten Holzbrett getragen, das durch Holzklammern an der Tischplatte eines hölzernen Stativs befestigt war. Irgendwelche Kanten wurden an dem ganzen Apparat sorgfältig vermieden, wie dies z. B. an den Muttern in Fig. 2b ersichtlich ist. Die Kapazität dieses Luftkondensators, die maximal 0,00023 Mikrof. betrug, konnte dadurch in stetiger Weise verändert werden, daß die Tischplatte des Stativs mittels Zahnstange, Schraubenrad, Schraube und Handrad bequem gehoben und gesenkt werden konnte.

Ich vermochte an diesem Kondensator auch bei hohen Spannungen keinerlei Leuchten im Dunkeln oder Geräusch wahrzunehmen, durch welche Begleiterscheinungen sich die Spitzenentladungen in anderen Fällen sofort bemerkbar gemacht hatten. Ebenso wenig konnte ich an ihm irgendeinen Verlust feststellen, trotzdem ich ihn wiederholt in verschiedener Weise daraufhin untersuchte. Er ist bei den endgültigen Spannungsversuchen, wie ich die Messungen zur Ermittlung der Abhängigkeit des Verlustes von der Feldintensität kurz nennen will, ausschließlich als Kondensator c_2 benutzt worden.

Außerdem stand mir noch ein von der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie bezogener Luftkondensator zur Verfügung, der aus zwei gegeneinander verdrehbaren Systemen gleich großer konzentrischer, halbkreisförmiger Platten bestand. Der Verlust dieses sehr bequem veränderbaren Kondensators, dessen maximale Kapazität $2,99 \cdot 10^{-3}$ Mikrof. betrug, war, wie ich wiederholt feststellte, vernachlässigbar klein; das Komplement des Phasenverschiebungswinkels zwischen Spannung und Stromstärke betrug bei ihm weniger als eine Minute. Auch er ist bei den endgültigen Messungen, soweit sie bei Spannungen bis zu höchstens 1500 Volt vorgenommen wurden, als Vergleichskondensator c_2 benutzt worden. Überdies diente er mir als Normalkondensator für die Kapazitätsbestimmung, zu welchem Zwecke ich ihn durch Vergleich mit einer Selbstinduktions-Normalrolle eichte.

Die mehrfach erwähnte Untersuchung der Luftkondensatoren auf Verlust hatte zur Voraussetzung, daß die Luft bei niedrigen Spannungen keine merkliche Leitfähigkeit besitzt, also der Verlust bei den Luftkondensatoren nur durch Ober-

flächenleitung zustande kommt. Demnach mußte bei diesen eine Änderung der Stellung des beweglichen Teiles den Verlust unverändert lassen. Die Richtigkeit dieser Annahme wurde vielfach in der Weise geprüft, daß die Luftkondensatoren bei ihrer Untersuchung auf Verlust in den verschiedensten Kombinationen untereinander und mit anderen Kondensatoren in der Brücke verglichen wurden. Z. B. wurde der Hochspannungsluftkondensator bei Spannungen bis 1500 Volt u. a. auch so geprüft, daß er mit dem zuletzt besprochenen Kondensator der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie zusammen die Kapazität c_2 darstellte (im Zweige AD befand sich ein Kondensator mit Verlust). Nachdem die Brückeneinstellung gemacht worden war, wurde er herausgenommen und die Brücke neuerlich eingestellt, wozu der andere variable Luftkondensator natürlich etwas verstellt werden mußte. Da jedoch an allen übrigen Größen der Brücke nicht die geringste Änderung vorzunehmen war, wurde daraus geschlossen, daß der untersuchte Luftkondensator keinen, innerhalb der Grenzen des Beobachtbaren liegenden Verlust besitze. Der Verlust durch Spitzenentladungen, der bei hohen Spannungen an anderen Kondensatoren auftrat und in der erwähnten Weise zu erkennen war, zeigte sich hier bis zu jenen Spannungen, bei denen zwischen den Belegungen Funken überzuspringen begannen, überhaupt nicht.

6. Die *Spitzenentladungen*, von denen vorhin die Rede war, bilden auch an den zu *untersuchenden Kondensatoren* eine nur durch ganz besondere Vorkehrungen zu beseitigende oder wenigstens unschädlich zu machende Fehlerquelle. Sie bedeuten einen Energieverlust, der mit dem im Dielektrikum stattfindenden gar nichts zu tun hat, und trüben daher den Einblick in die Vorgänge, die sich im Dielektrikum selbst abspielen. Der Energieverlust durch die Spitzenentladungen wächst wesentlich schneller als mit dem Quadrate der Spannung und übersteigt, wenn man die Spannung steigert, den Verlust im Dielektrikum um ein Vielfaches. Dieser kommt neben ihm bald gar nicht mehr in Betracht, und wenn man nicht für die Beseitigung oder wenigstens Eindämmung dieses Ausstrahlungsverlustes sorgt, ist es daher für Hochspannungskondensatoren fast ganz gleichgültig, ob man als Dielektrikum ein Material

mit großem oder kleinem dielektrischen Verlust wählt. Ich glaube auf diese Tatsache besonders hinweisen zu sollen, weil man auf sie beim Bau von Kondensatoren bis jetzt eigentlich so gut wie keine Rücksicht genommen hat.

Da die Beseitigung des Ausstrahlungsverlustes eine Vorbedingung für die genaue Bestimmung des dielektrischen Verlustes nach der hier benutzten Methode ist, konnte an die eigentlichen Messungen erst gegangen werden, nachdem es gelungen war, eine Belegungsart zu finden, die dieser Anforderung entsprach. Die auch bei Hochspannungskondensatoren noch immer üblichen Stanniolbelegungen erwiesen sich, wie zu erwarten war, als völlig unbrauchbar. Das Gleiche gilt natürlich, womöglich in noch höherem Maße, für Silberbelegungen, wie sie auf chemischem Wege, z. B. nach dem Böttgerschen Verfahren hergestellt werden. Ein klein wenig besser, aber immer noch ganz unbefriedigend erwiesen sich Belegungen, die aus kreisrunden Messingplatten von 15 cm Durchmesser und 4 mm Dicke mit sorgfältig abgerundeten Kanten gebildet waren. Umgießen der Ränder dieser Platten mit Paraffin brachte eine weitere, jedoch nur ganz unwesentliche Besserung. Von etwa 3000 Volt an wuchs auch hier w_2 noch rapid, während gleichzeitig das bekannte, durch die Spitzenentladungen hervorgerufene Knistern und Zischen bemerkbar wurde und im Dunkeln ein bläuliches Leuchten des ganzen Randes beobachtet werden konnte. Einen wesentlichen Fortschritt brachte erst die Anwendung von Quecksilber als Belegung. Jedoch zeigen sich auch hier, wenn die Spannung höher als etwa 5000 Volt wird (es ist dies etwas verschieden, je nach der Dicke des Dielektrikums), Spitzenentladungen mit ihren Begleiterscheinungen, dem Knistern und Leuchten.

Ich versuchte nun die Anwendung von Öl, das schon bei den Stanniol- und Silberbelegungen, wenn diese damit bedeckt wurden, eine gewisse mildernde Wirkung auf den Ausstrahlungsverlust gezeigt hatte. Dies brachte endlich einen Erfolg; die mit Öl überschichteten Quecksilberbelegungen erwiesen sich als ein ausreichendes, aber auch als das einzige Mittel zur Unschädlichmachung der Spitzenentladungen bis zu einer genügend hohen Grenze der elektrischen Feldintensität. Es ist

deshalb von dieser Belegungsart bei den Messungen vielfach Gebrauch gemacht worden.

Dies bezieht sich alles auf Spitzenentladungen, die an den Enden der Belegungen in Luft oder an der Grenzschicht Luft-Dielektrikum Platz greifen. Aber auch bei *Belegungen, die ganz in ein Dielektrikum eingebettet sind*, findet bei stärkerer Beanspruchung in dem Dielektrikum selbst eine ähnliche Spitzen- oder Glimmentladung statt. Dieselbe setzt bei den meisten Dielektrizis bei einer gar nicht allzu hohen Spannung plötzlich ein und macht die Verwendung dieser Dielektrika bei höherer Beanspruchung unmöglich. Beispiele dafür werden unten besprochen werden.

Das bisher über die Fehlerquellen Gesagte kann folgendermaßen zusammengefaßt werden. Die in Betracht kommenden Fehlerquellen waren:

1. Ladungserscheinungen im Brückenzeige.
2. Nebenschlüsse in der Brücke und zwischen Brücke und Erde.
3. Kapazitätswirkungen in der Brücke und zwischen Brücke und Erde.
4. Kapazität der Widerstände.
5. Verlust des Vergleichskondensators.
6. Ausstrahlungsverluste am untersuchten Kondensator.

Die Fehlerquellen 1, 2, 5 und 6 konnten auf ein unschädliches Maß gebracht werden, 3, 4 (auch 2) werden von der Spannung nicht beeinflußt. Die Fehlerquelle 4 kann bei kleinen Werten von c_1 und c_2 und größerem Verlust, also wenn κ_2 groß wird, nicht ganz vermieden werden. Die Kapazitätswirkung der Kondensatoren gegenüber Erde (3) kann bei hohen Spannungen nicht vernachlässigbar klein gemacht werden, weil man dadurch an die Anwendung großer Oberflächen der Vergleichskondensatoren gebunden ist, daß man a) als Dielektrikum für dieselben nur Luft verwenden kann, b) unter eine bestimmte Dicke des Dielektrikums, etwa 1 cm, nicht herabgehen darf und c) zur Vermeidung von Spitzenentladungen möglichst einfache Formen verwenden, daher auch die Ineinanderschachtelung mehrerer Belegungen vermeiden muß.

Man kann demnach bei hohen Spannungen die Messung von dem Einfluß der Fehlerquellen nicht ganz befreien, doch

beeinträchtigt dies nicht die einwandfreie Anwendbarkeit der Methode zur Untersuchung des Quadratgesetzes. Sollen die Messungen quantitativ richtige Resultate ergeben, so muß natürlich die Wirkung aller Fehlerquellen vernachlässigbar klein gemacht werden. Dies ist nur dadurch möglich, daß man die Kapazitäten c_1 und c_2 eine gewisse Grenze nicht unterschreiten läßt, die sich bei meiner Anordnung, wie erwähnt, mit etwa 0,001 Mikrof. ergeben hat.

Es erübrigt die Beschreibung der bei den Untersuchungen *sonst noch verwendeten Apparate*:

Als Brückeninstrument diente, wie erwähnt, ein optisches Telephon. Seine Einstimmung erfolgte zunächst auf 86 Schwingungen in der Sekunde, später wurde es auf 50 Schwingungen in der Sekunde herabgestimmt. Von den beiden Eigentönen, die das Instrument bei jeder Einstimmung besitzt, war der Benutzte immer der Tieferer. Die Messung der Schwingungszahl wurde mittels des phonischen Rades vorgenommen.

Im Hauptzweige befand sich ein Induktorium für 30 cm Schlagweite von H. Boas, Berlin, das nach unbefriedigend verlaufenen Versuchen mit mehreren anderen kleineren Induktorien in Verwendung genommen wurde. Die effektive Spannung an den Sekundärklemmen des Induktoriums wurde durch ein Braunsch'sches Elektrometer gemessen, dessen Meßbereich 10000 Volt betrug.

Die Primärwicklung des Induktoriums wurde bei dem größeren Teile der Messungen mit intermittierendem Strom gespeist, der dadurch erhalten wurde, daß der der Akkumulatorbatterie des Institutes gewöhnlich bei 20 Volt entnommene Gleichstrom durch eine elektromagnetisch getriebene Saite unterbrochen wurde. Die schwingende Saite äußerte, solange sie sich im selben Zimmer wie das optische Telephon befand, direkte akustische Einwirkungen auf dieses Instrument, weshalb ich sie in einem anderen Raume aufstellte.

Bei einem Teile der Messungen wurde zum Betrieb des Induktoriums Maschinenwechselstrom benutzt, der einem Drehstromgenerator der Siemens-Schuckert-Werke für 550 Volt, 3.3,5 Amp. und 50 Perioden entnommen war. Dieser war im Maschinenraum des Institutes aufgestellt und wurde von einem Gleichstrommotor angetrieben. Durch Verändern der Feld-

erregung dieses Motors konnte die Schwingungszahl des Wechselstromes ausreichend genau eingestellt werden.

Mithin wurde die Methode der in der Technik üblichen Art des Wechselstromes nach Schwingungszahl, Spannung und Form angepaßt, was ohne Schwierigkeit gelang.

B. Untersuchungen.

Ein Teil der im folgenden mitgeteilten Messungen und Beobachtungen wurde an verschiedenen Dielektrisis ausgeführt, aus denen ich die zur Untersuchung erforderlichen Kondensatoren selbst herstellte; einige von ihnen standen mir auch schon in verarbeitetem Zustande in Form von Kondensatoren oder Kondensatorplatten zur Verfügung. Außerdem hatte ich noch Gelegenheit, eine Anzahl von Kraftübertragungskabeln für Betriebsspannungen von 700—20000 Volt zu untersuchen.

I. Vergleichende Messungen mit Spannungen verschiedener Kurvenform.

Es soll nun zunächst eine Gruppe von Messungen besprochen werden, die ich mit Spannungen sehr verschiedener Kurvenform, aber unter sonst gleichen Umständen vornahm. Die Anordnung dieser Versuche ist durch Fig. 3 dargestellt.

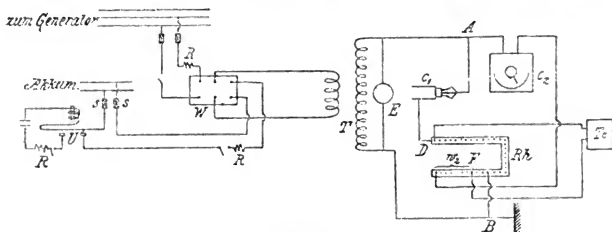


Fig. 3.

Die Primärwicklung des Induktoriums T konnte durch bloßes Umlegen der Wippe W entweder in den Stromkreis des Unterbrechers oder in den der Maschine gebracht werden. U stellt den Unterbrecher mit seinen beiden Quecksilbernäpfen dar. Zum Antrieb der Saite diente ein besonderer Stromkreis, der links gezeichnet ist. s sind Sicherungen, R Regulierwider-

stände. Im Sekundärkreis des Induktoriums bedeuten c_1 und c_2 wie bisher die beiden Kondensatoren in der Brücke. Als zu untersuchender Kondensator c_1 ist hier ein Kabel gezeichnet, als Kondensator c_2 diente bei diesen Messungen der verstellbare Kondensator der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie. Rh ist der Stöpselrheostat von O. Wolff, der die Widerstände w_2 , w_3 und w_4 lieferte. E ist das Braunsche Elektrometer, Te das optische Telephon. Nachdem die Saite durch Verändern ihrer Spannung und die Maschine durch Verändern der Felderregung ihres Motors auf den Ton des optischen Telephons eingestimmt waren, wurde die Brücke zunächst mit dem Unterbrecherstrom¹⁾ eingestellt, die Empfindlichkeit der Einstellung ermittelt, hierauf die Wippe umgelegt, das Bild beobachtet und die Empfindlichkeit abermals bestimmt. Es genügt wohl, wenn ich ein Beispiel für diese Messungen anführe, die alle dasselbe Ergebnis hatten.

Kabel X (vgl. Tab. 7), alle drei Leiter wurden mit dem Punkte A , der Mantel mit dem Punkte D der Brücke verbunden.

$$\frac{n}{2\pi} = 50,1.$$

	E	c_2	w_4	w_3	Δw_3	w_2	Δw_2
Unterbrecherstrom	1400	$1,519 \cdot 10^{-3}$ M.F.	500	137,7	$< 0,1 \, \Omega$	31300	≈ 300
Maschinenstrom	1400	„	500	137,7	$< 0,1 \, \Omega$	31300	300

Zur Brückeneinstellung dienten w_2 und w_3 . Δw_2 und Δw_3 bedeuten die kleinste wahrnehmbare Änderung von w_2 und w_3 . Die Spannung, die hier und auch bei den im folgenden wiedergegebenen Messungen angegeben ist, ist die am Elektrometer abgelesene (Effektivwert), streng genommen also nicht die an c_1 herrschende. In Wirklichkeit ist jedoch der Spannungsabfall in w_3 vollständig vernachlässigbar.

Bei allen diesen vergleichenden Messungen blieb das Bild vollständig scharf. Obgleich also die Kurvenform der beiden Wechselspannungen in Anbetracht ihrer gänzlich verschiedenen Entstehungsweise bestimmt sehr verschieden war, zeigte sich

1) So will ich der Kürze halber den Wechselstrom nennen, der erhalten wurde, wenn die Primärwicklung des Induktoriums in der angegebenen Weise mit intermittierendem Strom beschickt wurde.

nicht die geringste Änderung der Brückeneinstellung. Es ist damit gleichzeitig auch bewiesen, daß eine Rückwirkung der Oberschwingungen auf den Verlust durch die Grundschwingung, die zwar nicht sehr wahrscheinlich, aber immerhin denkbar wäre, nicht stattfindet.

II. Spannungsversuche.

Bei einem Teil der Spannungsversuche wurde die in Fig. 4 dargestellte Versuchsanordnung benutzt. c_1 stellt den zu untersuchenden Kondensator vor, c_2 war bei diesen Versuchen durchweg der aus zwei Messingrohren hergestellte Luftkondensator. Daneben ist die Paraffinplatte zu dem selbsthergestellten Rheostaten mit ihren Quecksilbernäpfen zu sehen, die den

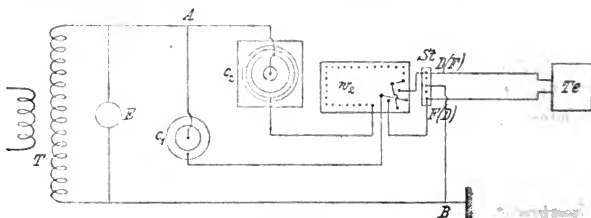


Fig. 4.

Widerstand w_2 lieferte. Auf ihr ist auch die bereits erwähnte Wippe dargestellt, die zur Vertauschung der Zweige AD und AF diente. St bedeutet den Stöpselrheostat, auf dem die Widerstände w_3 und w_4 im Werte von je 2000 Ohm hergestellt waren. Bei manchen Spannungsversuchen war die Anordnung auch so getroffen, daß der in Fig. 3 mit Rh bezeichnete Stöpselrheostat von O. Wolff zu dem selbsthergestellten Rheostaten hinzugefügt wurde, um mit ihm zusammen den Widerstand w_2 abzugeben; bei noch anderen Messungen lieferte Rh außer einem Teile von w_2 auch w_3 und w_4 , wobei dann natürlich der Stöpselrheostat St wegfiel. In einigen Fällen schließlich wurden alle drei Widerstände w_2 , w_3 und w_4 in ähnlicher Weise, wie dies in Fig. 3 gezeigt ist, dem Stöpselrheostaten Rh entnommen.

1. Als erstes Beispiel eines Spannungsversuches diene das folgende: Ein 40 cm langes Rohr aus Flintglas von 5 cm äußerem Durchmesser und 4—5 mm Wandstärke wurde an einem Ende zugeschmolzen, 8 cm hoch mit Quecksilber gefüllt und ebenso tief in Quecksilber eingetaucht. Auf jede dieser Quecksilberbelegungen wurde eine etwa 5 mm hohe Schicht von Paraffinöl gegossen. In die Quecksilberbelegungen tauchten die Zuleitungen und zwar so, daß sie das Glasrohr selbst nicht berührten. Dieser Kondensator wurde als c_1 in die Brücke gebracht. Die Resultate einer der an diesem Flintglasrohr angestellten Messungsreihen sind in Tab. 2 wiedergegeben.

Tabelle 2.

E	w_2	Δw_2
2000	51000	2500
3000	50000	2500
4000	51000	< 2500
5000	51000	< 2500
6000	51000	
7200	51000	1200
8000	51000	

c_2 blieb bei dieser Messungsreihe völlig konstant. Dasselbe gilt, wie die Tabelle zeigt, innerhalb der Grenzen der Einstellungsfehler auch für w_2 . Würde hier der Verlust z. B. proportional der 2,1^{ten} Potenz der Spannung wachsen, so dürfte w_2 , um bei 8000 Volt den Wert 51000 Ohm zu erreichen, bei 2000 Volt nur 44400 Ohm betragen, wie sich leicht berechnen läßt.

2. Diesem Beispiele soll nun ein anderes gegenübergestellt werden. Wie nach den bisher in der Literatur vorliegenden Versuchsergebnissen zu erwarten war, erhält man nämlich nicht in allen Fällen eine so völlige Unveränderlichkeit von w_2 beim Ändern der Spannung am untersuchten Kondensator. *Wohl die meisten Messungen, die ich an anderen Kondensatoren vornahm, ergaben für höhere Spannungen unzweifelhaft größere Werte von w_2 als für niedrigere.* Um diese Tatsache genauer untersuchen und feststellen zu können, ob die sehr naheliegende Vermutung, daß diese Zunahme von w_2 von der *Erwärmung*

des Dielektrikums herrühre, auf Wahrheit beruhe, stellte ich einen Kondensator her, der die erwähnte Erscheinung besonders stark zeigen mußte. Für seine Herstellung waren folgende Gesichtspunkte maßgebend: Das zu verwendende Dielektrikum sollte einen nicht allzu kleinen Verlust aufweisen; seine Dicke mußte möglichst gering sein; sie mußte dagegen an den Rändern der Belegungen möglichst groß gemacht werden, damit genügend hohe Spannungen erreicht werden konnten. (Natürlicherweise ist der in bezug auf das Durchschlagen gefährdetste Teil des Dielektrikums derjenige, der sich unter den Rändern der Belegungen befindet, an denen ja die elektrische Flächendichte ein Maximum besitzt; mehrere dünnwandige Reagensgläser, die ich untersuchte, wurden auch regelmäßig am Rande der Belegungen durchschlagen. Außerdem aber lassen sich auch bei Verwendung der mit Öl überschichteten Quecksilberbelegungen die Spitzenentladungen bei höheren Spannungen nicht mehr ganz unterdrücken, wenn die Dicke des Dielektrikums unter den Rändern allzu klein ist.)

Ein Kondensator, der alle diese Voraussetzungen erfüllte, war der folgendermaßen hergestellte: An einem Kapillarrohr (Thermometerrohr) blies ich ein Ende in eine sehr dünnwandige Kugel von 17,3 mm äußerem Durchmesser aus. Diese Kugel wurde mit Quecksilber soweit gefüllt, daß dasselbe bis in das Kapillarrohr (etwa 4 mm weit) hineinreichte. Ebenso tief wurde die Kugel in Quecksilber eingesenkt und die Zuleitung zur inneren Belegung durch einen in das Rohr eingeführten, die zur äußeren durch einen in das außen befindliche Quecksilber getauchten Draht bewerkstelligt. Beide Belegungen wurden auch hier mit Paraffinöl überschichtet. Es war so ein Kondensator gewonnen, der sich der Idealform eines Hochspannungskondensators, der des Kugelkondensators, soweit als irgend möglich, näherte. Die Länge der Belegungsänder und damit die Gefahr der Spitzenentladungen war auf das geringste mögliche Maß gebracht, und die vorhin aufgestellte Forderung der Verstärkung des Dielektrikums unter den Rändern der Belegungen war auch erfüllt.

Tab. 3 bezieht sich auf eine an diesem Kondensator durchgeführte Messungsreihe.

Tabelle 3.

E	w_2
1000	165 000
2000	167 000
3000	171 000
4000	177 000
5100	195 000

Bei allen Messungen an diesem Kondensator war deutlich folgende Beobachtung zu machen: Wenn die Spannung plötzlich geändert wurde, befand sich das Bild immer einige Minuten hindurch in einem Zustande der Veränderung, und zwar dauerte dieser länger, wenn die Spannung erniedrigt, als wenn sie erhöht worden war. Um diese Erscheinung genauer zu untersuchen, brachte ich die Brücke bei 5000 Volt zum Einstehen, öffnete den Strom und ließ die Brücke eine Viertelstunde lang stromlos stehen. Nach dieser Zeit wurde der Strom plötzlich wieder geschlossen, wobei die Spannung wie früher 5000 Volt betrug. Der Ausschlag am optischen Telephon war zuerst erheblich, ging jedoch im Laufe von etwa einer Minute auf Null zurück. Als hierauf die Spannung plötzlich auf 2000 Volt erniedrigt wurde, blieb das Bild zunächst vollkommen scharf, im Laufe einiger Minuten aber entstand ein Ausschlag. Diese Beobachtungen habe ich wiederholt in den verschiedensten Variationen und an verschiedenen Tagen ausgeführt. Das Ergebnis war immer dasselbe und ließ sich völlig unzweifelhaft feststellen.

Damit ist nachgewiesen, daß auch hier die Brückeneinstellung bei den verschiedenen Spannungen genau dieselbe und daß die bei den Messungen gefundene Zunahme von w_2 mit der Spannung auf eine Fehlerquelle zurückzuführen ist. Von dieser stand zunächst nur fest, daß sie eine gewisse Zeit brauchte, um voll zur Geltung zu kommen. Daß sie in einer Wärmewirkung bestand, war außerordentlich wahrscheinlich, und es war deshalb wünschenswert, festzustellen, in welcher Weise und in welchem Maße eine Temperaturerhöhung des Dielektrikums den Verlust beeinflussen würde.

Zu diesem Zwecke stellte ich folgenden Erwärmungs-

versuch an: Derselbe Thermometerkugel-Kondensator wurde in ein Ölbad (Paraffinöl) gebracht, das mit Hilfe einiger stromdurchflossener Drahtwindungen geheizt werden konnte. Die Temperatur des Ölbadess wurde durch ein eingesenktes Thermometer gemessen. Die Anordnung der Brücke wurde im übrigen unverändert gelassen. Nachdem der Kondensator und sein Ölbad eine Zeitlang sich selbst überlassen worden waren, damit alle Teile die Zimmertemperatur ($18,5^{\circ}\text{C.}$) annehmen konnten, wurde zunächst bei geöffnetem Heizstrom eine Messungsreihe bei verschiedenen Spannungen ausgeführt, die mit der in Tab. 3 wiedergegebenen übereinstimmte. Hierauf wurde die Spannung auf 3300 Volt eingestellt und unverändert gelassen und der Heizstrom geschlossen. Schon wenige Augenblicke nach dem Schließen des Heizstromes begann das Spaltbild im Spiegel des optischen Telephons unscharf zu werden. Die Temperatur des Ölbadess wurde nun während ungefähr einer Viertelstunde möglichst konstant auf 22° gehalten. Die nach Ablauf dieser Zeit ausgeführte Messung ergab:

$$w_3 = 10200 \Omega, \quad w_4 = 10000 \Omega, \quad w_2 = 197000 \Omega.$$

Als nunmehr die Temperatur des Ölbadess auf 24° erhöht wurde, ergab sich bei der nach 4 Min. vorgenommenen Messung:

$$w_3 = 10130 \Omega, \quad w_4 = 10000 \Omega, \quad w_2 = 218000 \Omega.$$

Zum Vergleich führe ich zwei von den vor Einschaltung der Heizung bei $18,5^{\circ}$ Ölbadtemperatur erhaltenen Messungsergebnissen an:

E	w_3	w_4	w_2
3300	10 300	10 000	172 000
5000	10 250	10 000	195 000

Die bei 22° Ölbadtemperatur erhaltenen Werte sowohl der Kapazität (w_3) wie auch des Verlustes (w_2) stimmen also sehr nahe mit jenen überein, die sich bei 5000 Volt ergeben haben. Eine überschlägliche Berechnung der bei 5000 Volt in dem untersuchten Kondensator in einer Minute entwickelten Wärmemenge ergibt 1,2 g-Cal., einen gar nicht so unerheblichen Betrag, wenn man die geringe Wärmekapazität der Thermometerkugelschale berücksichtigt, deren Volumen sich, eine Wandstärke von 0,2 mm vorausgesetzt, zu $0,18 \text{ cm}^3$ berechnet.

Ich glaube demnach die Ansicht aussprechen zu dürfen, daß auch im Falle dieser dünnwandigen Thermometerkugel der Verlust an sich das Quadratgesetz genau befolgt, d. h. daß auch hier w_2 bei allen Spannungen dasselbe ist und daß die bei zunehmender Spannung beobachtete Zunahme von w_2 und der Kapazität nur durch einen sekundären Einfluß, nämlich die Temperaturerhöhung verursacht ist, die das Dielektrikum infolge des in ihm stattfindenden Verlustes erfährt, daß diese Zunahme also keine Änderung mit der Spannung, sondern eine solche mit der Temperatur darstellt.

Dadurch erklärt es sich auch ohne weiteres, warum bei der im ersten Beispiel angeführten Messungsreihe an dem Flintglasrohr sich nicht die geringste Änderung von w_2 ergeben hat. Während nämlich die Wärmekapazität dieses Kondensators viele Male so groß war als im letzten Beispiele, betrug der Verlust bei gleicher Spannung, dem ja hier w_2 sehr nahe proportional ist, und damit auch die im Dielektrikum in derselben Zeit entwickelte Wärmemenge weniger als $\frac{1}{3}$ des an der Thermometerkugel beobachteten Betrages.

Noch von einem anderen Gesichtspunkte aus entbehrt vielleicht die hier beobachtete Zunahme des Verlustes im Glase bei kleinen Temperaturerhöhungen nicht des Interesses. Wie nämlich A. Wüllner und M. Wien¹⁾ gezeigt haben, weist auch die Leitfähigkeit des Glases schon bei kleinen Temperaturerhöhungen eine Zunahme auf, die Hand in Hand mit einer Zunahme der Dielektrizitätskonstante geht. Diese Analogie scheint direkt auf einen inneren Zusammenhang des im wechselnden elektrischen Felde auftretenden Verlustes mit der Leitfähigkeit hinzuweisen und kann deshalb wohl als eine Stütze der Anschauung betrachtet werden, daß der Verlust durch Leitungsvorgänge irgendwelcher Art verursacht ist.

Ich lasse noch ein Beispiel einer Messungsreihe folgen, bei der eine Zunahme von w_2 bei steigender Spannung stattfand und bei der sich diese Zunahme ebenfalls deutlich als durch die Temperatur- und nicht durch die Spannungszunahme verursacht ergab.

3. Ein Rohr aus Ebonit von 41 cm Länge, 16 cm äußerem

1) A. Wüllner u. M. Wien, Ann. d. Phys. 9. p. 1217. 1902.

Durchmesser und 2 mm Wandstärke wurde etwa 3 cm tief in einen Paraffinblock eingeschmolzen, an dem vorher eine 10 cm tiefe Nut von solchen Abmessungen ausgedreht worden war, daß an der Innen- und Außenseite des Ebonitrohres je ein ringförmiger Hohlraum von 1 cm Breite im Paraffinblock frei blieb. In diese Hohlräume wurde gleich hoch an der Innen- und Außenseite des Rohres Quecksilber und darüber Öl gefüllt. Die Ergebnisse einer der Messungsreihen, die hierbei angestellt wurden, sind in Tab. 4 enthalten.

Tabelle 4.

E	w_2	Δw_2
2300	240 000	5000
2800	240 000	
3600	240 000	
4600	247 000	
6000	252 000	
7400	265 000	

Auch hier ließ sich das allmähliche Zunehmen von w_2 beim Erhöhen und Abnehmen beim Erniedrigen der Spannung klar erkennen, das deutlich zeigt, daß w_2 sich nicht mit der Spannung, wohl aber mit der Temperatur ändert.

4. Wie aus dem Bisherigen wiederholt zu erkennen war, machte ich von dem Paraffin als Isolationsstoff in sehr ausgedehntem Maße Gebrauch. Dies war jedoch nur unter der Bedingung zulässig, daß das Paraffin nicht etwa selbst einen Verlust aufwies und dadurch eine neue Fehlerquelle mit sich brachte. Um nun zu erkennen, ob gegen die Anwendung des Paraffins als Isolationsmittel von diesem Gesichtspunkte aus wirklich nichts einzuwenden wäre, stellte ich einen Paraffinkondensator her. Die Belegungen in Form von drei je 1 mm starken Zinkblechplatten vom Formate 13.15 cm wurden mit je 3 mm Abstand voneinander vollständig in Paraffin eingeschmolzen. Das Paraffin, das ebenso wie das sonst verwendete ziemlich rein war, wurde filtriert und zur Vermeidung von Luftblasen in dünnen Schichten nach und nach aufgegossen. Der fertige Kondensator stellte eine etwa 15 mm dicke Paraffinplatte dar. Sobald die Kapazitätseinstellung ausgeführt war, blieb hier das Bild vollkommen scharf bis zur

Spannung von 4500 Volt. Darüber hinaus stellte sich das schon mehrfach erwähnte von den „Spitzenentladungen“ herührende Knistern ein, und schon bei 4800 Volt begann das Bild unscharf zu werden. Bei weiterem Steigern der Spannung ergab sich bei gleichzeitiger Zunahme des Knisterns und Zischens ein mit zunehmender Spannung immer größer werdender Ausschlag, der sich fortwährend in unregelmäßiger Weise änderte und dadurch jede Messung unmöglich machte. Es ist dies ein Beispiel für die schon hervorgehobene Tatsache, daß sich auch durch vollständiges Umhüllen der Belegungen mit dem Dielektrikum die Spitzenentladungen und der durch sie herbeigeführte Energieverlust bei höheren Spannungen nicht beseitigen lassen.

5. Genau dieselbe Erscheinung konnte in einer sehr großen Anzahl von anderen Fällen beobachtet werden. Ich will hier nur noch ein Beispiel anführen, welches zeigt, wie bei einem Dielektrikum mit an sich kleinem Verlust die Spitzenentladungen den Verlust vervielfachen, sobald die Spannung eine höhere ist. Ich wähle dazu eine von den Messungsreihen, die ich an Grissonkondensatorplatten angestellt habe. Bei diesen ist wie im Falle des Paraffinkondensators die Belegung, die hier eine kreisförmige Blechplatte ist, vom Dielektrikum vollständig umhüllt. Wie Tab. 5 zeigt, überflügelte hier der durch w_2 gemessene Verlust, der noch bei 2700 Volt nicht viel größer als bei Flintglas ist, bei 6000 Volt schon den bei der Thermometerkugel gefundenen. Die Begleiterscheinungen dieser Erhöhung von w_2 sind immer das Knistern und Zischen und die Unstetigkeit des Ausschlages, und schon dadurch ist bei der Beobachtung eine Verwechselung dieses Verlustes mit dem zu messenden Verlust unmöglich gemacht.

Tabelle 5.

E	w_2	Δw_2
2700	75 000	5000
4650	90 000	2500
6000	175 000	

6. Auch an den Kabeln wurden Spannungsversuche angestellt. Sie hatten alle dasselbe Ergebnis: w_2 blieb bis über

die Betriebsspannung hinaus völlig unverändert. Die Spannungsgrenze, von der an die durch den Verlust selbst verursachte Temperaturerhöhung des Dielektrikums eine merkliche Änderung von w_2 herbeiführt, liegt bei den untersuchten Kabeln wahrscheinlich weit oberhalb der Betriebsspannung.

Das Quadratgesetz ist also, solange die Temperatur konstant bleibt und keine merkliche Spitzenwirkung auftritt, bei allen untersuchten Dielektrizen mit aller Schärfe erfüllt.

Dadurch ist man aber bei Anwendung dieser Methode vollständig der Notwendigkeit enthoben, die Messungen bei hohen Spannungen vorzunehmen, wenn man den Verlust bestimmen will. Man mißt in der Brücke bei niedrigen Spannungen genau dasselbe wie bei hohen, ohne dabei die Schwierigkeiten in Kauf nehmen zu müssen, welche die Messung bei hohen Spannungen mit sich bringt. Man kann im Gegenteil bei niedrigen Spannungen durch Anwendung von Kondensatoren mit genügend großer Kapazität den Einfluß der Fehlerquellen beseitigen und deshalb auch quantitativ richtige Messungen ausführen. Da ferner die Empfindlichkeit der Einstellung bei Verwendung etwas größerer Kapazitäten auch bei niedrigen Spannungen sehr bedeutend gemacht werden kann, besitzt man in der Anwendung der Methode ein einfaches Mittel, über die Größe des Verlustes im Dielektrikum genauen Aufschluß zu bekommen. Über Messungen, bei denen hiervon Gebrauch gemacht wurde, ist im folgenden berichtet.

III. Quantitative Messungen.

Die Versuchsanordnung war bei allen diesen Messungen die durch Fig. 3 dargestellte. Zur Einstellung dienten hier durchweg w_2 und w_3 oder w_4 .

a) Kondensatoren.

Ich führe zunächst in Tab. 6 die Ergebnisse von einigen der Messungen an, die ich in dieser Anordnung an Kondensatoren angestellt habe. Die in dieser Tabelle angegebenen berechneten Werte wurden auf folgende Weise erhalten: Die Ermittlung der Kapazität c_1 des untersuchten Kondensators erfolgte auf Grund der Gleichung

$$c_1 = c_2 \frac{w_4}{w_3}.$$

Den Winkel ψ , auf den sich die beiden nächsten Spalten beziehen, erhält man aus den Daten der Brücke durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = n c_2 w_2,$$

da ja in den Brückenseiten AD und AF die Grundschwingungen des Stromes und der Spannung den gleichen Phasenunterschied untereinander besitzen.

Der in der letzten Kolonne angegebene Verlust bei 1000 Volt in Watt pro Mikrof. ist aus Gleichung (2') erhalten. Diese läßt sich nämlich auch schreiben

$$(2'') \quad \begin{cases} A = n \cdot n c_2 w_2 \cdot c_1 E^2 \\ \quad = n \operatorname{tg} \psi c_1 E^2. \end{cases}$$

Setzt man hierin $c_1 = 10^{-6}$ Farad, $E = 1000$ Volt, so erhält man die in der Tabelle enthaltenen Werte. Die Berechtigung zu diesem Rechnungsvorgange knüpft sich an die beiden Bedingungen, daß der Verlust bei derselben Schwingungszahl proportional der Kapazität und dem Quadrate der Spannung ist.

Die Dielektrika der drei Kondensatorentypen, auf die sich Tab. 6 bezieht, weisen, wie man sieht, durchweg kleine Verluste auf. Zu dem über den Glimmerkondensator mitgeteilten Versuchsergebnis ist zu bemerken, daß die einzelnen Ab-

Tabelle 6.

	Schwingungszahl $n/2\pi$	E	c_3 in Mikrof.	w_3	w_4	w_2	Δw_2	c_1 in Mikrof.	$\operatorname{tg} \psi$	ψ	Verlust bei 1000 Volt in Watt pro Mikrof.
Präzisionsglimmerkondensator von Siemens & Halske	85,6		$2,02 \cdot 10^{-3}$	103,0	500	6600	250	$9,81 \cdot 10^{-3}$	0,00717 ₆	$0^\circ 24' 40''$	3,86 ₆
	86,1	1500	$1,51_9 \cdot 10^{-3}$	302,1	200	4500	330	$1,00_6 \cdot 10^{-3}$	0,00369 ₇	0 12 40	1,99 ₉
Leidener Flasche aus Flintglas	86,1	1500	"	577,8	500	12200	330	$1,31_4 \cdot 10^{-3}$	0,0100 ₂	0 34 30	5,42 ₂
11 Grissonkondensatorplatten	50,1	1200	"	572,4	"	23600	1000	$1,32_7 \cdot 10^{-3}$	0,0112 ₆	0 38 50	3,55 ₂

teilungen dieses Kondensators sehr verschiedenen Verlust zeigten; die angeführte Messung bezieht sich auf jene seiner Abteilungen, die den größten Verlust von allen aufwies. Ihre Kapazität war mit 0,01 Mikrof. angegeben. Ganz außerordentlich klein ist der Verlust der Flintglasflasche. Diese Glasart zeigte, von Paraffin abgesehen, überhaupt den kleinsten Verlust von allen festen Körpern, die ich untersuchen konnte. Die Ergebnisse der beiden mit den Grissonkondensatorplatten bei 86 und 50 Schwingungen angestellten Versuche sind insofern nicht genau vergleichbar, als möglicherweise eine oder zwei von den Platten in beiden Fällen nicht dieselben waren.

b) Kabel.

Viel ausgedehntere Anwendung als die eben beschriebene habe ich von der Methode zur Untersuchung der Kabel gemacht, worüber an anderer Stelle berichtet werden soll. Hier seien nur kurz die Ergebnisse dieser Messungen angeführt:

1. Das Quadratgesetz war, wie erwähnt, bei den untersuchten Kabeln bis über die Betriebsspannung hinaus genau erfüllt.

2. Messungen in verschiedenen Gruppierungen der Leiter eines und desselben Kabels (den Mantel inbegriffen) ergaben die Proportionalität des Verlustes mit der Kapazität des untersuchten Kondensators.

3. Der Verlust im Dielektrikum der untersuchten Kabel ist klein. Wie aus Tab. 7 zu ersehen ist, in der Resultate je einer Messung an jedem Kabel wiedergegeben sind, weist sogar eines der Kabel (III) einen nur um wenig größeren Verlust als Flintglas auf.

4. *Zusammenhang des Verlustes in den Kabeln mit der Schwingungszahl.* Direkt miteinander in dieser Hinsicht vergleichbar sind nur die an den Kabeln VIII, IX und X vorgenommenen Versuche. Zwischen den Messungen mit den beiden Schwingungszahlen lag bei diesen drei Kabeln nur ein Zeitraum von 1—2 Wochen, und die Messungen mit beiden Schwingungszahlen wurden unter denselben Verhältnissen vorgenommen. Bei den anderen Kabeln wurde die eine Messung (86 Schwingungen) im Winter im geheizten Zimmer ausgeführt, während die andere in die warme Jahreszeit fällt, in welcher

Tabelle 7.

Nr.	Betriebs- spannung in Volt	Kupfer- querschnitt in mm ²	Länge in m	Isolationsart	$n = 86$		$n = 50$		Hergestellt durch
					$\operatorname{tg} \psi$	ψ	$\operatorname{tg} \psi$	ψ	
I	20000	3.32	5,4	Imprägn. Papier	0,02301	1°19' 5"	0,03920	2°14' 41"	Allg. Elektrizitäts- Gesellsch., Berlin Kabelwerk Oberspre
II	11000	3.95	5,3	"	0,01619	0 55 39	0,01829	1 2 52	
III	10000	3.70	5,1	Gummi u. impr. Jute	0,003821	0 13 8	0,005081	0 17 28	
IV	3000	3.16	11	Imprägn. Papier	0,007436	0°25' 34"	0,009994	0°34' 21"	Siemens-Schuckert- Werke, G. m. b. H. Kabelwerk Westend b. Berlin
V	5000	3.10	16	"	0,008546	0 29 23	0,009610	0 33 2	
VI	700	3.50	6	"	0,009779	0 33 37	0,009659	0 33 12	
VII	700	2.25	6	"	0,010765	0 37 0	0,011763	0 40 26	
VIII	700	2.16	7	"	0,016271	0 55 56	0,016592	0 57 2	Felten & Guilleaume- Lahmeyerwerke, A.-G. Carlswerk, Mülheim a. Rhein
IX	5000	4.25	20	Imprägn. Papier	0,014956	0°51' 25"	0,015109	0°51' 56"	
X	5000	3.25	20	"	0,015285	0 52 32	0,014966	0 51 27	

alle Kabel einen etwas größeren Verlust zeigten. Vergleicht man nun bei den drei Kabeln VIII, IX und X die Werte für ψ , bez. $\operatorname{tg} \psi$ bei beiden Schwingungszahlen miteinander, so findet man sie bis auf 2 Proz. und weniger einander gleich. Eine ähnliche, wenn auch aus dem angegebenen Grunde nicht durchweg so genaue Übereinstimmung zeigen alle anderen Kabel mit Ausnahme des Kabels I. Bildet man bei diesem für jede Schwingungszahl das Produkt $n \operatorname{tg} \psi$, so ergibt sich dieses Produkt nahezu gleich für beide Schwingungszahlen.

Was dies bedeutet, ist sofort aus Gleichung (2'') zu erkennen. Bleibt das Produkt $n \operatorname{tg} \psi$ konstant, so ist der Verlust unabhängig von der Schwingungszahl. Das Dielektrikum des Kabels I verhält sich also in bezug auf den Verlust wie ein Ohmscher Widerstand. Der Verlust in ihm ist unabhängig von der Schwingungszahl und nur durch die Spannung bestimmt, er ist wahrscheinlich vorherrschend durch Leitung verursacht. Ganz anders verhalten sich aber die übrigen Kabel. Bei ihnen ist bei den beiden von mir benutzten Schwingungszahlen ψ nahezu konstant geblieben, d. h. nach Gleichung (2'') der Verlust ist bei ihnen bei gleicher Kapazität und Spannung proportional der Schwingungszahl.

Natürlich läßt sich auf Grund der Messungen bei diesen beiden Schwingungszahlen noch kein abschließendes Urteil über den Zusammenhang des Verlustes mit der Schwingungszahl fällen. Um diesen genauer zu untersuchen, müßte man einerseits mehrere Schwingungszahlen heranziehen, andererseits die Messungen so einrichten, daß ihre Ergebnisse direkt miteinander vergleichbar sind. Immerhin ergibt sich daraus eine ziemlich einfache für die technisch gebräuchlichen Schwingungszahlen gewiß genügend genau gültige Beziehung für den Verlust in Kabeln ohne merkliche Leitung. Es ist, wenn mit ν die Schwingungszahl pro Sekunde und mit c die Kapazität des Kabels bezeichnet wird:

$$A = k \cdot \nu \cdot c \cdot E^2, \text{ worin } k = 2 \pi \operatorname{tg} \psi.$$

Es kann also die Phasenverschiebung ψ für ein bestimmtes Dielektrikum als eine Materialkonstante im Bereich der technisch üblichen Schwingungszahlen betrachtet werden. $2 \pi \operatorname{tg} \psi$

wäre der während eines Zyklus in einem Kondensator von der Kapazität 1 bei der Spannung 1 auftretende Verlust.

Das Kabel II wurde auch noch rechnerisch daraufhin untersucht, welche Rolle der Verlust in seinem Dielektrikum bei der Fortpflanzung von Wechselströmen längs seiner Leiter spielt. Eine wesentliche Beeinflussung der am Kabel auftretenden Spannungs-, Strom- und Phasenverhältnisse ließ sich nicht nachweisen, doch ergab die Rechnung ein nicht uninteressantes Resultat in bezug auf die im unbelasteten, also am Ende offenen Kabel verloren gehende Energie: Bei kleineren und mittleren Längen des Kabels bildet der Verlust im Dielektrikum den weitaus größten Teil der im offenen Kabel verbrauchten Leistung, und erst bei sehr großen Längen tritt er hinter dem Stromwärmeverlust in den Kupferleitern zurück. Er beträgt z. B. noch bei 50 km Länge des Kabels fast das Doppelte und erst bei 200 km Länge etwa ein Zehntel des Verlustes im Kupfer.

Um die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen kurz zusammenzufassen, führe ich an:

1. Das Quadratgesetz ist bei allen untersuchten Dielektrizis (verschiedenen Glasarten, Ebonit, Dielektrikum der Grissonkondensatorplatten, imprägniertem Papier, Gummi, imprägnierter Jute) mit aller Schärfe erfüllt, sofern es wirklich nur die Spannung ist, die bei den Versuchen verändert wird.

2. Scheinbare Abweichungen vom Quadratgesetz ergeben sich, sobald noch eine andere Größe, unter deren Einfluß der Verlust steht, z. B. die Temperatur, verändert wird, und zwar nimmt der Verlust in den daraufhin untersuchten Dielektrizis Glas und Ebonit schon bei kleinen Temperaturerhöhungen des Dielektrikums merklich zu.

3. Eine weitere scheinbare Abweichung vom Quadratgesetze weist der Verlust in einem Kondensator bei hohen Spannungen dann auf, wenn dieser so beschaffen ist, daß „Spitzenentladungen“ an ihm auftreten. In diesem Falle wächst der Spitzenentladungsverlust, der erheblich schneller als mit dem Quadrate der Spannung zunimmt, bei hohen Spannungen bald so an, daß der im Dielektrikum selbst ver-

loren gehende Energiebetrag im Vergleich zu ihm fast gar nicht mehr in Betracht kommt.

4. Der Energieverlust im Dielektrikum ist proportional der Kapazität und kann bei den Kabeln im Bereiche der in der Technik üblichen Schwingungszahlen als proportional der Schwingungszahl angesehen werden.

5. Der Betrag des Energieverlustes weist, obgleich nur Dielektrika mit verhältnismäßig kleinem Verlust ausgewählt worden sind, ziemlich große Unterschiede bei den verschiedenen untersuchten Stoffen auf. Insbesondere zeigte sich bei Glas bedeutende Verschiedenheit des Verlustes je nach der Glasart. Den geringsten Verlust unter allen untersuchten festen Körpern, von Paraffin abgesehen, ergab Flintglas, und nur wenig größer war der des mit Gummi und imprägnierter Jute isolierten Kabels.

6. Infolge der genauen Erfüllung des Quadratgesetzes bleibt die Größe, durch die bei der hier benutzten Methode der Verlust gemessen wird, bei allen Spannungen dieselbe, und es fällt deshalb jede Veranlassung fort, die Messungen bei hohen Spannungen vorzunehmen. Da sich schon an Kapazitäten von 0,001 Mikrof. aufwärts auch bei verhältnismäßig niedrigen Spannungen genaue Verlustmessungen anstellen lassen, bietet die Methode ein bequemes Mittel zur Bestimmung des Energieverlustes im Dielektrikum. Bei Kabeln insbesondere lassen sich schon an Stücken von wenigen Metern Länge bei 1100—1500 Volt weitaus genauere Messungen ausführen, als dies bei den bisher benutzten Methoden bei Längen von mehreren hundert Metern und viel höheren Spannungen möglich ist.

Danzig, Physik. Institut der Technischen Hochschule,
Juni 1906.

(Eingegangen 28. Februar 1907.)

5. *Interferenzversuche mit freien Hertzschen Wellen; von Franz Kiebitz.*

Inhalt: Einleitung p. 943. — Diskussion eines allgemeinen Falles von $2n$ Antennen p. 944. A. Experimentelle Anordnung für zwei Antennen p. 946. 1. Primärkreis p. 947. 2. Sekundärleitung p. 948. 3. Antennenschaltung p. 948. 4. Empfänger p. 951. 5. Gleiche Amplituden p. 952. 6. Vielfachantennen p. 954. 7. Zwei synchrone Antennen p. 955. B. Beobachtungen in großem Abstand im Fall von sechs Antennen p. 956. 1. Diskussion der Strahlung von sechs Antennen p. 956. 2. Das benutzte strahlende System p. 961. 3. Primärkreis p. 962. 4. Kohäreranordnung p. 963. 5. Widerstandsmeßvorrichtung p. 965. 6. Strahlung des Primärkreises p. 968. 7. Resonanz zwischen Sender und Empfänger p. 968. 8. Interferenz p. 970. — Hauptresultat p. 972.

Einleitung.

Durch Interferenz eines einfallenden und eines reflektierten Wellenzuges erhielt Hertz stehende elektrische Wellen in Luft. Sarasin und de la Rive¹⁾ haben in großem Maßstab Versuche über stehende Hertzsche Wellen angestellt, um experimentell zu erweisen, daß sich elektrische Wellen in Luft mit derselben Geschwindigkeit ausbreiten, mit der sie sich längs Drähten fortpflanzen. Ferner hat V. von Lang²⁾ eine der Quinckeschen Interferenzröhre analoge Anordnung beschrieben, die gestattet, Dielektrizitätskonstanten durch Interferenz zweier Züge freier elektrischer Wellen zu messen. Rubens³⁾ hat eine Anzahl von Demonstrationsversuchen über diesen Gegenstand beschrieben.

1) Ed. Sarasin u. L. de la Rive, Arch. d. Sciences phys. et nat. 29. April u. Mai 1903. p. 358 u. 441.

2) V. von Lang, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 104. Abt. IIa. Okt. 1895; 105. Abt. IIa. April 1906.

3) H. Rubens, Zeitschr. phys.-chem. Unterr. 10. p. 239. 1897.

Bei diesen Versuchen wurden stets zwei Wellen zur Interferenz gebracht, die von demselben Sender ausgingen, also sicher kohärent waren. Braun hat die Bedeutung gleichzeitiger phasenverschobener Schwingungen in mehreren Sendern für das Problem der gerichteten drahtlosen Telegraphie erörtert¹⁾ und selbst Methoden angegeben²⁾, um Phasenverschiebungen herzustellen und zu messen bei Wechselströmen von 10^6 Wechseln pro Sekunde. Dabei traten störend mehrere Schwingungen infolge der engen Koppelung auf. Von Mandelstam u. Papalexi³⁾ ist eine verbesserte Methode ausgearbeitet worden, bei der die Schwingungen reinere Sinusform haben. Diese Methode hat Braun⁴⁾ bei seinen Versuchen über gerichtete drahtlose Telegraphie benutzt.

In der vorliegenden Abhandlung sind Versuche beschrieben, welche bezwecken, Interferenzen nachzuweisen an kleinen Hertzschen Wellen, die von mehreren Sendern gleichzeitig ausgestrahlt werden.

Es ist nach dem Huyghensschen Prinzip zu erwarten, daß sich einfache Erscheinungen ergeben, falls die benutzten Sender gleichzeitig und mit gleicher Periode, gleicher Amplitude und gleicher Schwingungsebene schwingen, in bestimmten Abständen aufgestellt sind und bestimmte Phasendifferenzen haben.

Diskussion eines allgemeinen Falles von $2n$ Antennen.

Ein einfach zu übersehender Fall, der in den beschriebenen Versuchen verwirklicht wurde, besteht darin, daß eine gerade Anzahl ($2n$) gleich langer, geradliniger Sender (Antennen) Wellen von gleicher Wellenlänge (λ) ausstrahlten. Sie wurden in Abständen von $\lambda/2$ senkrecht und in einer Ebene aufgestellt; in ihnen wurden elektrische Schwingungen erzwungen, deren Phasen um $\lambda/2$ verschoben waren. In einem bestimmten Moment sollen also die Ladungen in der aus der Fig. 1 er-

1) F. Braun, Neuere Methoden u. Ziele d. drahtlosen Telegraphie. Vortrag, gehalten in der Schiffsbau techn. Gesellsch. Julius Springer, Berlin 1904.

2) F. Braun, Physik. Zeitschr. 5. p. 198. 1904.

3) L. Mandelstam u. L. Papalexi, Physik. Zeitschr. 7. p. 303. 1906.

4) F. Braun, Electrician 57. p. 224 u. 244. 1906.

sichtlichen Weise auf dem Sendesystem verteilt sein (in der Figur ist $n = 2$ gewählt).

Vorausgesetzt, daß sich ein solcher Schwingungszustand verwirklichen läßt, erkennt man folgendes, wenn man das Schicksal der etwa vom ersten Sender ausgehenden Welle verfolgt auf ihrem Wege in der Richtung von links nach rechts in der Zeichenebene: Nach einer halben Schwingungsdauer erreicht sie die zweite Antenne, die während dieser Zeit ihre Phase um $\lambda/2$ geändert hat, so daß die von ihr ausgestrahlte Welle die von der ersten kommende unterstützt; dies wiederholt sich an jeder folgenden Antenne, und es zeigt sich, daß in der Richtung, in der man die Antennen hintereinander erblickt, die Schwingungen der

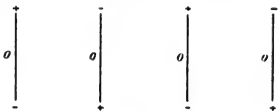


Fig. 1.

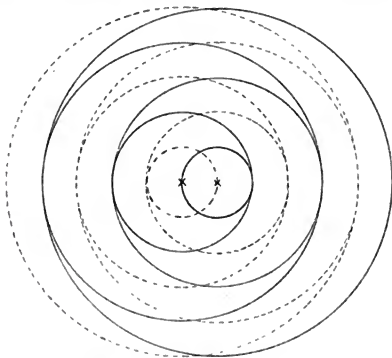


Fig. 2. Horizontalebene.

einzelnen sich addieren. In der Richtung senkrecht dazu, in der man die Antennen nebeneinander sieht, subtrahieren sich die Wirkungen, so daß bei einer geraden Anzahl von Antennen keine Strahlung wahrzunehmen ist, weil dort jeder Punkt gleichzeitig von ebensovielen Wellen der einen wie der entgegengesetzten Phase getroffen wird.

Die Figg. 2 und 3 sollen dies verdeutlichen. Sie beziehen sich auf zwei bez. sechs Antennen, die senkrecht zur Zeichenebene zu denken sind und sie in den durch Kreuze bezeichneten Punkten durchstoßen. Von diesen Punkten breiten sich die

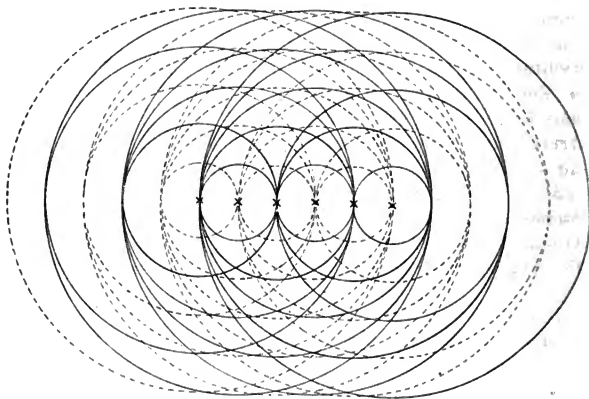


Fig. 3. Horizontalebene.

Schwingungen kreisförmig aus, und zwar ist die geforderte Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge dadurch gekennzeichnet, daß die positive und die negative Maximalamplitude durch ausgezogene und gestrichelte Linien unterschieden sind.

Die Übereinanderlagerung ergibt das aus der soeben angestellten Überlegung folgende Bild. In der Richtung der Antennen fallen alle ausgezogenen Kreise unter sich zusammen und ebenso alle gestrichelten; in der dazu senkrechten Mittellinie trifft jedoch jeder Wellenberg auf ein Wellental.

A. Experimentelle Anordnung für zwei Antennen.

Längs Drähten pflanzen sich elektrische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit fort. Es erscheint darum möglich, ein System von Antennen, wie es Fig. 1 zeigt, dadurch zum Schwingen zu erregen, daß man es mit stehenden Drahtwellen koppelt.

1. Primärkreis.

Für die zunächst zu beschreibenden Versuche wurden geeignete Drahtwellen erzeugt in einem System von zwei parallelen Drähten, das magnetisch gekoppelt war mit folgendem primären Schwingungskreis (Fig. 4). Ein Messingdraht von 4 mm Dicke und 10 cm Länge wurde zum Kreise gebogen; die Enden waren halbkugelig gefeilt und $\frac{1}{2}$ bis 1 mm genähert; sie sollten die Funkenstrecke bilden und enthielten je ein 1 mm weit gebohrtes Loch für die Zuleitungsdrähte von der Sekundärspule eines Teslatransformators.

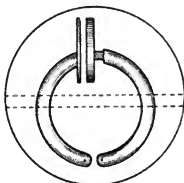


Fig. 4. Horizontal-ebene.

Der Funkenstrecke gegenüber war der Messingring aufgeschnitten und trug einen kleinen Kondensator aus zwei parallelen kreisrunden Messingscheiben von 18 mm Durchmesser; die eine davon war 1 mm dick und an den einen Halbring angelötet; die andere war $2\frac{1}{2}$ mm dick; auf ihrer Rückseite war $1\frac{1}{2}$ mm tief Gewinde von 0,5 mm Ganghöhe eingeschnitten, während in das Ende der zweiten Ringhälfte mehrere Millimeter Schraube von der gleichen Ganghöhe geschnitten waren. Man konnte so durch Drehen der dicken Scheibe ihren Abstand vor der dünnen und damit die Kapazität des Kondensators mikrometrisch verändern. Das Drehen geschah mit Hilfe eines Stiftes, der in kleine Löcher im Rande der Scheibe gesteckt werden konnte.

Die Ebene dieses primären Schwingungskreises war horizontal; seine beiden Hälften waren in einen Ebonitstreifen (in der Figur punktiert angedeutet) fest eingeklemmt, der seinerseits mit Reibung in einer Kristallisationsschale von $4\frac{1}{2}$ cm Weite und $3\frac{1}{2}$ cm Höhe gehalten wurde. Die Schale war mit Petroleum gefüllt.

Dies war der Primärkreis; er wurde mit Teslastrom erzeugt. Der benutzte Teslatransformator war seitlich aufgestellt und wurde gespeist mit einem größeren Induktorium, das in der Regel mit 12 Volt und einem Klingelfusschen Quecksilber-Turbinenunterbrecher betrieben wurde.

2. Sekundärleitung.

Die sekundäre Leitung bestand aus zwei in 5 cm Abstand in einer horizontalen Ebene ausgespannten Messingdrähten von 1 mm Dicke. Zwischen den Drähten stand das Glas mit dem Primärkreis, so daß die beiden Systeme magnetisch gekoppelt waren. Die Größe der Koppelung ließ sich durch Heben und Senken des Primärkreises verändern. Die ganze Anordnung wurde durch Siegellackstangen und Glasröhren in der Mitte des $6\frac{1}{2}$ m langen und 4 m breiten Zimmers gehalten, aus dem alle unnötigen Metallgegenstände (Gasarm) entfernt waren.

Durch Drahtbügel, die über die Paralleldrahtleitung gelegt wurden, konnten in bekannter Weise bei geeignetem Abstände der Bügel intensive stehende Drahtwellen erzeugt werden. Sie wurden beobachtet mit einer Warburgschen Röhre mit Helium-Kaliumfüllung von 5 mm Druck nach Dorn¹⁾, die in den Knoten der Potentialschwankung dunkel blieb, in der Umgebung der Potentialbäuche jedoch so intensiv leuchtete, daß bei gedämpftem Tageslicht beobachtet werden konnte.

Der Abstand zweier Knoten und Bäuche beträgt bei einer derartigen Rechtecksleitung eine halbe Wellenlänge. Es zeigte sich, daß mit dem Primärkreis der Figur die Wellen zwischen 80 cm (bei größtmöglichem Abstände der Kondensatorscheiben) und 130 cm ganzer Wellenlänge (wenn die Scheiben so nahe waren, daß soeben noch keine Funken zwischen ihnen übergingen) eingestellt werden konnten.

3. Antennenschaltung.

Es kam nun darauf an, in den Strombäuchen oder -knoten durch geeignete magnetische oder elektrische Koppelung abgestimmte strahlende Gebilde zum Mitschwingen zu erregen, um das Schema der Fig. 1 zu verwirklichen. Von einer Anzahl von Möglichkeiten, die zu diesem Zwecke erprobt wurden, erwies sich die folgende als günstig:

In der Ebene des Primärkreises der Fig. 4 und symmetrisch zu ihm wurden zwei frei endigende parallele Messingdrähte I und II von 100 cm Länge und 1 mm Dicke in 5 cm Abstand in der aus Fig. 5 ersichtlichen Weise ausgespannt.

1) E. Dorn, Ann. d. Phys. 16. p. 784. 1905.

Sodann wurde der Funkenstrom eingeleitet und die Heliumröhre an einem Ende 0 oder 100 angelegt; der Plattenabstand im Primärkreis wurde durch Drehen der dicken Scheibe so lange verstellt, bis hellstes Leuchten der Röhre eintrat.

Dann war Resonanz vorhanden zwischen dem Primärkreis und der ersten Oberschwingung der Sekundärleitung, die also nach dem in der Fig. 5 über der Anordnung gezeichneten

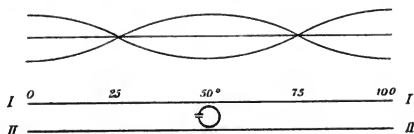


Fig. 5. Horizontalebene.

Schema schwang; in der Tat leuchtete die Heliumröhre nur in der Umgebung der Stellen 0, 50 und 100, während sie bei 25 und 75 dunkel blieb. In diesen beiden Knoten des Potentials, wo also Kapazitätsänderungen die Schwingungsdauer nicht beeinflussen, waren auch die Drähte mit Siegellackstangen gehalten.

Über die Schärfe der Resonanz und ihre Einstellung ist zu bemerken, daß bei der schwachen magnetischen Koppelung immer nur eine Welle zu beobachten war. Berührte die Heliumröhre etwa bei 0 die Drähte, so leuchtete sie sehr stark, und man konnte die dicke Scheibe in einem Bereich von fast 360° drehen (entsprechend einer Änderung des Plattenabstandes von 0,5 mm), ohne daß das Leuchten ganz aufhörte. Es wurde auf hellstes Leuchten eingestellt, und nun die Röhre von den Drahtenden soweit entfernt — um 2 bis 3 cm —, daß im ganz verdunkelten Zimmer nur noch ein schwaches Leuchten zu erkennen war. Bei diesem Abstand der Heliumröhre wurde die Einstellung des Kondensators wieder bis zum stärksten Leuchten korrigiert und allmählich die Röhre soweit entfernt, daß ihr schwaches Leuchten aufhörte, wenn die dicke Platte um 15° gedreht, der Plattenabstand also um 0,02 mm geändert wurde. Bei diesem Verfahren ist auch der störende Einfluß der Kapazität der stark leuchtenden Röhre vermieden, welche die Länge dieser kleinen Wellen um 6 cm zu klein er-

scheinen lassen kann, wie durch besondere Versuche festgestellt wurde.¹⁾

Antennen wurden in folgender Weise angebracht: In den Potentialknoten 25 und 75 wurde der Draht I durchschnitten und an den entstandenen Enden Drähte von der Länge $\lambda/4 = 25$ cm senkrecht nach oben und unten geführt, d. h. der Draht I wurde ersetzt durch das in Fig. 6 dargestellte System, während der Primärkreis und der Draht II (Fig. 5) unverändert blieben.

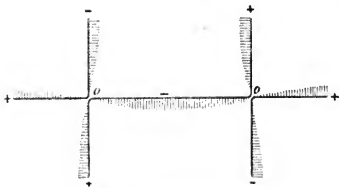


Fig. 6. Vertikalebene.

Auf diese Weise waren die in dem Drahte I induzierten Wellen aus der wenig strahlenden Parallel-drahtleitung in den

Stellen der maximalen Stromschwankungen in resonanzfähige strahlende Gebilde (geradlinige Erreger) abgeleitet, die den Vorteil hatten, keine dämpfende Funkenstrecke zu besitzen. Wenn das System in Schwingungen versetzt werden konnte, so mußte für einen bestimmten Moment die Ladungsverteilung die in Fig. 6 angedeutete sein, d. h. es mußte der Fall der Fig. 1 für zwei geradlinige Erreger verwirklicht sein.

In der Tat stellte sich eine derartige Schwingung ein, was an einem lebhaften Leuchten der Heliumröhre an den erwarteten Potentialbäuchen und Nichtleuchten in den Potentialknoten zu erkennen war.

Die gegenseitige Beeinflussung der beiden Antennen kann im vorliegenden Falle nicht störend wirken, sondern nur günstig, d. h. die Dämpfung verkleinernd. Wenn eine Antenne strahlt, so wird ihre Schwingung wesentlich nur wegen der durch Strahlung sich in dem Raum ausbreitenden Energie gedämpft sein, aus denselben Gründen wie die Schwingungen in einer Antenne bei Brauns System der drahtlosen Telegraphie mit induktiver Koppelung. In der zweiten Antenne würde aber die von der ersten ausgestrahlte Welle eine Schwingung indu-

1) Vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. 9, p. 298. 1902.

zieren, die nach Periode und Phase übereinstimmt mit der durch die Rechtecksleitung erzwungenen.

In dem Raume zwischen beiden Antennen kann sich also eine stehende Luftwelle ausbilden. Dies ist nicht der Fall bei einer Anordnung, die weiter unten erwähnt wird, und bei der darum die Antennen sich nicht in günstigem Sinne gegenseitig beeinflussen können (p. 955).

4. Empfänger.

Es wurde nun das Feld des beschriebenen Sendesystems mit dem in Fig. 7 gezeichneten Empfänger untersucht. Ein Holzstativ, das im Zimmer herumgetragen werden kann, trägt einen horizontalen Glasarm, an dessen äußerem Ende mit einem Faden festgebunden eine Heliumröhre hängt; sie hat die Form einer Plückerschen Spektralröhre; am unteren Ende ist als Elektrode ein $2\frac{1}{2}$ cm langer Platindraht eingeschmolzen, und an diesen wurde mit einer Öse ein 1 mm dicker Kupferdraht gehängt. War dieser Draht $44\frac{1}{2}$ cm lang, so kam die Röhre in der Umgebung des Sendesystems zu lebhaftem Leuchten.

Man sollte erwarten, daß der Draht im Resonanzfalle die Länge $\lambda/2 = 50$ cm haben sollte. Die Abweichung dürfte sich erklären aus der Kapazität des Elektroden drahtes und des leuchtenden Gasinhaltes der Röhre.

Mit diesem Empfänger war jedoch kein deutlicher Unterschied festzustellen für die Stärke der Ausstrahlung in verschiedenen Richtungen. Der Grund dafür wurde darin erkannt, daß die Bedingung gleicher Amplituden für die beiden geradlinigen Sender nicht erfüllt war. Man konnte auch sehen, daß eine Leuchtröhre an den freien Enden des 1 m langen Mittelstückes des Drahtsystems der Fig. 6 erheblich stärker leuchtete als an den Enden der 50 cm langen Seitenstücke.

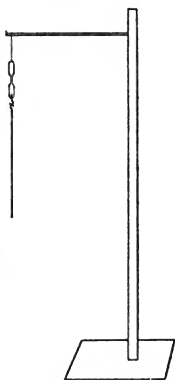


Fig. 7.

5. Gleiche Amplituden.

Es gelang, diesen Übelstand in folgender Weise zu vermeiden: In $2\frac{1}{2}$ cm Entfernung von den Potentialknoten, also

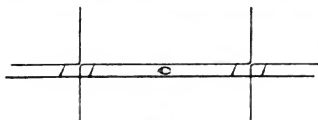


Fig. 8.

in den Punkten $22\frac{1}{2}$, $27\frac{1}{2}$, $72\frac{1}{2}$, $77\frac{1}{2}$ der Fig. 5 wurden die Drähte I und II (I trug bereits die Antennen) durch 5 cm lange Drahtstücke miteinander verbunden, die angelötet

wurden, so daß nunmehr das in Fig. 8 wiedergegebene Sendesystem entstand.

Wenn dieses System noch durch 1 m lange Wellen zu schwach gedämpftem Schwingen angeregt werden konnte, so mußten in den Ecken der beiden Quadrate von 5 cm Seitenlänge gleiche Amplituden herrschen, und in den Mitten sämtlicher Quadratseiten sich Potentialknoten ausbilden, weil eine andere Verteilung des Schwingungszustandes nicht möglich wäre, ohne daß sich in irgend welchen Teilen des Systems Ladungen dauernd stauen.

Tatsächlich zeigte das System, wenn es in derselben Weise erregt wurde wie bisher, lebhaftes Leuchten der Heliumröhre an allen freien Drahtenden, auch wenn die Mitten der Quadratseiten mit einem Metallstab berührt wurden, während das Leuchten aufhörte, wenn die Ecken der Quadrate berührt wurden, ein Zeichen dafür, daß sich der erwartete Schwingungszustand herstellte.

Die Umgebung dieses Sendesystems wurde mit dem Resonator der Fig. 7 untersucht. Er sprach noch deutlich an, d. h. die Röhre kam im dunklen Zimmer noch zu sichtbarem Leuchten, wenn der Resonator in einer Entfernung von 1,70 m vom Primärkreis — also bei 1,20 m kürzestem Abstand vom Sendesystem — und in der Richtung aufgestellt war, in der die beiden Antennen hintereinander erscheinen; dagegen konnte man den Empfänger in der Richtung senkrecht dazu dem Sendesystem auf 20 cm nähern, ohne daß die Röhre dadurch zum Leuchten kam.

Im letzten Falle war es notwendig, sehr genau in der

Mittelebene zwischen beiden Antennen zu beobachten, und das ist erklärlich, weil in diesen Entfernungen, die viel kleiner sind als der Abstand der beiden Antennen voneinander, die Strahlung der einen Antenne ohne Rücksicht auf die Phase die der andern an Intensität erheblich überwiegt, sobald man sich aus der Mittelebene entfernt. Übrigens sprach der Empfänger auf den wenig strahlenden Primärkreis allein — wenn also das ganze Sendesystem fortgenommen war — noch in 15 cm Abstand im ganzen Umkreis an.

Eine derartige Wirkung ist auch von Paetzold¹⁾ beobachtet worden und gedeutet als eine von dem benachbarten geradlinigen Leiter verursachte Drehung der Schwingungsebene der vom Primärkreis ausgehenden Welle.

Wurde die Sekundärleitung ohne Antennen erregt, so leuchtete die Empfängerröhre ebenfalls in 15 cm Abstand vom Primärkreis, außerdem an den Enden der Drähte I und II, aber nur in Abständen von höchstens 2 cm; dann wurden aber auch Büschelentladungen an den Drahtenden sichtbar.

Dadurch ist erwiesen, daß das System der Fig. 8 zwei kohärente Wellenzüge ausstrahlt, die sich in der Symmetrieebene gegenseitig vernichten.

In Fig. 9 ist das Gebiet dargestellt, in dem der Resonator ansprach. Die Zeichenebene ist die horizontale Ebene

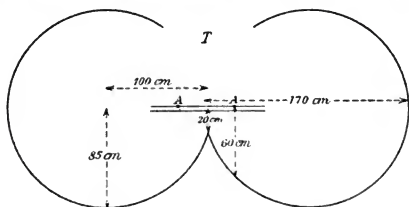


Fig. 9.

der Paralleldrähte; in den Punkten A sind die Antennen nach oben und unten abgezweigt zu denken. Die Kurve, die annähernd aus zwei Kreisen besteht, begrenzt das Gebiet, in

1) M. Paetzold, Ann. d. Phys. 19. p. 122. 1906.

dem deutliches Ansprechen des Empfängers beobachtet wurde. In der Umgebung der Stelle *T* konnten keine Beobachtungen vorgenommen werden, weil sich dort der Teslatransformator mit den Zuleitungen befand.

6. Vielfachantennen.

Es mußte interessieren, Messungen anzustellen in Entfernungen vom Sendesystem, die groß genug waren im Vergleich zu dem gegenseitigen Abstand der Antennen, damit die Intensität ihrer Strahlungen als einigermaßen gleich groß angesehen werden konnte. Zu dem Zweck wurden die geradlinigen 25 cm langen Antennen ersetzt durch stärker strahlende Vielfach- oder Käfigantennen von der Form der Fig. 10.



Fig. 10.

Eine kreisrunde, 2 mm dicke Ebonitscheibe trug dicht an der Peripherie sechs 1 mm dicke, 21 cm lange Messingdrähte, deren Enden zusammen-
gelötet waren. So entstand eine kegelförmige Antenne, die in Form einer Viertelwellenlänge von 25 cm mit einem Potentialknoten an der Lötstelle und einem Potentialbauch an der Ebonitscheibe zu schwingen vermochte, wie durch Resonanzversuche besonders festgestellt wurde.

Durch vier derartige Antennen wurden die geradlinigen Antennen des Systems (Fig. 8) ersetzt. Es war jedoch in diesem Falle keine erhöhte Ausstrahlung zu beobachten; die Erscheinung war vielmehr dieselbe wie bei den einfachen Antennen.

Der Grund hierfür dürfte der folgende sein: Auf die Paralleldrahtleitung der Fig. 5 wird durch Koppelung mit dem Primärkreis eine Energiemenge übertragen, die gegeben ist durch die Energie des Primärkreises und den Koppelungsgrad, aber nichts zu tun hat damit, ob in den Potentialknoten 25 und 75 die Stromschwankungen geradlinigen Drähten oder Käfigantennen zugeführt werden, sofern nur beide abgestimmt sind und mit dem Primärkreis nicht gekoppelt sind. Nun hat die Käfigantenne eine größere Kapazität und wird darum durch dieselbe Elektrizitätsmenge zu kleinerem Potential geladen als

die geradlinige Antenne; dieser Nachteil kompensiert den Vorteil größerer Strahlungsfähigkeit.

Gestützt wird diese Erklärung durch die Beobachtung, daß die Heliumröhre an den Enden der Käfigantenne schwächer leuchtet als an den Enden der geraden Drähte.

Nun wurde versucht, die Strahlung des Systems (Fig. 8) in größerer Entfernung mit einem empfindlichen Empfänger zu messen, und als solcher wurde ein geradliniger, 50 cm langer, vertikaler Draht benutzt, der in seiner Mitte einen Kohärer trug.

Diese Anordnung war jedoch so empfindlich, daß sie, auch bei schwacher Erregung des Primärkreises, im Bereich des Zimmers viel zu stark auf die geringe Strahlung des Primärkreises allein — also wenn das ganze Sendesystem fortgenommen war — ansprach, als daß aus den Ablesungen hätten irgendwelche Schlüsse gezogen werden können. Doch sollen einige nützliche Erfahrungen, zu denen diese Beobachtungen führten, weiter unten verwertet werden.

7. Zwei synchrone Antennen.

Eine wirksame Anordnung, bei der zwei synchrone Antennen im Abstände einer halben Wellenlänge kohärente Wellen aussenden, sei noch kurz erwähnt: Die Anordnung der Fig. 5 wurde in eine vertikale Ebene gerichtet, also auch die Ebene des Primärkreises war vertikal. An beiden Drähten I und II wurden die geraden Enden 0 bis 25 und 75—100 durch Käfigantennen (wie Fig. 10) ersetzt, die senkrecht nach oben bez. unten in den Knotenstellen 25 und 75 umgebogen waren. Es wurde so das nach dem früheren ohne weiteres zu übersehende System der Fig. 11 gebildet.

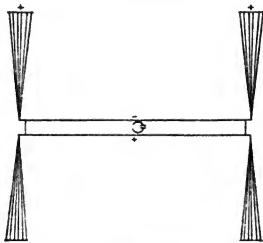


Fig. 11. Vertikalebene.

Hier sprach der Empfänger (Fig. 7) in der Richtung, in der die Antennen hintereinander erblickt wurden, viel schwächer an (nur bis 40 cm Abstand vor der vorderen Antenne) als in

der dazu senkrechten Richtung, in der noch bei 105 cm Abstand ein Leuchten der Röhre eintrat; in der Tat haben in jener Richtung die von beiden Antennen ausgestrahlten Wellen einen Gangunterschied von $\lambda/2$, in dieser aber keinen Gangunterschied.

Jedenfalls ist es interessant, daß man je nach der Erregung von denselben beiden Antennen einmal eine Strahlung aussenden kann, die in der Richtung der Antennen Null wird, während sie bei einer anderen Schaltung in der Richtung senkrecht dazu verschwindet.

B. Beobachtungen in großem Abstand im Fall von sechs Antennen.

Bei den bisher beschriebenen Versuchen waren die Abstände zwischen Sendersystem und Empfänger stets von ähnlicher Größe wie die benutzte Wellenlänge. Es war kein Raum vorhanden, damit in größeren Abständen hätte beobachtet werden können. Derartige Beobachtungen mußten aber aus drei Gründen von großem Interesse sein: Erstens fällt in großen Entfernungen die direkte Einwirkung des Primärkreises auf den Empfänger unter die Beobachtungsgrenzen; zweitens kann von jeder Rückwirkung des Empfängers auf den Sender abgesehen werden, und drittens können die Amplituden der von den einzelnen Antennen herkommenden Wellen an der Stelle des Empfängers als gleich groß angesehen werden.

1. Diskussion der Strahlung von $2n = 6$ Antennen.

Wenn $2n$ Antennen benutzt werden, so wird die Erregung eines Ätherteilchens in großer Entfernung sich folgendermaßen annähernd berechnen lassen: Fig. 12 stelle eine Horizontalebene vor, die in den Punkten $+P_n$ bis $+P_1$ und $-P_1$ bis $-P_n$ von den Antennen durchstoßen wird. Die durch das Schema (Fig. 1) vorgeschriebene Phasenverschiebung wird dann dargestellt, wenn man die Schwingungsform einer beliebigen Antenne $\pm P_m$ für einen bestimmten Augenblick in der Form schreibt:

$$A \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(a \pm \frac{2m-1}{4} \lambda \right).$$

Die Größe der Konstante a hängt von dem gewählten Anfangspunkt der Zeitmessung ab; wir können sie also gleich 0 setzen.

Nennen wir O den Symmetriepunkt des Systems von Antennen, φ den Winkel, der eingeschlossen wird von der Antennenebene und der Verbindungslinie r des Punktes O mit

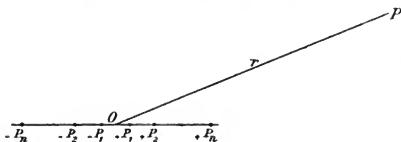


Fig. 12.

dem Ort P des Empfängers, so können wir für große Entfernungen r annähernd schreiben:

$$\angle P(-P_m)O = \varphi = \angle PO(+P_m)$$

und

$$(1) \quad (\pm P_m)P = r \mp \frac{2m-1}{4} \lambda \cdot \cos \varphi.$$

Die Amplitude der von $\pm P_m$ ausgehenden Welle ist in P umgekehrt proportional zu $(\pm P_m P)^2$, also wenn r gegen $m\lambda/2$ groß ist, zu r^2 und für alle $2m$ Antennen gleich groß; wir wollen sie gleich 1 setzen.

Dann wird die Erregung an der Stelle P durch eine Antenne $\pm P_m$ zu einer bestimmten Zeit dargestellt durch den Ausdruck:

$$\sin \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ (\pm P_m)P \pm \frac{2m-1}{4} \lambda \right\},$$

oder nach (1):

$$\sin \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ r \pm \frac{2m-1}{4} \lambda \cdot (1 - \cos \varphi) \right\}.$$

Die Übereinanderlagerung der Wirkungen sämtlicher $2m$ Antennen ergibt also:

$$S = \sum_{m=1}^n \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ r \pm \frac{\lambda}{4} (2m-1)(1 - \cos \varphi) \right\},$$

oder, da

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cdot \cos b,$$

$$(2) \quad S = a \cdot \sum_{m=1}^n \cos \left\{ \frac{\pi}{2} (2m-1)(1 - \cos \varphi) \right\},$$

wobei der Kürze halber für den konstanten Ausdruck

$$2 \sin \frac{2 \pi \tau}{\lambda} = a$$

geschrieben worden ist.

Da m stets eine ganze Zahl ist, so folgt aus (2):

$$(2') \quad S = a \sum_{1}^n (-1)^{m-1} \cdot \sin \left\{ \frac{\pi}{2} (2m-1) \cos \varphi \right\}.$$

Für den Fall von drei Antennenpaaren ist also in großem Abstand von dem strahlenden System die Erregung in einer Richtung φ proportional zu:

$$(3) \quad E = \sin \left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi \right) - \sin \left(\frac{3\pi}{2} \cos \varphi \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{2} \cos \varphi \right),$$

oder, wenn man der Kürze halber schreibt:

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} \cos \varphi = \alpha,$$

so ist:

$$(5) \quad E = \sin \alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha.$$

Diese Gleichung besagt, daß die Abhängigkeit der in einer bestimmten Richtung ausgestrahlten Energie von der Größe α gegeben ist durch die Übereinanderlagerung von drei

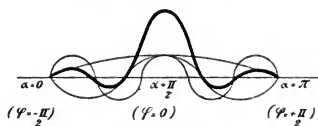


Fig. 13.

Sinuskurven mit den Perioden α , 3α und 5α und gleichen Amplituden, jedoch wechselndem Vorzeichen.

In Fig. 13 sollen die Abszissen der Größe α proportional sein, die Koordinaten der schwachen Kurven den abwechselnd positiven und negativen Sinusfunktionen von α , 3α und 5α . Die stark gezeichnete Kurve ist ihre Summe und der Größe E proportional.

Wenn man nun die Ausstrahlung in einem Quadranten betrachtet, also φ von 0 bis $\pi/2$ wachsen läßt, so nimmt α von $\pi/2$ bis 0 ab nach Gleichung (4); aus der Figur sieht man, daß auf diesem Wege der absolute Wert von E von seinem absoluten Maximum auf 0 fällt, ein zweites (relatives)

Maximum erreicht, wieder auf 0 sinkt, ein drittes Maximum erreicht und für $\varphi = \pi/2$ abermals verschwindet.

Die Werte von φ in den Nullstellen erhält man durch Auflösen der Gleichung $E=0$, oder nach (5):

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \alpha - \sin(4\alpha - \alpha) + \sin(4\alpha + \alpha) \\ &= \sin \alpha - \sin 4\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 4\alpha \cdot \sin \alpha \\ &\quad + \sin 4\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 4\alpha \cdot \sin \alpha \\ &= \sin \alpha \cdot (1 + 2 \cos 4\alpha). \end{aligned}$$

Diese Gleichung zerfällt in

$$\sin \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \cos 4\alpha = -\frac{1}{2}$$

mit folgenden Wurzeln:

$$(6) \quad \alpha = 0; \quad \pm \frac{\pi}{6}; \quad \pm \frac{\pi}{3}; \quad \pm \frac{2\pi}{3}; \quad \pm \frac{5\pi}{6}; \quad \pm \pi; \dots$$

Nach (4) verschwindet also die Ausstrahlung in den Richtungen, für welche die Beziehung besteht:

$$\cos \varphi = \frac{2\alpha}{\pi} = 0; \quad \pm \frac{1}{3}; \quad \pm \frac{2}{3}; \quad \pm \frac{4}{3}; \quad \pm \frac{5}{3}; \quad \pm 2; \dots$$

davon entsprechen reellen Größen von φ die Werte:

$$(7) \quad \cos \varphi = 0; \quad \pm \frac{1}{3}; \quad \pm \frac{2}{3}.$$

Beschränken wir uns also auf einen Quadranten, so findet keine Ausstrahlung statt in den Richtungen:

$$(8) \quad \varphi = 90^\circ; \quad 70,5^\circ \dots; \quad 48,2^\circ \dots$$

Diejenigen Richtungen, in denen die Ausstrahlung extreme Werte annimmt, ergeben sich in ähnlicher Weise durch Auflösen der Gleichung

$$\frac{dE}{d\varphi} = 0 = \frac{dE}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\varphi}.$$

Man erhält die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = 0,$$

oder nach (4):

$$(10a) \quad \sin \varphi = 0$$

und:

$$\frac{dE}{d\alpha} = 0,$$

oder nach (5):

$$\begin{aligned} 0 &= \cos \alpha - 3 \cos 3 \alpha + 5 \cos 5 \alpha \\ &= \cos \alpha + 2 \cos \alpha \cdot \cos 4 \alpha - 8 \sin \alpha \cdot \sin 4 \alpha \\ &= \cos \alpha (1 + 2 \cos 4 \alpha - 32 \sin^2 \alpha \cdot \cos 2 \alpha) \\ &= \cos \alpha (20 \cos^2 2 \alpha - 16 \cos 2 \alpha - 1). \end{aligned}$$

Diese Gleichung zerfällt in

$$\cos \alpha = 0,$$

$$\cos 2 \alpha = \frac{4 \mp \sqrt{21}}{10},$$

mit den Auflösungen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \pm \frac{\pi}{2}; \quad \pm \frac{3\pi}{2}; \dots \\ 2\alpha = \pi \pm \pi \cdot \frac{86,65 \dots}{180}; \quad 3\pi \pm \pi \cdot \frac{86,65 \dots}{180}; \dots \\ 2\alpha = \pi \cdot \frac{31,86 \dots}{180}; \quad 2\pi \pm \pi \cdot \frac{31,86 \dots}{180}; \dots \end{array} \right.$$

Da nach Gleichung (4) $\varphi = \arccos(2\alpha/\pi)$ ist, so hat also die Ausstrahlung Extremwerte in folgenden Richtungen φ :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \arccos \pm 1; \quad \arccos \pm 3; \dots \\ \varphi = \arccos \left(1 \pm \frac{86,65 \dots}{180} \right); \quad \arccos \left(3 \pm \frac{86,65 \dots}{180} \right); \dots \\ \varphi = \arccos \frac{31,86 \dots}{180}; \quad \arccos \left(3 \pm \frac{31,86 \dots}{180} \right); \dots \end{array} \right.$$

Darin ist das frühere Resultat (10a) noch einmal enthalten. Die zahlenmäßige Auflösung der Gleichungen (10) ergibt im ersten Quadranten folgende reelle Werte von φ :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \arccos 1 = 0, \\ \varphi = \arccos 0,177 \dots = 79,8^\circ \dots, \\ \varphi = \arccos 0,519 \dots = 58,7^\circ \dots, \end{array} \right.$$

Die Amplituden verhalten sich in diesen ausgezeichneten Richtungen wie die für die zugehörigen Werte φ gebildeten E . Es ist für:

$\varphi = 0$	$58,7^\circ \dots$	$79,8^\circ \dots$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\pi \cdot \frac{93,85 \dots}{360}$	$\pi \cdot \frac{31,86 \dots}{360}$
$E = 3$	$0,885 \dots$	$0,520 \dots$

Eine Zusammenfassung ergibt also folgendes Bild für die Strahlung eines nach dem Schema der Fig. 1 strahlenden Systems von sechs Antennen in großer Entfernung.

In der Richtung, in der die Antennen hintereinander erscheinen, ist größte Strahlung vorhanden (100 Proz.); seitlich nimmt die Strahlung ab, wird Null, wenn die Antennen unter $48,2^\circ$ erscheinen, erreicht ein zweites Maximum von etwa 29,5 Proz. für $\varphi = 58,7^\circ$, wird abermals Null für $\varphi = 70,5^\circ$, hat ein drittes Maximum von ungefähr 17,3 Proz. an der Stelle $\varphi = 79,8^\circ$ und verschwindet wieder in der Richtung senkrecht zu der Antennenreihe.

2. Das benutzte strahlende System.

Es wurde der Versuch gemacht, eine derartige Strahlung zu verwirklichen. Da kein Raum zur Verfügung war, um sechs 50 cm lange Antennen zu benutzen und ihre Strahlung in einigermaßen großem Abstand zu beobachten, so wurde ein System von zehnmal so kleiner Wellenlänge hergestellt und die Strahlung im Zimmer beobachtet.

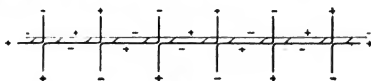


Fig. 14.

Das strahlende System ist in Fig. 14 dargestellt: Es bestand aus 1 mm dicken Messingdrähten; der eine (dünn gezeichnet) war 30 cm lang; an ihn waren in den Abständen:

1,5 3,5 6,5 8,5 11,5 13,5 16,5 18,5 21,5 23,5 26,5 28,5 cm

von einem Ende zwölf 2 cm lange Drähte in der Horizontalebene angelötet. An die freien Enden dieser Drahtstücke waren fünf zweimal rechtwinkelig umgebogene 10 cm lange Drähte und (rechts und links) zwei einmal umgebogene 5 cm lange Drähte in der aus der Figur ersichtlichen Weise in der Vertikalebene angelötet.

So war ein System gebildet, bei dem ähnlich wie bei dem System der Fig. 8 ein Schwingungszustand denkbar war, dessen Potentialbäuche in der Figur durch die Zeichen + und —

angedeutet sind, dessen Potentialknoten in den Seitenmitten der sechs Quadrate von 2 cm Seitenlänge zu suchen sind.

(Es sei bemerkt, daß in einem System mit vier Antennen von 100 cm ganzer Wellenlänge, das also doppelt so lang war wie das System der Fig. 8, mit dem Primärkreis der Fig. 4 noch deutlich der Schwingungszustand der Fig. 1 erregt werden konnte; dies ließ sich durch Berühren mit einer Warburgschen Röhre feststellen. Doch konnte die Strahlung vorderhand nicht gemessen werden.)

3. Primärkreis.

Erregt wurde das System der Fig. 14 durch folgenden primären Schwingungskreis (Fig. 15): Zwei 0,5 mm dicke Platindrähte von je 24 mm Länge bildeten ein horizontales Rechteck, dessen lange Seiten 18 mm betrug. Die eine kurze Seite war offen, die andere in der Mitte unterbrochen. Die Unterbrechungsstelle befand sich im Innern eines mit Petroleum angefüllten Ebonitröhrchens, durch dessen Wand die beiden Drähte seitlich hindurchgeführt waren und gehalten wurden.

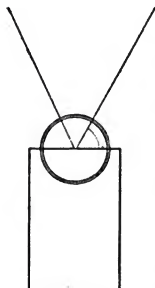


Fig. 15.

Die Unterbrechungsstelle war etwa $\frac{1}{10}$ mm groß und diente als Funkenstrecke; zu dem Zweck waren hart an der Unterbrechungsstelle 0,15 mm dicke Platindrähte angeschweißt, die zu den sekundären Polen eines kleinen Induktoriums von 5 cm maximaler Funkenstrecke führte (bei Speisung mit 8 Volt und Deprezunterbrecher).

Es mußte darauf verzichtet werden, diesen Primärkreis durch Resonanzversuche auf das strahlende System abzustimmen, weil die Dimensionen zu klein waren.

Daß seine Eigenschwingungsdauer einer halben Wellenlänge von 5 cm entspricht, ist anzunehmen, weil er schwingt wie ein Hertzscher geradliniger Erreger mit Potentialbäuchen an den offenen Enden und einem Knoten in der Funkenstrecke. Von der Kapazitätsvergrößerung durch das Petroleumbad ist keine große Wellenlängenänderung zu erwarten, weil es im Potentialknoten liegt; immerhin war sie der Grund dafür, daß

die beiden Drähte etwas kleiner gewählt wurden als ihrer Viertelwellenlänge in Luft genau entsprochen hätte, statt 25 mm nur 24 mm.

Dieser primäre Schwingungskreis wurde innerhalb des mittelsten Rechteckes des strahlenden Systems der Fig. 14 aufgestellt.

4. Kohäreranordnung.

Als Indikator für die zu erwartende schwache Strahlung sollte ein Kohärer dienen; darum wurde die Funkenstrecke nicht mit einem andauernden Funkenstrom gespeist, weil ein erregter Kohärer bei weiterem Bestrahlen seinen Widerstand wieder vergrößern kann. Vielmehr wurde nur ein einziger Funke benutzt; er wurde erzeugt, indem in die Primärspule mit 4 Volt und Vorschaltwiderstand ein Strom von 1,5 Amp. geschickt wurde; dieser Strom wurde zwischen Eisendrahtenden einmal geöffnet, und der Induktionsstoß diente zur Speisung der Funkenstrecke.

Für die Verwendung des Kohäriers waren mir die Erfahrungen von Trowbridge, Guthe¹⁾, Robinson²⁾ und Hodson³⁾ maßgebend: Ein Kohärer mit einer einzigen Kontaktstelle ist als Meßinstrument brauchbar, wenn der Anfangswiderstand, der Druck, mit dem sich die Kontaktflächen berühren, und ihre Oberflächenbeschaffenheit immer in derselben Weise wieder hergestellt werden.

Die Empfängeranordnung ist in Fig. 16 skizziert.

Ein vertikaler geradliniger Empfänger (von verschiedener Länge) war in der Höhe des Erregers in mehreren Metern Abstand von ihm aufgestellt. Er bestand meistens aus 1 mm dickem Kupferdraht, der in der Mitte unterbrochen war und dort angelötete kurze Eisenenden trug, die an der den Kohärer bildenden Kontaktstelle zu Kuppen abgeschliffen waren.

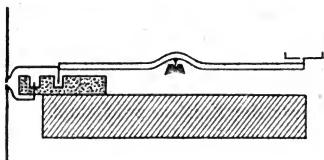


Fig. 16.

1) K. E. Guthe, Ann. d. Phys. 4. p. 762. 1901.

2) Ph. E. Robinson, Ann. d. Phys. 11. p. 754 ff. 1903.

3) F. Hodson, Ann. d. Phys. 14. p. 978. 1904.

Die untere Hälfte des Empfängers wurde gehalten durch einen kleinen Arm aus Kupfer- oder Messingdraht, der wenige Millimeter unter der Kontaktstelle abgebogen war und in ein mit Quecksilber gefülltes Näpfchen in einer Ebonitplatte (punktiert gezeichnet) führte. Die obere Empfängerhälfte wurde durch einen ähnlichen Arm an einem gläsernen Wagebalken gehalten; der Arm trug einen Zapfen, der in ein zweites Quecksilbernäpfchen in der Ebonitplatte tauchte. Die beiden Quecksilbernäpfchen dienten dazu, den Kontakt mit der sogleich zu beschreibenden Vorrichtung zum Messen des Kohärerwiderstandes herbeizuführen.

Der gläserne Wagebalken war 20 cm lang und um eine Stahlschneide auf Messinglagern drehbar. Sein äußeres Ende trug einen kleinen Korkteller zum Auflegen von Gewichtstücken. Mit der Größe des aufgelegten Gewichtes konnte der Druck der Kohärerflächen und damit die kritische Spannung verändert werden.¹⁾

Je kleiner die kritische Spannung ist, d. h. diejenige Spannung, die mindestens nötig ist, damit eine dauernde Widerstandsverringerung des Kohärrers eintritt, um so größer ist seine Empfindlichkeit.

Es mußten 2 g auf den Korkteller aufgelegt werden, wenn die obere Kohärerhälfte abgehoben werden sollte. Bei den meisten Versuchen waren die Flächen mit einer Kraft von 0,15 g Gewicht gegeneinander gepreßt. Bei stärkerem Druck wurde der Kohärer zwar empfindlicher, aber auch durch äußere Störungen in erhöhtem Maße beeinflußt, so daß bei etwa 0,5 g jede Möglichkeit aufhörte, Messungen anzustellen.

Die ganze Anordnung war auf eine 1,4 kg schwere Steinplatte (schräffelt gezeichnet) aufgekittet, die auf Filzplatten lag. Diese wiederum ruhten auf einem Brett, das mit drei Gummischläuchen in einem 2 m hohen starken Holzstativ aufgehängt war. Auf diese Weise waren die starken mechanischen Erschütterungen des Gebäudes soweit vermieden, daß während einiger Stunden der Nacht reproduzierbare Messungen vorgenommen werden konnten.

1) Ph. E. Robinson, l. c. p. 767.

5. Widerstandsmeßvorrichtung.

Zur Messung des Kohärerwiderstandes wurde ein Drehspulengalvanometer von Siemens & Halske benutzt, das mit 1000 Ohm Widerstand aperiodisch war und dann für $2 \cdot 10^{-9}$ Amp. in 1 m Abstand 1 mm Ausschlag zeigte. Die Schaltung war die folgende:

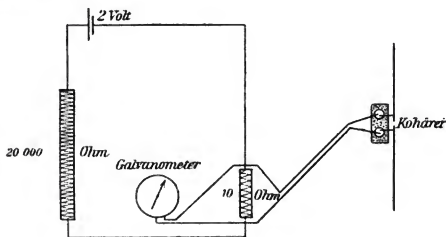


Fig. 17.

Ein Akkumulator wurde durch 20 000 + 10 Ohm geschlossen; zu den 10 Ohm parallel lag das Galvanometer mit 1000 Ohm sowie der zu messende Kohärer. Durch die Parallelschaltung des Kohäfers mit einem kleinen induktionsfreien Widerstand wurde vermieden, daß Induktionsstöße aus der Meßeinrichtung den Kohärer beeinflussen.

Die Berechnung des Kohärerwiderstandes geschieht dann in folgender Weise. Nennen wir:

$$w_1 = 1000$$

den Widerstand des Galvanometers,

$$w_2 = 10$$

den Widerstand des Nebenschlusses,

$$w_3 = w$$

den Widerstand des Kohäfers; ferner i_1 , i_2 , i_3 die zugehörigen Stromstärken,

$$J = i_1 + i_2 + i_3$$

die Gesamtstromstärke und

$$W = \frac{1}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3}}$$

den Gesamtwiderstand der drei Parallelleitungen, so gilt nach dem Ohmschen Gesetz die Beziehung:

$$i_1 w_1 = J \cdot W = \frac{J}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3}}.$$

Für den Fall, daß der Kohärer offen, also $w_3 = \infty$ ist, wollen wir die Stromstärke im Galvanometer mit i bezeichnen, so daß

$$i w_1 = \frac{J}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}}.$$

Durch Division folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{i_1}{i} = \frac{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3}},$$

mithin

$$\frac{i_1}{i - i_1} = \frac{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}}{\frac{1}{w_3}},$$

$$(A) \quad w_3 = \frac{i_1}{i - i_1} \cdot \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}.$$

Die Stromstärken i und i_1 wurden mit einem Lichtzeiger abgelesen, der auf einer Skala in 2 m Abstand spielte. Die angegebenen Ausschläge sind stets umgerechnet auf den Fall von $2\frac{1}{2}$ m Abstand und einer Zentimeterteilung der Skala. Dann ist der Ausschlag für den Fall des offenen Kohärers $i = 100$.

Da in der Formel nur die Verhältnisse der Stromstärken vorkommen, so können für die i_1 und i die zugehörigen Ausschläge in Zentimetern eingesetzt werden, und man kann mit einem Rechenfehler von 1 Proz. den Kohärerwiderstand berechnen nach der Formel:

$$(B) \quad w = \frac{10 i_1}{100 - i_1}.$$

Es war unbedingt erforderlich, während der Messungen jede Erschütterung zu vermeiden. Ursprünglich wurde der

Druck der oberen Kohärerhälfte auf die untere nicht durch einen nahezu ausbalancierten Wagebalken reguliert, sondern durch eine Art Federwage. Dadurch ergab sich aber eine sehr störende Fehlerquelle, weil die benutzte zarte Stahlspirale durch die unvermeidlichen Luftströmungen leicht ein wenig bewegt wurde, und dadurch entstand eine Erschütterung. Diese war bei dem Wagebalken vermieden.

Ferner war große Vorsicht beim Anlegen der Meßvorrichtung an den Kohärer nötig, da bei diesem Vorgang sehr leicht Erschütterungen vorkamen. Vom Galvanometer führte eine Doppelschnur zum Kohärer, die während der Bestrahlung fortgenommen werden mußte. Zur Messung wurden ihre Enden in die Quecksilbernäpfcchen eingetaucht (Figg. 16 und 17), so jedoch, daß sie nur das flüssige Quecksilber berührten aber nicht die festen Wände. Dies wurde erreicht, indem das Ende der Doppelschnur auf einem Holzklotz gehalten war, der auf einem das Empfängergerüst nicht berührenden Stelltisch so aufgelegt werden konnte, daß die geeignet gebogenen Enden der Doppelschnur soeben in die Quecksilberspiegel eintauchten.

Nach einiger Übung gelang es, den Klotz wiederholt fortzunehmen und wieder an seine Stelle zu legen, also die Kontakte zu öffnen und zu schließen, ohne daß der zuvor bestrahlte Kohärer eine Widerstandsänderung durch Erschütterung gezeigt hätte. Bei den Messungen wurde stets die Vorsicht gebraucht, daß nach einer Ablesung der Doppelkontakt geöffnet und wieder geschlossen wurde, und nur wenn die zweite Ablesung mit der ersten übereinstimmte, wurde die Messung benutzt.

Vor jeder Beobachtungsreihe wurden die Kontaktflächen mit feinstem Schmirgelpapier poliert und sodann zwei Stunden lang an der Luft stehen gelassen. Dann hatte der unbestrahlte Kohärer einen Widerstand von etwa 1000 Ohm; denn der Galvanometeraussschlag sank beim Einschalten des unbestrahlten Kohärers von 100 auf 99; dies ergibt nach Gleichung (B)

$$w = \frac{10 \cdot 99}{100 - 99} = 990 \text{ Ohm.}$$

Es wurde genau beachtet, daß vor jeder Messung der Kohärer diesen Widerstand zeigte, weil er, unter denselben

Verhältnissen bestrahlt, ganz verschiedene Endwiderstände annimmt, wenn der Anfangswiderstand verschieden gewesen war. Durch eine kleine Luftbewegung konnte er übrigens leicht wieder auf den hohen Betrag gebracht werden.

Wenn eine Messung beendet war, so wurde leise gegen das Korkscheibchen am Wagebalken geblasen, bis sich bei geschlossenem Meßkreis der Ausschlag 99 wieder hergestellt hatte.

6. Strahlung des Primärkreises.

Zuerst wurde geprüft, ob der Kohärer vielleicht anspricht, d. h. seinen Widerstand verringert, wenn im Primärkreis ein Funken übergeht, ohne daß das strahlende System überhaupt vorhanden ist. Im früheren Falle der 1 m langen Wellen war der Kohärer im Bereich des ganzen Zimmers und trotz starker Abblendung durch den Primärkreis so stark erregt worden, daß Messungen über die Strahlung des Antennensystems ausgeschlossen waren.

Dem jetzigen Primärkreis konnte der Kohärer bis auf 40 cm genähert werden, ohne daß Kohärerwirkung eintrat, sowohl wenn die Meßleitung während der Bestrahlung angelegt war, als auch wenn sie abgenommen wurde; dabei entsprach der Druck 0,15 g. Auch wenn der Druck gesteigert wurde, war in größerem Abstand als 40 cm keine direkte Beeinflussung des Kohäriers durch den Primärkreis festzustellen.

Nun wurde der Kohärer in 2 m Abstand aufgestellt und das strahlende System Fig. 14 so gerichtet, daß der Empfänger in der Richtung der Antennen lag.

7. Resonanz zwischen Sender und Empfänger.

Robinson hat gefunden (l. c. p. 793), daß ein geradliniger Empfänger, der in der Mitte einen einfachen Kohärer trägt, mit einem geradlinigen Hertzschen Erreger in Resonanz steht, wenn Erreger- und Empfängerlänge annähernd übereinstimmen.

Es wurde versucht, Resonanzkurven aufzunehmen, um zu prüfen, ob auch die beobachtete Strahlung wirklich einer Wellenlänge von 10 cm entsprach. Zu diesem Zwecke wurden die Empfängerdrähte durch Abschneiden gleicher Stücke an beiden Hälften nach und nach von 25 auf 1,3 cm verkürzt. Für jede Länge wurden drei Messungen angestellt. Es zeigte sich

aber kein Maximum der Wirkung. Das einzige, was festzustellen war, bestand in einer Vergrößerung der Kohärerwirkung mit abnehmender Empfängerlänge. Im Gebiete der großen Empfängerlängen wurden z. B. Ausschläge von 35—55 cm beobachtet, für kleine Längen 25—40 cm; dem entsprechen nach Formel (B) Widerstände zwischen 5,4 und 12,2 bez. 3,3 und 9,2 Ohm.

Auch Robinson ist es nicht gelungen, in dem sehr ruhigen Keller des Gießener Instituts Resonanzkurven aufzunehmen mit Schwingungen von 24 cm ganzer Wellenlänge. Vielleicht ist der Grund hierfür in dem von Hodson¹⁾ gefundenen Umstand zu erblicken, daß die Schärfe der Resonanz bei hohem Endwiderstand des Kohärrers (wesentlich mehr als 1 Ohm) schlechter ist als bei kleinem (etwa 1 Ohm).

Um kleinere Endwiderstände zu erhalten, wurden zwei Mittel versucht: Einmal wurde der Abstand zwischen Erreger und Empfänger auf 40 cm verkleinert; aber auch dann ergab sich keine deutliche Abhängigkeit der Kohärerwirkung von der Empfängerlänge, obgleich Endwiderstände bis zu 1,8 Ohm vorkamen.

Zweitens wurde der Druck des Kohärrers vergrößert; dadurch wurde er aber sehr bald gegen mechanische Störungen (Geräusche und Luftbewegung) so empfindlich, daß er auch ohne Bestrahlung seinen Widerstand beständig änderte.

Daß überhaupt der Kohärer für scharfe Abstimmung wenig geeignet ist, erklärt Drude²⁾ aus dem Umstand, daß er auf die Maximalamplitude anspricht und nicht auf den Integralfekt.

Es mußte darauf verzichtet werden, die Wellenlänge der Strahlung zu messen. Immerhin geht aus der Beobachtung, daß mit steigender Empfängerlänge die Kohärerwirkung sinkt, hervor, daß in der Gegend kleiner Empfängerlängen eine Resonanzlage vorhanden ist, und es wurden darum als Empfängerdrähte zwei 1 mm dicke Eisendrähte von je $2\frac{1}{2}$ cm Länge benutzt, zwischen deren polierten Enden der Kohärer in der oben beschriebenen Weise gebildet war.

1) F. Hodson, Ann. d. Phys. 14. p. 982. 1904.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 559. 1904.

Daß in diesem Falle Resonanz vorhanden ist, zeigt außer der Analogie mit Robinsons Beobachtungen bei größeren Wellenlängen auch folgende Beobachtung: Bei 2 m Abstand zwischen Erregersystem und Empfänger wurde die Einwirkung der Strahlung gemessen, einmal wenn die Zuleitung zum Galvanometer während der Bestrahlung anlag, sodann wenn sie fortgenommen war. Zu erwarten ist, daß im ersten Falle stärkere Kohärerwirkung eintritt, weil auch die Meßleitung bestrahlt wird und dem Kohärer Energie zuführt. Es zeigte sich aber das Gegenteil. Im ersten Falle ergaben sich Widerstände in der Gegend von 10 Ohm, im zweiten Falle nur bei 4 Ohm. Bei 25 cm halber Empfängerlänge hingegen wurden durch dieselbe Strahlung Kohärerwiderstände (zwischen 9 und 16 Ohm) verursacht, die merklich unabhängig davon waren, ob die Galvanometerleitung während der Bestrahlung fortgenommen wurde oder nicht. Dies erklärt sich, wenn der kleine Empfänger abgestimmt war; denn dann zerstörte die angelegte Leitung die Resonanz.

Auch von den kleinen Messingarmen, welche die Empfängerdrähte trugen und sie mit den Quecksilbernäpfchen verbanden, war eine Störung der Resonanz zu befürchten; darum waren sie möglichst klein ausgeführt.

8. Interferenz.

Nunmehr wurde die Abhängigkeit der Strahlung des Systems (Fig. 14) von der Richtung untersucht. Zu dem Zwecke wurde es auf einen drehbaren Stelltisch gestellt. Der Empfänger hatte 5 cm Gesamtlänge, der Kohärer war mit 0,15 g gepreßt.

Die Beobachtungen wurden so ausgeführt, daß zunächst der Widerstand des unbestrahlten Kohärsers geprüft wurde; war der Galvanometerausschlag 99 vorhanden, so wurde die Zuleitung (sie war 4 m lang und hatte 0,9 Ohm Widerstand) abgenommen, ein bestimmter Winkel φ zwischen der Antennenebene und der Verbindungslinie vom Erreger und Empfänger eingestellt, sodann ein Öffnungsfunke im Induktorium gegeben, die Verbindung des Kohärsers mit der Meßeinrichtung vorsichtig hergestellt, der Ausschlag i_1 abgelesen, die Zuleitung

abgenommen und wiederhergestellt, um zu prüfen, ob i_1 unverändert sei.

Dann wurde gegen den Wagebalken leise geblasen, bis sich wieder der Ausschlag 99 und damit der Kohärerwiderstand 1000 Ohm herstellte und die Beobachtung drei- bis fünfmal wiederholt.

Es gelang nicht, die nach p. 961 zu erwartenden Maxima und Nullstellen zu beobachten. Doch zeigte sich eine deutliche Abnahme der Kohärerwirkung mit wachsendem Winkel φ .

Es wurden gemessen in dem Gebiet:

φ zwischen:	Ausschläge i_1 zwischen:
0 und 30°	10 und 18 cm
30 „ 45°	15 „ 27 „
45 „ 60°	20 „ 36 „
60 „ 90°	33 „ 40 „

Berechnet man nach Formel (B) die zu den Ausschlägen i_1 gehörenden Kohärerwiderstände (von den erhaltenen Werten w ist noch 0,9 Ohm Widerstand der Zuleitung abzuziehen), so findet man:

Der Widerstand, den der Kohärer annimmt, wenn der Empfänger bestrahlt wird unter Winkeln zwischen

0 und 30°	beträgt	1,8 bis 5,8 Ohm
30 „ 45°	„	4,0 „ 14 „
45 „ 60°	„	7 „ 39 „
60 „ 90°	„	26 „ 80 „

Genau können die Widerstände nicht angegeben werden, weil die Messungen unter denselben Verhältnissen Abweichungen untereinander ergeben, die oft 50 Proz. betragen.

Daß die erwarteten Nullrichtungen der Ausstrahlung nicht beobachtet werden konnten, dürfte sich vor allem durch störende Reflexionen an den Zimmerwänden erklären. Außerdem ist es aber auch denkbar, daß die Voraussetzungen nicht genau genug erfüllt sind, unter denen sie berechnet worden sind. Daß in der Fig. 12 die Antennen $+P_m$ und $-P_m$ mit gleicher Amplitude schwingen, ist aus Symmetriegründen anzunehmen. Wegen der Dämpfung ist es aber wohl möglich, daß mit größerem m die Schwingungsamplitude der Antenne P_m kleiner

wird, und dann ist die Gleichung (2) auf p. 957 nicht mehr streng richtig.

Hauptresultat.

Es gelingt, mehrere geradlinige Hertz'sche Erreger an verschiedenen Stellen gleichzeitig in Schwingungen zu versetzen, die mit bestimmten Phasenverschiedenheiten stattfinden, indem man sie in geeigneter Weise mit einem System stehender Drahtwellen verbindet.

Es wurden Systeme von zwei und von sechs Sendern hergestellt und Richtungsverschiedenheiten in ihrer Strahlung beobachtet, die annähernd mit den wegen Interferenz zu erwartenden Erscheinungen übereinstimmen.

(Eingegangen 18. Februar 1907.)

**6. Strahlungs-, Temperatur- und
Potentialmessungen in Entladungsröhren bei
starken Strömen; von Hans Geiger.**

(Erlanger Inaugural-Dissertation.)

§ 1. Einleitung.

Will man durch ein verdünntes Gas einen kontinuierlichen, elektrischen Strom schicken, so war man bisher auf Influenzmaschinen und Hochspannungsbatterien bez. auf Hochspannungsdynamos und Hochspannungskondensatoren angewiesen, weil nur diese die nötigen Spannungen liefern. Diese Stromquellen geben aber nur relativ geringe Elektrizitätsmengen, so daß alle Untersuchungen der stetigen Glimmentladung — einige spezielle Fälle ausgenommen¹⁾ — in bezug auf das Maximum der angewendeten Stromstärke sehr beschränkt waren.

Neuerdings hat A. Wehnelt²⁾ gezeigt, daß der Kathodenfall an einer Platinelektrode, die mit einer Oxydschicht des Baryums, Strontiums oder Calciums bedeckt ist, verschwindet, wenn diese Kathode stark erhitzt ist. Der Gesamtpotentialabfall in einem solchen, mit einer Oxydkathode versehenen Rohr setzt sich dann nur aus dem Potentialabfall auf der positiven Säule und dem Anodenfall zusammen. Man kann ein solches Rohr, wenn es genügend weit ist und wenn man bei tiefen Drucken arbeitet, mit Starkstromleitungen von 110 und 220 Volt betreiben.³⁾ Bei einer derartigen Stromquelle kann man Ströme bis zu mehreren Ampère, also Ströme, die

1) Aus der Technischen Reichsanstalt liegen Untersuchungen mit einer Hochspannungsbatterie bis zu beträchtlichen Stromstärken vor: E. Gehrke, Ann. d. Phys. 15. p. 509. 1904.

2) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. 14. p. 425. 1904.

3) A. Wehnelt, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 18. p. 193. 1905; Phys. Zeitschr. 5. p. 680. 1904.

die früheren bis hundertmal an Intensität übertreffen, durch ein Entladungsrohr schicken. Dabei ist die Glimmentladung immer vollkommen stetig.

Bei solchen starken Strömen habe ich Messungen über die Strahlung, die Temperatur und den Potentialgradienten im positiven Lichte ausgeführt.

§ 2. Versuchsanordnung.

Die Entladungsröhren hatten im allgemeinen die Gestalt von Fig. 1.

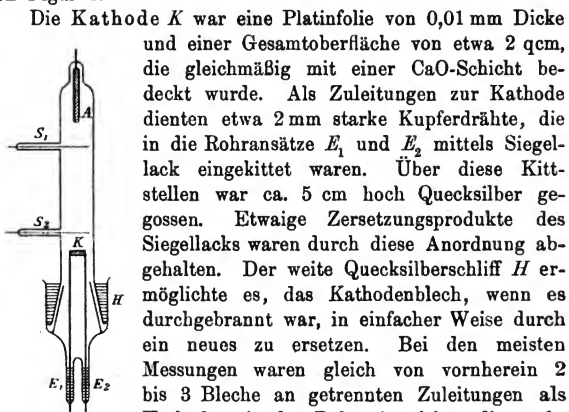


Fig. 1.

Durchbrennen eines Blechs nicht genötigt, den Schliff herauszunehmen. Die Platinfolie wurde durch eine Akkumulatoren-batterie aus vier Elementen von großer Kapazität bis zur Weißglut erhitzt. Es waren hierzu 8—10 Ampère nötig.

Als Anode A konnten nur stärkere Drähte eines schwer-schmelzbaren Materials Verwendung finden, da die Wärme-entwicklung dicht an der Anode, wie bereits A. Wehnelt¹⁾ in der zitierten Arbeit ausführt, eine recht beträchtliche ist. Selbst Eisendrähte, die in einer Stärke von 6 mm bei den vor-

1) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. 14. p. 457. 1904.

liegenden Versuchen verwendet wurden, erhitzen sich unter Umständen bis zu heller Rotglut.

Zwei Sonden S_1 und S_2 aus dünnem Platindraht, die in einem Abstand von 10 cm in das Rohr eingeschmolzen waren, gestatteten Potentialmessungen auf der positiven Säule. Als Meßinstrument diente ein Warburgsches Quadrantelektrometer in der von E. Wiedemann und G. C. Schmidt gegebenen Modifikation.¹⁾

Den Hauptstrom für das Rohr lieferte die hiesige, städtische Zentrale (Dreileiter 2×220 Volt). Für die meisten Versuche waren 220 Volt ausreichend, nur gelegentlich bei höheren Gasdrucken kamen 440 Volt zur Verwendung. Die Stromstärke ließ sich durch einen Glühlampenwiderstand von 9 parallel schaltbaren 220 Voltlampen in weiten Grenzen verändern. Ein Präzisionsampèremeter von Reiniger & Co., München, war in diesen Stromkreis eingeschaltet.

Zum Evakuieren diente eine Sprengelsche Fallluftpumpe; ein MacLeod-Manometer war zu Druckmessungen angeschlossen; die verwendeten Schiffe und Hähne waren abschließlich mit Quecksilber gedichtet.

Die untersuchten Gase waren atmosphärische Luft, Stickstoff und Wasserstoff. Die Füllung des Rohres geschah in der folgenden Weise: Nachdem das Rohr das erstmalig ausgepumpt war, wurde einige Minuten lang unter fortwährendem, gleichzeitigem Auspumpen ein Strom von 1—1,5 Ampère durch das Rohr geschickt. Die Glaswände erhitzen sich hierdurch sehr stark, so daß sich die an den Glaswänden adsorbierten Gase zum größten Teil loslösten. Dann wurde das Gas bis zu einem Druck von ca. 15 mm eingelassen. Dieser ganze Vorgang wurde mehrmals wiederholt. Von vollkommen reinen Gasen kann allerdings trotz aller Vorsichtsmaßregeln nicht gesprochen werden. Vor allem gelang es nicht, die Quecksilberdämpfe vollkommen abzuhalten; dann wirkte auch sehr störend, daß die Elektroden, namentlich die stark erhitze Eisenanode immer wieder große Mengen okkludierter Gase abgaben.

1) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 66. p. 314. 1898.

Will man bei der Untersuchung der Spektralerscheinungen fremde Gase möglichst abhalten, so mußten besondere Vorichtsmaßregeln getroffen werden, deren Beschreibung hier zu weit führen würde. Erst nach Abschluß der beschriebenen Versuche gelang es, solche Anordnungen aufzufinden.¹⁾ Die kleinen Mengen fremder Gase, die bei den folgenden Versuchen zugegen waren, trübten, wie besondere Versuche zeigten, die mitgeteilten Resultate nicht.

Über die Entladungsform im allgemeinen ist folgendes zu bemerken. Bei allen angewendeten Drucken bildeten sich die Schichten auffallend scharf aus. Der Schichtenabstand ist annähernd gleich der Rohrweite, wächst aber mit abnehmendem Gasdruck, allerdings nur wenig.²⁾ Ändert man die Stromstärke innerhalb 0,1—1 Ampère, so ändert sich die Entfernung der Schichten nicht. Man hat bereits den konstanten Wert erreicht, dem nach Willow u. a.³⁾ der Schichtenabstand mit wachsender Stromstärke zuzustreben scheint. Außer dieser normalen Schichtung konnte man ausnahmsweise auch beobachten, daß eine weit größere Zahl scheibenförmiger Schichten auftrat, die dicht aneinander lagen. Von was für besonderen Bedingungen das Auftreten dieser Art Schichtung abhängt, ließ sich nicht feststellen.

Die Entladung sah in Luft und Stickstoff bei geringer Stromstärke orangerot, bei gesteigerter Stromintensität gelb aus.⁴⁾

Bei Wasserstoff zeigte sich oft recht deutlich ausgeprägt die verschiedenfarbige Schichtung, die bereits von Crookes⁵⁾ beobachtet wurde und von Quecksilberdämpfen herrührt.

1) Im hiesigen Institut sind Untersuchungen dieser Art noch im Gange, die in Bälde veröffentlicht werden.

2) Goldstein, Wied. Ann. 15. p. 277. 1882.

3) Literatur vgl. J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, übers. v. E. Marx p. 480 ff. 1906.

4) Vgl. G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 1. p. 628. 1900 und Schwienhorst, Diss. Göttingen, p. 18. 1903.

5) W. Crookes, Proc. Roy. Soc. p. 399. 1902.

I. Strahlungsmessungen.

§ 3. Die Abhängigkeit der Strahlung von der Stromstärke.

Es wurde gemessen einerseits die Gesamtstrahlung des leuchtenden Gases, andererseits die Gesamlichtstrahlung allein, nämlich die Strahlung, die von einer die Wärmestrahlung absorbierenden Substanz durchgelassen wurde. Für schwache Ströme sind Messungen dieser Art bereits von K. Ångström¹⁾ ausgeführt worden.

Die Gesamtstrahlung des vom Strome durchflossenen Rohres wurde mittels einer Thermosäule von 18 Konstantan-Eisen-

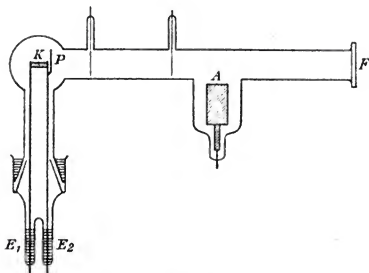


Fig. 2.

elementen bestimmt. Das Entladungsrohr mußte Längsdurchsicht besitzen: es war, wie aus Figur 2 ersichtlich, modifiziert. Anode und Kathode befanden sich in seitlichen Ansätzen. Das den Rohrab schluß bildende Fenster F war eine Spiegelglasplatte von 2 mm Dicke, die mittels Natriumsilikat aufgekittet war, um Dämpfe flüchtiger Substanzen zu vermeiden. Die Kittstelle war äußerlich noch durch eine Siegel lackschicht geschützt. Von der Verwendung einer Steinsalzplatte, die infolge ihrer hohen Durchlässigkeit für strahlende Energie am geeignetsten gewesen wäre, wurde wegen der starken Hygroskopie des Steinsalzes Abstand genommen. Der Abstand des Fensters von der

1) K. Ångström, Wied. Ann. 48. p. 493. 1893.

Anode betrug 16 cm. Wählt man den Abstand geringer, so beschlägt sich das Fenster allmählich mit einer dünnen Eisenschicht.¹⁾

Die Thermosäule war in Richtung der Rohrachse 14,5 cm von dem Fenster *F* entfernt aufgestellt und war durch ein mäßig astasiertes Du Bois-Rubenssches Galvanometer geschlossen. Die Empfindlichkeit dieses Instrumentes betrug $2,3 \times 10^{-8}$ Ampère für den Skalenteil bei 100 cm Skalenabstand.

Die Messung der Strahlung geschah in folgender Weise: Ein zwischen dem strahlenden Rohr und der Thermosäule befindlicher Schirm wurde entfernt, der erste Ausschlag des Galvanometers abgelesen und die Thermosäule dann wieder vom Rohre abgesperrt.

Es muß noch erwähnt werden, daß die Strahlung des glühenden Kathodenbleches allein auch einen Ausschlag des Galvanometers hervorrief. Es war zunächst versucht worden, die Kathode außerhalb der Rohrachse in einem weiten Ansatz anzubringen. Bei dieser Anordnung traten jedoch immer diskontinuierliche Lichtbogenentladungen auf: das Blech brannte gleich bei Beginn einer Versuchsreihe durch. Bei den definitiven Versuchen wurde die glühende Kathode wieder in die Rohrachse gesetzt (wie Fig. 2) und mit einem kleinen Schirm *P* aus Kupferblech gegen das Rohr hin abgeblendet. Dies wirkte weniger störend auf die Form der Entladung; die Strahlung des erwärmten Schirmes war auch relativ gering, nur 4 bis 5 Skalenteile; das sind ca. 8 Prozent des Ausschlags, der bei den Versuchen durchschnittlich gemessen wurde.

In hohem Maße macht sich die Strahlung der erhitzten Rohrwände geltend. Diese Rohrwandstrahlung ist der Stromstärke proportional und kann in folgender Weise bestimmt werden²⁾:

Es wird ein starker Strom durch das Rohr geschickt, die Strahlung in Skalenteilen des Galvanometerausschlages be-

1) Derartig beschlagene Glasplatten zeigten ausgeprägte Newtonsche Farbenringe.

2) K. Ångström, Wied. Ann. 48. p. 506. 1893.

stimmt, der Strom ausgeschaltet und die Abklingung der Rohrstrahlung bestimmt.

Beispiel.

Stickstoff: Stromstärke 0,7 Ampère.

Strahlung von Gas und Rohr	56 Skt.
„ des Rohres allein 10 sec nach Ausschaltg. des Stromes: 33 „	
„ „ „ 60 „ „ „ „ : 27 „	
„ „ „ 120 „ „ „ „ : 26 „	
„ „ „ 180 „ „ „ „ : 25 „	

Aus dieser Tabelle interpoliert man graphisch einen Wert von 36 Skalenteilen für die Rohrwandstrahlung zu der Zeit, als ein Strom durch das Rohr geht.

Zur Bestimmung der Lichtstrahlung benützt Ångström als Wärmestrahlung absorbierendes Mittel eine Alaunplatte. Allerdings haben neuere Untersuchungen ergeben, daß der Alaun nur unvollkommen die Wärmestrahlung absorbiert. R. Zsigmondy¹⁾ zeigt, daß eine wässrige Eisenoxydulsalzlösung viel geeigneter zur Absorption strahlender Wärme ist. Bei meinen Versuchen wurde Eisenvitriol verwendet und zwar ein Grammolekül gelöst in einem Liter Wasser. Die Lösung läßt nur 1,87 Prozent der Wärmestrahlung durch und erscheint vollkommen farblos.²⁾ Die Flüssigkeit wurde in einem parallelepipedischen Glastrog vor die Thermosäule in den Strahlengang gestellt; die Schichtdicke der absorbierenden Lösung betrug 1 cm.

Die durchgeführten Messungen ergaben folgende Sätze für Ströme bis zu einem Ampère:

1. Die Strahlung wächst geradlinig mit der Stromstärke.
2. Das Verhältnis der Lichtstrahlung zur Gesamtstrahlung ist bei konstantem Druck von der Stromstärke unabhängig.

Beide Sätze sind von K. Ångström³⁾ bereits aufgestellt worden. Seine Messungen gehen allerdings nur bis zu Strömen von 25 Milliampère.

Die folgende Tabelle 1 enthält Messungen, aus denen sich Satz 1 ergibt. J ist die Stromstärke in Ampère. S ist die

1) R. Zsigmondy, Wied. Ann. 49. p. 531. 1893.

2) R. Zsigmondy, l. c. p. 533.

3) K. Ångström, l. c.

Gesamtstrahlung in Skalenteilen des Galvanometeraussschlages, doch ist die Strahlung der Kathode = 4 Skt. jedesmal abgezogen. Die angegebenen Gradienten sind Mittelwerte. Die Kurven der Fig. 3 geben die Zahlenwerte graphisch wieder. Als Abszisse ist die Stromstärke, als Ordinate die Strahlung angetragen. Man erhält gerade Linien, die durch den Nullpunkt gehen.

Tabelle 1.

Stickstoff, Rohr Fig. 2. (Rohrweite 3,2 cm.)

Druck: 0,28 mm Gradient: 5 Volt/cm			Druck: 0,24 mm Gradient: 3,5 Volt/cm			Druck: 0,07 mm Gradient: 1 Volt/cm		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
<i>J</i>	<i>S</i>	<i>S/J</i>	<i>J</i>	<i>S</i>	<i>S/J</i>	<i>J</i>	<i>S</i>	<i>S/J</i>
0,05	5	100	0,08	8	100	0,09	7	78
0,19	22	116	0,23	22	96	0,32	27	84
0,40	45	112	0,41	36	88	0,61	44	72
0,61	73	120	0,60	49	82	0,72	56	78
0,77	91	118	0,75	66	88	1,00	71	71
1,00	116	120	1,05	102	97			

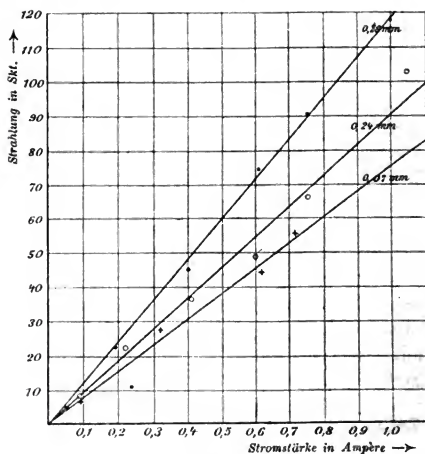


Fig. 3.

Die folgende Tabelle 2 zeigt, daß das Verhältnis der Lichtstrahlung zur Gesamtstrahlung von der Stromstärke unabhängig ist [Satz 2]. S ist die Gesamtstrahlung des Gases (die Strahlung der Rohrwände und der Platinfolie sind in Abrechnung gebracht), S_L ist die Strahlung, die von der FeSO_4 -Lösung nicht absorbiert wurde. J ist die Stromstärke in Ampère.

Tabelle 2.

Stickstoff, Rohr Fig. 2. (Rohrweite 3,2 cm.)

Druck	J	S	S_L	S_L / S
1	2	3	4	5
konstant = 0,16 mm	0,14	10	6	0,60
	0,26	13	9	0,68
	0,46	17	11	0,64
	0,66	24	14	0,60
	0,85	34	16	0,48

Man ersieht, daß der in Spalte 5 gegebene Quotient S_L/S innerhalb der Versuchsfehlergrenze als konstant gelten kann. Auch bei anderen Drucken ergaben sich dieselben Verhältnisse und derselbe Wert für S_L/S (vgl. auch Tabelle 6 p. 986).

Um die Werte der Strahlung auf Kerzen reduziert zu erhalten, wurden photometrische Messungen in folgender Weise ausgeführt. Von einem Rohre, wie es Figur 1 zeigt, waren Kathode und Anode derart abgeblendet, daß nur noch der zwischen den beiden Sonden liegende 10 cm lange Teil des Rohres sichtbar war. In einer Entfernung von 50 cm wurde die Helligkeit dieses Streifens mittels des Martensschen¹⁾ Polarisationsphotometers bestimmt. Als Vergleichslichtquelle ist an diesem Photometer eine kleine Glühlampe angebracht, deren Helligkeit mit einer Amylacetatlampe verglichen war. Die Zahlenwerte einer Messungsreihe sind in Tabelle 3 wiedergegeben.

1) F. F. Martens, Phys. Zeitschr. 1. p. 299. 1900.

Tabelle 3.

Atmosphärische Luft, Rohr Fig. 1. (Rohrweite 2,5 cm.)

Druck in mm Hg	J Stromstärke in Ampère	V Spannungs- abfall zwischen den Sonden	$J \cdot V$ Watt- verbrauch	Helligkeit in Kerzen
0,3	0,06	74	4,5	0,39
	0,17	75	12,8	0,95
	0,30	65	19,8	2,05
	0,60	64	38,0	3,7
	1,10	63	69,0	7,2
	1,88	58	110	12,3

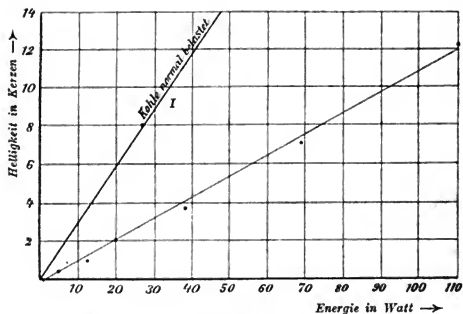


Fig. 4.

Die entsprechende Kurve (Fig. 4) gibt die Lichtintensität als Funktion des Energieverbrauches. Diese Kurve ist ebenfalls eine gerade Linie, da der Gradient annähernd konstant ist.¹⁾ Man erkennt übrigens, daß der optische Nutzeffekt im positiven Licht, d. i. das Verhältnis der Lichtstrahlung zur geleisteten Arbeit, ein geringer ist. Ein normal belasteter Kohlenfaden (vgl. Fig. 4) würde eine mehr als doppelt so große Hellig-

1) Vgl. Abschnitt III dieser Arbeit.

keit geben. Allerdings konnte der Nutzeffekt im positiven Lichte durch Beimengung ganz geringer Mengen anderer Gase beträchtlich verändert werden. So hatten oftmals Kurven, die unter scheinbar denselben Verhältnissen aufgenommen waren, doch merklich verschiedene Richtungen. Daß der Einfluß kleiner Beimengung (Sauerstoff, Quecksilberdampf) ein recht beträchtlicher auf die Intensität des Spektrums ist, haben u. a. eingehend P. Lewis¹⁾ und E. Wätzmann²⁾ gezeigt.

§ 4. Strahlung einzelner Spektralbezirke; Abhängigkeit von der Stromstärke.

Quantitative spektrophotometrische Messungen der Strahlung leuchtender Gase sind von Simonsen³⁾, Ferry⁴⁾, Kalähne⁵⁾, Langenbach⁶⁾, Berndt⁷⁾ u. a. ausgeführt worden. Aus diesen Messungen ergab sich als wesentlichstes Resultat, daß für die meisten Gase (Quecksilberdampf und Kadmiumdampf ausgenommen)⁸⁾ die Strahlung eines einzelnen Spektralbezirkes der Stromstärke proportional ist. Die Messungen gehen im Maximum bis etwa 10 Milliampère.

Geht man, wie in vorliegender Untersuchung ausgeführt wurde, bis zu Stromstärken von 1 Ampère, so ergibt sich auch innerhalb dieser Grenzen wenigstens für Rohrweiten zwischen 2 und 4 cm der Satz, daß

die Strahlung eines einzelnen Spektralbezirkes proportional der Stromstärke ist,

und als notwendige Folge auch der folgende:

Die spektrale Verteilung der Energie ist unabhängig von der Stromstärke. Dabei gelten diese Resultate, das mag hier nochmals besonders betont werden, für die vollkommen stetige

1) P. Lewis, Wied. Ann. **69**, p. 398. 1899.

2) E. Wätzmann, Diss. Breslau 1904; Ann. d. Phys. **14**, 1904.

3) Simonsen, Diss. Kiel 1892.

4) F. C. Ferry, Phys. Rev. **7**, p. 1 und 296. 1898.

5) A. Kalähne, Diss. Berlin 1898; Wied. Ann. **65**, p. 815. 1898.

6) K. Langenbach, Diss. Bonn 1902; Ann. d. Phys. **10**, p. 789. 1903.

7) G. Berndt, Ann. d. Phys. **12**, p. 1101. 1903.

8) A. Kalähne, l. c. p. 834 ff.

Entladungsform. Die meisten der bisher gewonnenen Resultate werden nämlich gerade dadurch beeinträchtigt, daß die Untersuchungen mit Hilfsmitteln vorgenommen werden mußten, die immer eine disruptive Entladungsform bedingten. Bei der disruptiven Entladungsform aber haben, wie schon mehrfach gezeigt wurde, Kapazität und Selbstinduktion des Stromkreises einen wesentlichen Einfluß auf das Spektrum. Übersichtliche Resultate wird man daher nur dann erhalten, wenn man die einfachste Entladungsform hat, d. h. also, wenn der durch das Rohr fließende Strom kontinuierlich ist.

Die diesbezüglichen Messungen wurden mittels eines Glanschen Photometers ausgeführt. Eine kleine Osmiumlampe diente als Vergleichslichtquelle. Durch den Okularschieber des Photometers war das ganze Spektrum bis auf die Bande des Stickstoffs $\lambda = 6069 \text{ \AA.E.}$ abgeblendet. Die eine Messungsreihe der Tabelle 4 wird durch Kurve I der Figur 5 dargestellt. Die zweite Messungsreihe fällt mit der ersten fast völlig zusammen und ist daher nicht mehr eigens eingetragen. Die Kurven II und III sind Messungen in elektrolytisch dargestelltem Wasserstoff für die Linie $H_{\alpha} \lambda = 6563 \text{ \AA.E.}$ Die Zahlenwerte hierfür sind in Tabelle 5 zu finden. Wie man sieht, sind bei Wasserstoff die Verhältnisse ganz ähnlich wie im Stickstoffe, es wächst auch hier die Strahlung proportional mit der Stromstärke.¹⁾

Tabelle 4.

Stickstoff, Rohr Fig 1. (Rohrweite 2,5 cm.)

Druck	Gradient	Helligkeit	Stromstärke	Druck	Gradient	Helligkeit	Stromstärke
0,23 mm	5 Volt/cm	2,3	0,11	0,18 mm	4 Volt/cm	2,5	0,18
		4,1	0,20			7,6	0,34
		6,9	0,29			12,0	0,54
		10,6	0,48			17,4	0,74
		13,2	0,62			25,7	1,08

1) Über diese spektralphotometrischen Messungen ist bereits in den Verhandlungen des ersten internationalen Kongresses zum Studium der Radiologie und Ionisation Lüttich 1905 berichtet.

Tabelle 5.

Wasserstoff, Rohr Fig. 1. (Rohrweite 3,5 cm.)

Druck	Gradient	Helligkeit	Stromstärke	Druck	Gradient	Helligkeit	Stromstärke
0,34 mm	3,5 Volt/cm	0,94	0,19	0,21 mm	2,9 Volt/cm	0,45	0,20
		3,85	0,50			1,20	0,35
		5,50	0,69			2,56	0,52
		6,10	0,80			3,85	0,74
		8,40	1,12			5,60	1,14

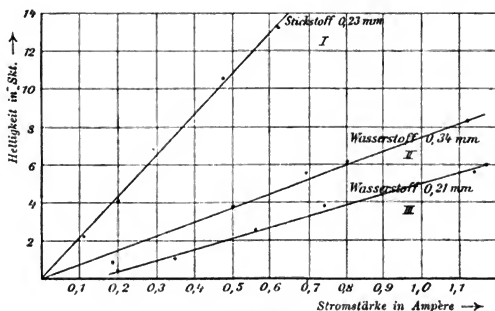


Fig. 5.

Ein Punkt wäre hier noch besonders zu erörtern, d. i. der bereits p. 976 erwähnte Farbenübergang des positiven Stickstofflichtes von rot zu gelb. Dieser Farbenwechsel läßt sich, wenn das Gas einigermaßen rein ist, immer deutlich erkennen; er findet in engen Röhren eher statt als in weiten, doch ist bei Stromstärken von etwa 0,1 Ampère das Licht immer schon völlig gelb. Durch eine Reihe photographischer Spektralaufnahmen mittels Gelbscheibe und farbenempfindlichen Platten konnte festgestellt werden, daß die im Gelben liegenden Banden des Stickstoffs rascher an Intensität zunehmen als es das Proportionalitätsgesetz zwischen Helligkeit und Stromstärke erforderte. Danach würde also für Stickstoff mit großer Annäherung folgendes gelten: Die Intensität aller Stickstoffbanden wächst proportional mit der Stromstärke, mit Ausnahme der Banden im Gelb. Die Intensität dieser Banden

wächst zuerst rascher als die Stromstärke; hat man aber eine Stromintensität von 0,1 Ampère erreicht, so gilt auch für diese Banden das Proportionalitätsgesetz.

Es muß noch besonders hervorgehoben werden, daß die in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten Sätze nur Gültigkeit haben für große Rohrquerschnitte und tiefe Drucke. Es ist wohl möglich, daß in engen Röhren und bei höheren Drucken die Strahlung langsamer als die Stromstärke wächst.¹⁾ Gerade unter diesen Bedingungen sind aber infolge des hohen Gradienten auf der positiven Säule Messungen nicht möglich.

§ 5. Die Abhängigkeit der Strahlung vom Druck.

Die Abhängigkeit der Strahlung vom Druck wurde in einem Intervall von 0,03—0,6 mm untersucht. Bei höheren Drucken ist infolge des großen Gradienten auf der positiven Säule die Potentialdifferenz von 440 Volt zu gering, um einen Strom durch das Rohr schicken zu können. Eine Messungsreihe ist in Tabelle 6 wiedergegeben. Die Strahlung der Rohrwände, ebenso die der Kathode ist in Abrechnung gebracht. Die Stromstärke wurde konstant auf 0,1 Ampère erhalten. Es war zu diesem Zweck ein Präzisionsmilliampèremeter von Keiser & Schmidt, Berlin, und ein Schieberrheostat von 200 Ohm in den Hauptstromkreis eingeschaltet. Der Strom ließ sich leicht bis auf ± 1 Milliampère konstant erhalten.

Tabelle 6.

Stickstoff, Rohr Fig. 2. (Rohrweite 3,2 cm.)

Druck mm	Gradient Volt	Strahlung S	Lichtstrahlung S_L	S_L/S
0,62	13	24	12	0,50
0,51	12	16	8	0,50
0,44	11	16	8	0,50
0,33	9,4	15	8	0,53
0,20	8,1	15	8	0,53
0,14	6,3	14	8	0,57
0,08	3,9	12	6	0,50
0,03	2,1	11	6	0,54

1) Vgl. J. Stark, Ann. d. Phys. 14. p. 506. 1904.

Eine Verschiebung des Intensitätsmaximums mit abnehmendem Druck läßt sich aus Tabelle 6 nicht ersehen.¹⁾ Der Quotient S_L/S , also das Verhältnis der Lichtstrahlung zur Gesamtstrahlung, ist für Drucke von 0,62—0,03 mm innerhalb der Fehlergrenze konstant. Der Wert des Verhältnisses S_L/S selbst ist aber im Vergleich mit den Messungen Ångströms bedeutend kleiner. Nach Ångström beträgt der Wert dieses Verhältnisses bis 0,92. Der große Unterschied ist verständlich, weil bei den vorliegenden Messungen als absorbierendes Mittel die FeSO_4 -Lösung in Verwendung kam, während Ångström den weniger absorbierenden Alaun benützt. Der wahre Wert des optischen Nutzeffektes ist natürlich noch bedeutend geringer, denn auch die FeSO_4 -Lösung läßt außer den Lichtstrahlen auch noch Strahlen anderer Wellenlängen durch. Der optische Nutzeffekt einer Amylacetatlampe bestimmte sich auf diese Weise zu 0,03, während der wahre Wert nach den neuen Messungen von Ångström²⁾ 0,01 beträgt. Daraus läßt sich folgern, daß der optische Nutzeffekt des positiven Lichtes für Stickstoff ca. 18 mal so groß ist als für eine Amylacetatlampe.

Mit abnehmender Rohrweite findet allerdings eine schon dem bloßen Auge bemerkbare Verschiebung des spektralen Intensitätsmaximums nach der Seite der kürzeren Wellenlänge hin statt.³⁾

Aus der Tabelle 6 folgt auch:

Für Stickstoff nimmt unter den oben beschriebenen Versuchsbedingungen die Strahlung mit abnehmendem Druck ab. Ångströms Tabellen⁴⁾ zeigen ähnliche Verhältnisse.

Um die Messungen in bezug auf den Gasdruck in etwas höherem Maße variieren zu können, trat für ein paar Versuchsreihen an Stelle der Starkstromleitung die Hochspannungsbatterie. In einem ca. 2 cm weiten Rohr war die Stromstärke auf den konstanten Wert von 1,55 Milliampère eingestellt, während der Druck in den Grenzen von 3 mm bis zu 0,08 mm

1) Nach Ångström verschiebt sich mit abnehmendem Druck das Intensitätsmaximum nach dem violetten Teile des Spektrums.

2) Landolt-Börnstein, Tabellen.

3) E. Goldstein, Wied. Ann. 11. p. 832. 1880.

4) K. Ångström, l. c. p. 511.

verändert wurde. Gleichzeitig wurden spektrophotometrische Messungen in einer blauen bez. roten Bande des Stickstoffs ausgeführt. Die Kurven der Fig. 6 geben die Resultate wieder. Als Ordinaten sind die Helligkeiten angetragen, als Abszissen die Potentialgradienten, die sich in demselben Sinne ändern wie die Gasdrucke.

Man sieht, die Strahlung wächst zunächst mit zunehmendem Gasdruck bis zu einem Maximalwert, der für diese beiden Banden bei 0,46 mm [Gradient 6 Volt] lag. Von hier an nimmt die Strahlung wieder ab. Bei den Drucken, bei denen die

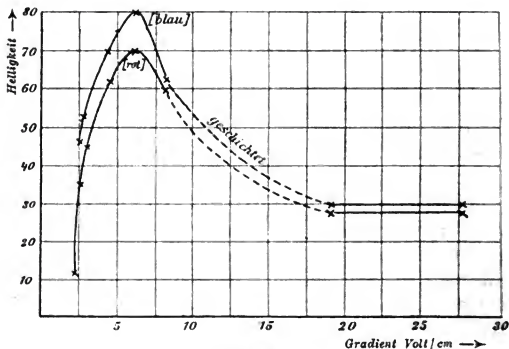


Fig. 6.

Entladung geschichtet war, waren die photometrischen Bestimmungen unsicher. Die gefundenen Kurven gleichen sehr den von Langenbach¹⁾ für die Wasserstofflinien gefundenen.

II. Temperaturmessungen.

§ 6. Literaturübersicht.

Wohl zuerst wurde von E. Wiedemann²⁾ darauf hingewiesen, daß die Temperatur in einem Rohre, in dem eine

1) K. Langenbach, l. c.

2) E. Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 298. 1879; vgl. auch Wied. Ann. 10. p. 202. 1880; 20. p. 756. 1883.

leuchtende Entladung stattfindet, eine ganz geringe sein kann. E. Wiedemann berechnet auf Grund kalorimetrischer Messungen, daß die Temperatur in weiteren Röhren beim Stromdurchgang weit unter 100° liegen kann, daß aber in Kapillaren bei diskontinuierlichen Entladungen die Temperatur viele tausend Grad wohl erreichen könne. Messungen und Berechnungen ähnlicher Art wurden ferner von Hittorf¹⁾, Paalzow und Neesen²⁾ sowie von Stark³⁾ ausgeführt.

Unter der Annahme, daß die gesamte elektrische Energie an der Stelle des Rohres, wo sie verbraucht wird, sich in Wärme umsetzt, hat Warburg⁴⁾ für die positive, ungeschichtete Säule die Temperaturen in der Rohrachse, an der inneren Rohrwand und die mittlere Temperatur des Gases berechnet.

R. W. Wood⁵⁾ hat diese Theorie in vielen Punkten auf experimentellem Wege bestätigt. Er führt einen Bolometerdraht, verschiebbar durch einen Quecksilberbarometerverschluß in das Innere eines Entladungsrohres ein und mißt so unter verschiedenen Bedingungen die Temperatur in den einzelnen Teilen der Entladung. Die wichtigsten für das Folgende in Betracht kommenden Resultate seiner Arbeit sind:

1. Der Quotient Temperaturerhöhung durch Stromstärke ist bei konstantem Druck nahezu konstant.

2. Bei der geschichteten Entladung ist die Temperatur größer in den leuchtenden als in den dunklen Teilen. Größere Temperaturunterschiede zwischen den hellen und dunklen Stellen als $1,5^{\circ}$ wurden nicht nachgewiesen. In keinem Falle wurde eine Temperatur gemessen, die 73° überstieg.

Die Messungen von Wood sind neuerdings wieder von K. Kerkhof⁶⁾ aufgenommen und in vieler Hinsicht bestätigt worden; doch sind diese Messungen bei Verwendung eines Funkeninduktors ausgeführt, die Entladung ist damit diskontinuierlich und der Wert der Resultate nicht sicher (vgl. p. 984).

1) W. Hittorf, Wied. Ann. 21. p. 128. 1884.

2) A. Paalzow und F. Neesen, Wied. Ann. 56. p. 276. 1895.

3) J. Stark, Ann. d. Phys. 2. p. 424. 1900.

4) E. Warburg, Wied. Ann. 54. p. 265. 1895.

5) R. W. Wood, Wied. Ann. 59. p. 238. 1896.

6) K. Kerkhof, Diss. Bonn 1900; Ann. d. Phys. 4. p. 327. 1901.

Die folgenden von mir ausgeführten Temperaturmessungen waren veranlaßt durch eine Beobachtung, die ich anläßlich der Strahlungsmessungen machte. Es zeigte sich nämlich, daß dünne Platindrähte, wie sie zu den Sonden verwendet waren, sich im positiven Licht bei gesteigerter Stromstärke bis zur Glühtemperatur erhitzen. Es werden im folgenden Messungen mitgeteilt werden, die die Abhängigkeit der Temperatur von Stromstärke und Gasdruck zeigen, und Messungen, die sich auf die Temperaturverhältnisse in den Schichten bei großer Stromstärke beziehen.

§ 7. Das Bolometer.

Die Versuche waren zunächst so angeordnet, daß in einem Rohre, wie es Fig. 1 zeigt, durch einen Rohransatz zwischen den beiden Sonden ein feiner, zur Schlinge gebogener Platindraht als Bolometer in das Innere des Rohres eingeführt war. Die Länge des Bolometerdrahtes betrug 5,4 cm, seine Dicke 0,025 mm. Hieraus berechnet sich ein Widerstand von 15,4 Ohm bei 18°. Dieser feine Bolometerdraht war zunächst an dickere, je 20 cm lange Platindrähte angelötet, die ihrerseits wieder mit Kupferdrähten verbunden waren. Der Widerstand der Zuleitungsdrähte betrug 1,34 Ohm. Das Bolometer bildete den einen Zweig einer Wheatstoneschen Brücke. In der Brücke lag ein Wiedemannsches Galvanometer, dessen Ausschläge durch Projektion sichtbar gemacht waren. Alle zum Bolometer gehörigen Meßinstrumente waren isoliert aufgestellt, damit kein Zweigstrom durch das Bolometer zur Erde fließen konnte.

Die Berechnungen der Temperaturen aus den zugehörigen Platinwiderständen geschah nach der von Callendar¹⁾ gegebenen Methode. Ist W_0 der Widerstand des Bolometers bei 0°, W_{100} der Widerstand bei 100°, so ist für einen beliebigen Widerstand W des Bolometers die zugehörige, sogenannte „Platin-temperatur pt “ gegeben durch die Gleichung:

$$pt^0 = (W - W_0) / (W_{100} - W_0) \cdot 100^0.$$

1) H. L. Callendar, Phil. Trans. 178. p. 161. 1887 und 182. p. 119. 1891; Phil. Mag. 14. p. 1. 1899; 48. p. 519. 1899.

Die nach dieser Gleichung berechnete Platintemperatur weicht namentlich bei höherer Temperatur von der wahren Temperatur t beträchtlich ab. Diese Differenz wird gegeben durch die Gleichung:

$$t - tp = \delta \left[\left(\frac{t}{100} \right)^2 - \frac{t}{100} \right].$$

Den Wert der Konstanten δ bestimmt man durch Beobachtung der Platintemperatur pt im Schwefeldampf ($t = 445^\circ$).

Für das vorliegende verwendete Bolometer war:

$$W_0 = 14,60 \text{ Ohm,}$$

$$W_{100} = 18,66 \text{ Ohm,}$$

$$W_{445} = 31,96 \text{ Ohm.}$$

Daraus berechnet sich der Wert der Konstanten δ zu 1,3.

Sämtliche Temperaturen der folgenden Tabellen sind auf die vorstehend beschriebene Weise berechnet und auf 5 Grad abgerundet.

Eine wesentliche Frage ist naturgemäß die, inwieweit überhaupt der Bolometerdraht die Temperatur des erhitzten Gases annimmt. Infolge des Wärmeverlustes durch Strahlung und durch Leitung wird die mit dem Bolometerdraht gemessene Temperatur kleiner sein als die wahre mittlere Temperatur des Gases. Um einen Anhalt zu haben, inwieweit diese Größen von Einfluß sind, machte W. Wood¹⁾ Messungen einerseits mit einem Platindraht von 0,035 mm Durchmesser, andererseits mit einem Platinblechstreifen von den Dimensionen $0,1 \times 1,5 \times 0,0001 \text{ cm}^3$. Die mit beiden Bolometern vorgenommenen Messungen zeigten, daß wenigstens für nicht zu hohe Temperaturen das Bolometer die Temperatur des Gases genau genug annahm.

Nun werden allerdings die durch Leitung und namentlich die durch Strahlung bedingten Wärmeverluste gerade bei den hohen Temperaturen, wie sie in den vorliegenden Fällen fast ausschließlich zu messen waren, naturgemäß bedeutend größer. Doch zeigte der im folgenden beschriebene Versuch, daß diese Verluste die Temperatur des Bolometerdrahtes doch nicht er-

1) R. W. Wood, l. c. p. 242.

heblich herunterzusetzen vermochten. In einem Rohre, das mit einer Oxydkathode versehen war, waren senkrecht zur Rohrachse etwa in der Mitte des positiven Lichtes zwei Platindrähte von 0,025 und 0,25 mm Durchmesser angeordnet. Bei dem dickeren Draht waren also, da der Querschnitt hundertmal größer ist, als der des dünneren, auch die Wärmeverluste durch Ableitung hundertmal so groß, ebenso war der Verlust durch Strahlung bei dem dickeren Drahte der zehnfache der zehnfachen Drahtoberfläche entsprechend. Durch das Rohr wurde nun langsam anwachsend ein immer stärkerer Strom geschickt. Es zeigte sich, daß beide Drähte bei derselben Stromstärke zu glühen begannen und stets dieselbe Helligkeit zeigten. Nur an den Enden der Drähte machte sich die verschieden große Wärmeableitung bemerkbar.

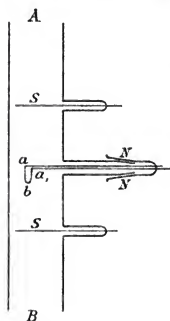


Fig. 7.

Erst nach Fertigstellung dieser Arbeit erschien eine Untersuchung von J. E. Lilienfeld¹⁾, in der der Verfasser auf Grund seiner Versuche zu dem Ergebnis kommt, daß ein Thermoelement oder ein noch so feiner Bolometerdraht auch nicht annähernd die Temperatur der Entladung annimmt. Ist dem wirklich so, so können die im folgenden mitgeteilten Kurven nur als solche gelten, die ein Abbild der wirklichen Verhältnisse geben.

Veranlaßt durch eine Bemerkung von Hrn. Prof. Dr. Grätz in München sowie von Herrn Dr. Schönrock in Berlin möge an dieser Stelle noch erörtert werden, ob nicht sekundäre Umstände die hohe Temperatur des Drahtes wesentlich bedingen. In einem Entladungsrohr *AB* (Fig. 7) sei senkrecht zur Rohrachse ein Draht (z. B. Sonde *S*) ausgespannt. Dieser Draht wird sich erhitzen, wenn das ihn umgebende Gas selbst durch den Strom erhitzt wird. Außerdem findet auch noch eine Erwärmung des Drahtes dann statt, wenn der Strom oder ein Teil desselben in den Draht eintritt und infolgedessen Joulesche Wärme frei wird oder der Draht sich infolge eines

1) J. E. Lilienfeld, Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 4. p. 182. 1906.

Kathodenfalles bez. Anodenfalles beim Ein- oder Austritt des Stromes erwärmt.

Nehmen wir den extremsten Fall, daß der ganze Strom an der Stelle, wo der Draht sich befindet, so zusammengeschnúrt würde, daß er ausschließlich durch den Draht hindurchgeht.¹⁾ Die Stromstärke im Rohr sei 1 Ampère, der Gradient 4 Volt. Ist die Drahtdicke $\frac{1}{40}$ cm, so hätte man längs dieses vierzigstel Zentimeter einen Potentialabfall von 0,1 Volt. Geht der ganze Strom von 1 Ampère durch diesen Draht²⁾, so würden im ganzen Draht, der eine Länge von 3 cm besitzen mag, 0,1 Watt sich in Wärme umsetzen können. Beachtet man dagegen, daß man eine ganz bedeutend größere Wattzahl nötig hätte, um einen solchen Draht etwa mittels Akkumulatoren zur Weißglut zu erhitzen, so erkennt man leicht, daß nicht eine derartige Sekundärerrscheinung der Grund für die Erwärmung solcher Drähte ist.

Ganz anders liegen natürlich die Verhältnisse bei diskontinuierlichen Entladungen. In diesem Falle würde der Draht und etwa mit ihm verbundene Kapazitäten sich in raschem Wechsel laden und entladen, wodurch sich unter Umständen der Draht wohl auf Glühtemperatur erhitzen könnte.

Es möge noch der folgende Einwand, der bezüglich der Temperaturmessungen gemacht werden könnte, besprochen werden. In Fig. 7 sei durch $ab a_1$ die Schlinge des Bolometerdrahtes dargestellt. Offenbar herrscht dann zwischen den Punkten a und b , ebenso zwischen a_1 und b eine Potentialdifferenz, wenn ein Strom durch das Entladungsrohr fließt. Es fragt sich, ob nicht infolge dieser Potentialdifferenz bei b ein Strom in den Draht eintritt, um bei den Punkten a und a_1 wieder auszutreten. Ein derartiger Strom würde naturgemäß den Bolometerdraht erwärmen und die Temperatur des Gases würde bei den Messungen höher erscheinen, als sie wirklich ist.

Man zeigt aber leicht, daß, wenn ein solcher Strom überhaupt vorhanden ist, derselbe nur von verschwindender Stärke sein kann. Dreht man nämlich, was durch den Schliff NN

1) In Wirklichkeit wird die Entladungsform durch einen eingeführten Draht nicht beeinflußt.

2) Die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes kann man nicht annehmen, da sich ein Kathodenfall und Anodenfall ausbildet.

leicht bewerkstelligt werden kann, den Bolometerdraht derartig, daß die Schlinge senkrecht zur Rohrachse liegt, so kann nun zwischen den Punkten a und b keine Potentialdifferenz mehr vorhanden sein. Da man in dieser Lage angenähert dieselben Temperaturen mißt, als in der ersten, so ist wohl ein Zweigstrom $a-b$ nicht vorhanden bez. von ganz geringer Stärke.

Daß die gemessenen hohen Temperaturen wirklich im Gase vorhanden sind und sich nicht durch eine fehlerhafte Meßmethode ergeben, erkennt man auch daran, daß vollkommen isolierte, senkrecht zur Rohrachse ausgespannte Nichtleiter, wie etwa die Fäden eines Auerstrumpfes ebenfalls zum Glühen kamen.

§ 8. Abhängigkeit der Temperatur von Stromstärke und Gasdruck.

In den folgenden Tabellen 7a—7d und 8a—8c bedeutet J die Stromstärke in Ampère, V den Gradienten in Volt/cm, $J \cdot V$ das Produkt dieser beiden Größen oder die pro Längeneinheit im Rohre verbrauchte Energie. W ist der Widerstand des Bolometers in Ohm, T die daraus nach § 7 berechnete Temperatur. In der letzten Spalte ist der Quotient $T/J \cdot V$ eingetragen. Die Rohrweite betrug für die Tabellen 7 3,1 cm, für die Tabellen 8 4,4 cm. Die Figg. 7 und 8 geben die entsprechenden Kurven.

Tabelle 7a.

Druck = 0,48 mm.

J	V	$J V$	W	T	$T/J V$
0,09	8,7	0,78	24,4	250	320
0,17	8,4	1,43	28,7	360	250
0,23	7,9	1,83	32,5	460	250
0,48	7,5	3,60	36,3	565	150
0,50	7,3	3,65	37,8	610	170
0,63	7,0	4,40	40,1	710	160
0,86	6,7	5,75	44,1	805	140
0,99	6,5	6,45	46,3	860	130
1,21 ¹⁾	6,5	7,85	50,5	995	130
1,80 ¹⁾	6,1	10,93	57,1	1225	110

1) Hellrot glühende Sonden.

Tabelle 7b.

Druck = 0,26 mm.

J	V	JV	W	T	T/JV
0,08	5,8	0,46	18,3	90	200
0,26	5,2	1,35	28,9	365	270
0,36	5,1	1,83	31,9	445	240
0,49	5,1	2,50	34,1	505	200
0,75	5,0	3,75	40,4	685	180
1,02	4,9	4,90	42,7	760	150
1,18	4,9	5,79	45,1	825	140
1,46	4,7	6,86	48,1	915	130

Tabelle 7c.

Druck = 0,11 mm.

J	V	JV	W	T	T/JV
0,10	3,2	0,32	17,3	65	200
0,16	3,0	0,48	20,3	140	290
0,32	2,9	0,93	23,5	225	240
0,42	2,6	1,09	25,7	275	250
0,61	2,4	1,46	28,5	355	240
0,76	2,3	1,75	30,5	405	230
0,94	2,2	2,07	31,7	435	210
1,23	2,2	2,71	33,3	480	180
1,38	2,2	3,04	34,9	535	180
1,61	2,1	3,38	37,5	600	180
1,88	2,1	3,95	38,7	645	160
2,4	1,9	4,56	42,0	740	160

Tabelle 7d.

Druck = 0,05 mm.

J	V	JV	W	T	T/JV
0,10	1,9	0,19	17,1	60	310
0,17	1,7	0,29	18,3	90	310
0,33	1,6	0,53	21,3	170	320
0,46	1,5	0,69	22,1	190	280
0,63	1,5	0,95	24,1	240	250
0,77	1,5	1,15	26,3	295	260
1,00	1,5	1,50	28,1	340	230
1,23	1,4	1,72	29,5	380	220
1,63	1,4	2,28	30,7	415	180
1,96	1,4	2,74	31,7	435	160
2,47	1,4	3,46	33,5	495	140

Tabelle 8a.

Druck = 0,55 mm.

J	V	JV	W	T	T/JV
0,04	9,0	0,32	24,3	250	780
0,11	8,4	0,92	35,7	545	590
0,23	8,0	2,24	46,5	870	390
0,39 ¹⁾	7,8	3,04	53,4	1100	360
0,51 ¹⁾	7,4	3,77	58,2	1250	330
0,80 ¹⁾	7,0	5,60	69,5	1550	290

Tabelle 8b.

Druck = 0,16 mm.

J	V	JV	W	T	T/JV
0,09	5,0	0,45	22,3	195	430
0,14	4,7	0,67	27,1	320	480
0,29	4,4	1,27	32,3	455	360
0,39	4,0	1,56	35,9	560	360
0,50	4,0	2,00	40,7	700	350
0,58	4,0	2,32	48,1	910	390
0,67	4,0	2,68	54,2	1125	420

Tabelle 8c.

Druck = 0,05 mm.

J	V	JV	W	T	T/JV
0,10	1,7	0,17	21,9	190	1120
0,18	1,7	0,31	24,3	250	800
0,22	1,7	0,37	25,7	270	730
0,31	1,7	0,51	27,1	320	640
0,41	1,7	0,70	29,9	390	550
0,66	1,7	1,14	32,3	445	400
1,00	1,7	1,70	36,3	570	340

Aus den Tabellen und Kurven folgt: Die mit dem Bolometer gemessene Temperatur wächst langsamer als die Stromstärke (vgl. die Figg. 8 und 9). Dies ist wohl schon insofern verständlich, weil die Wärmeverluste nicht proportional mit der Temperatur, sondern weit rascher wachsen; der Bolo-

1) Hell glühende Sonden.

meterdraht bleibt desto mehr hinter der wahren Temperatur des Gases zurück, je größer diese ist.

In den letzten Spalten der Tabellen ist jedesmal die Größe $T/J \cdot V$ eingetragen, d. i. das Verhältnis der Temperatur zu der pro Zentimeter des Rohres verbrauchten Energie. Dieses Verhältnis ist unabhängig vom Gasdruck, oder, was dasselbe ist, von der Größe der Faktoren des Produktes $J \cdot V$. Am besten tritt das eben Gesagte hervor, wenn man graphisch die

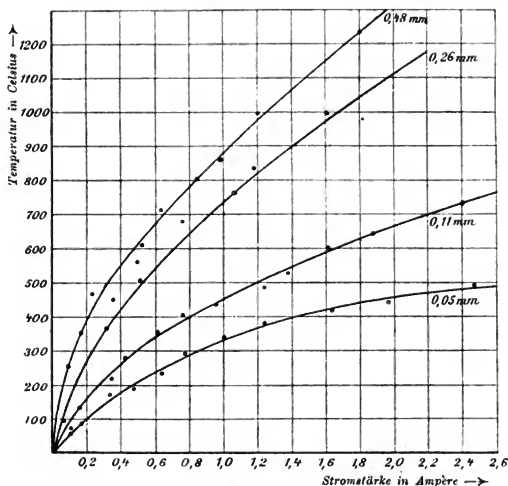


Fig. 8.

Abhängigkeit der Temperatur vom Wattverbrauch darstellt. Während in den Figg. 8 und 9 die Temperatur als Funktion der Stromstärke aufgezeichnet ist, ist hier in Fig. 10 die Temperatur als Funktion des Wattverbrauches angetragen. Dabei fallen die für ein Rohr bei verschiedenen Drucken gemessenen Werte in je eine Kurve zusammen.

Daß für das 4,4 cm weite Rohr die Temperaturen so beträchtlich höher sind, wird wohl durch eine andere Zusammensetzung des Gasinhaltes bedingt gewesen sein. Wenigstens

konnte ich mich mehrmals davon überzeugen, daß der Gasinhalt von wesentlichem Einfluß auf die Temperatur ist.

Aus den vorstehenden Messungen ergibt sich auch, daß ein stark erhitztes Gas wohl noch leuchten kann. Auch bei den Stromstärken, bei denen das Bolometer Temperaturen von 1000° und darüber anzeigte, gingen noch helleuchtende Entladungen durch das Rohr. Hittorf¹⁾ war in diesem Punkte zu einer anderen Ansicht gelangt.

Im allgemeinen ist noch folgendes zu bemerken: Die Glaswände erhitzen sich beim Stromdurchgang in hohem Grade; es trat auch mehrmals der Fall ein, daß das Glas in der Nähe der Kathode weich und eingedrückt wurde. Leichter schmelzbare Metalle kommen, in das positive Licht gebracht, zum Verdampfen; Platindrähte kommen, wie bereits erwähnt, zum Glühen, ja sogar zum Schmelzen. So gelang es bei einer Stromstärke von 2,5 Ampère in einem engeren Rohr einen ziemlich

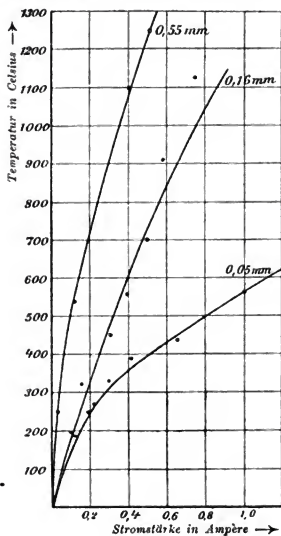


Fig. 9.

kräftigen Platindraht — 0,25 mm stark — zum Schmelzen zu bringen. Das entspricht einer Temperatur von fast 1800° .

§ 9. Die Temperaturverteilung in Richtung der Rohrachse.

Da in den weiten Röhren bei großen Stromdichten die Schichten sich besonders schön ausbildeten, lag es nahe, in ähnlicher Weise, wie es Wood getan hatte, auch hier die Temperaturverteilung in den Schichten zu messen.

1) W. Hittorf, Wied. Ann. 21. p 106. 1884; vgl. zu dieser Frage auch: G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 1. p. 629 Anm. 2. 1900.

Es wurde ein Rohr verwendet, wie es Fig. 11 zeigt. K ist die Oxydkathode, A die Eisenanode; durch ein Barometerverschlußrohr B von 90 cm Länge ist ein Thermoelement T in einem engeren Glasrohr isoliert eingeführt. Das Thermoelement bestand aus Platin und Platin(10%)rhodiumdrähten von 0,025 mm Dicke. Die Drähte waren so gebogen,

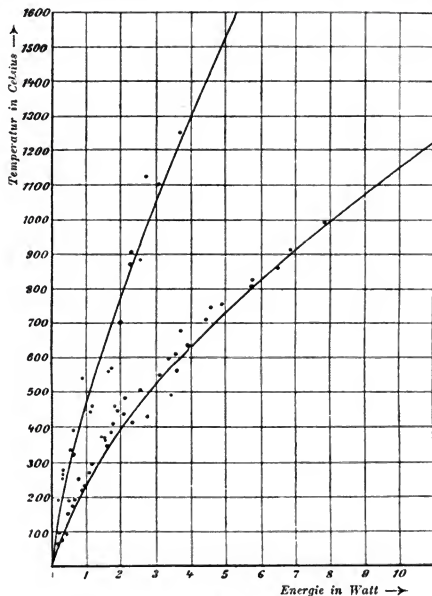


Fig. 10.

daß die Lötstelle möglichst in der Rohrachse des Entladungsröhres lag. Die Verwendung eines Thermoelementes an Stelle des Bolometers geschah namentlich aus dem Grunde, weil das Thermoelement in weit höherem Maße gestattet, die Temperatur einer bestimmten Stelle im Rohre zu messen, als das Bolometer, das, um brauchbar zu sein, immerhin eine beträchtliche Drahtlänge besitzen muß und infolgedessen einen

Temperaturmittelwert für einen gewissen Bezirk gibt. Um Fehler durch Widerstandsänderungen der Drähte des Thermo-
elementes zu vermeiden, wurde eine Kompensationsmethode in
Anwendung gebracht (nach Du Bois-Reymond).

Die Messungen bestätigten das von Wood¹⁾ gefundene
Resultat, daß die Temperatur in den leuchtenden Teilen

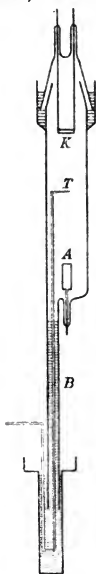


Fig. 11.

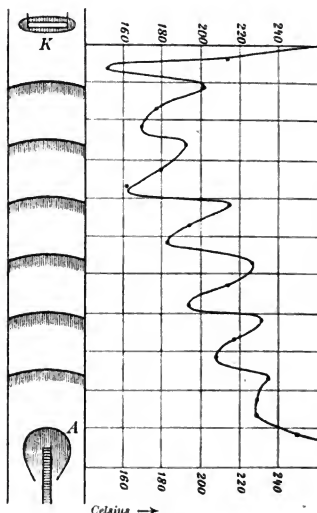


Fig. 12.

eine größere ist als in den dunklen Zwischräumen. Diese
Temperaturunterschiede waren in den weiten Röhren bei den
relativ hohen Stromstärken recht beträchtliche. Es wurden
Temperaturunterschiede bis gegen 50° gemessen. Wood fand
unter seinen Versuchsbedingungen im Maximum $1,5^{\circ}$. Am
besten ersieht man die Verhältnisse aus Fig. 12.

Links ist die Form der Entladung abgebildet, wie sie

1) R. W. Wood, l. c. p. 246 ff.

sich bei einer Stromstärke von 0,08 Ampère und einem Druck von 0,09 mm ausbildete.

Rechts ist die Temperaturkurve eingezeichnet. Die Messungen in der ersten und letzten Schicht sind durch die Strahlung des Oxydbleches bez. der Anode beeinflusst; diese beiden Schichten zeigen aus diesem Grunde einen von den anderen abweichenden Temperaturverlauf. Man ersieht auch

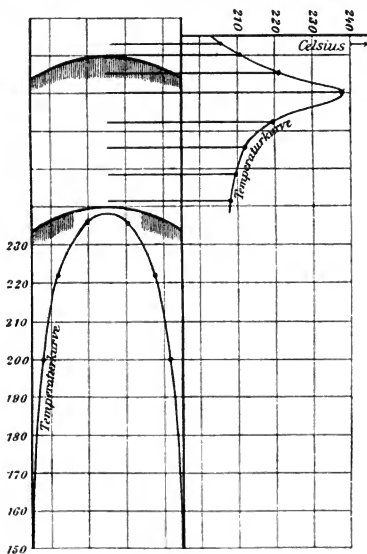


Fig. 13.

aus der Fig. 12, daß die Temperatur gegen die Anode hin wächst. Wood fand in den meisten Fällen ein Maximum der Temperatur in der Mitte des positiven Lichtes. Bei den vorliegenden Versuchsbedingungen zeigte sich ein derartiges Maximum niemals. In Fig. 13 oben ist noch der Temperaturverlauf in einer einzelnen Schicht gezeichnet. Die Versuchsbedingungen sind dieselben wie für Fig. 12. Auch hier zeigt die Kurve denselben Charakter als die entsprechende bei

Wood. Das Temperaturmaximum fällt mit dem Helligkeitsmaximum zusammen. Beide sind gegen den Schichtenanfang etwas verschoben.¹⁾

§ 10. Die Temperaturverteilung senkrecht zur Rohrachse.

Bei dem in Fig. 11 dargestellten Entladungsrohr konnte das Glasrohr, das die Drähte des Thermoelements führte, um seine eigene Achse gedreht werden. Bei einer solchen Drehung verschob sich die Lötstelle des Thermoelementes in einer zur Rohrachse senkrechten Ebene. Man konnte somit auch Temperaturmessungen senkrecht zur Rohrachse ausführen. Derartige Messungen liegen noch nicht vor. Eine Kurve, welche den Temperaturabfall in dieser Richtung zeigt, ist in Fig. 13 unten eingezeichnet. Während in der Rohrachse eine Temperatur von 238° herrschte, zeigte das Thermoelement, gegen die innere Glaswand gedreht, nur eine Temperatur von 149° . Es ist also ein ziemlich scharfer Temperaturabfall von der Rohrachse gegen die Glaswand vorhanden.

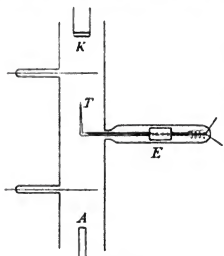


Fig. 14.

Wie bereits p. 989 erwähnt, hat Hr. Warburg, ausgehend von den einfachsten und zunächstliegenden Voraussetzungen, zum ersten Male die Probleme an der Hand der Theorie der Wärmeleitung mathematisch diskutiert. Bei der Ableitung der Gleichungen mußte zunächst angenommen werden, daß die elektrische Energie an der Stelle, wo sie verbraucht wird, sich völlig in Wärme umsetzt, ferner, daß die Stromdichte im ganzen Rohrquerschnitt konstant ist. Man erhält Formeln, die die Temperatur an der inneren Rohrwand und in der Rohrachse, sowie die mittlere Temperatur des Gases zu berechnen gestatten.

1) Vgl. auch den Bericht des Verfassers über einen „Demonstrationsversuch zur Erläuterung der Temperaturverhältnisse in den Schichten des positiven Lichtes“. Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 8. p. 116. 1906.

Ich habe versucht, mittels eines Rohres, wie es in Fig. 14 abgebildet ist, einige nach Möglichkeit genaue Temperaturbestimmungen durchzuführen, um damit die entsprechenden Berechnungen zu vergleichen.

Das Thermoelement T war durch einen seitlichen Ansatz eingeführt. Es konnte vermittelst des Eisenzylinders E magnetisch verschoben werden. Die Drähte des Thermoelementes waren so wie aus der Figur zu ersehen gebogen.

Es wurden bei verschiedenen Drucken und bei verschiedenen Stromstärken die Temperatur einmal in der Rohrachse, dann dicht an der inneren Rohrwand bestimmt. Die äußere Rohrwand war durch fließendes Wasser auf einer konstanten Temperatur (ca. 8°) gehalten. Um die Messungen in möglichst reinem Stickstoff ausführen zu können, wurden nur relativ geringe Stromstärken verwendet. Leider sind die Bestimmungen der Temperatur der inneren Rohrwand nur wenig sicher. Wenn die Drähte des Thermoelementes nicht völlig an der Glaswand anlagen, was sich oft nicht vermeiden ließ, so waren die gemessenen Temperaturen beträchtlich zu hoch.

Tabelle 9.

Stickstoff, Rohr Fig. 14. (Rohrweite 3,7 cm.)

Druck mm	Stromstärke Ampère	Gradient Volt/cm	Watt	Temperatur	
				Rohrachse	Rohrwand
0,60	0,086	10,7	0,92	515°	218°
	0,138	10,8	1,49	590	505 (?)
0,34	0,062	7,4	0,46	265	112
	0,155	6,9	1,07	525	435 (?)
0,17	0,070	5,6	0,39	150	60
	0,180	5,4	0,97	375	268
0,09	0,072	3,0	0,22	105	60
	0,175	3,0	0,53	240	105

Führt man Berechnungen an Hand der aus Tabelle 12 zu entnehmenden Zahlenwerte durch, so findet man Abweichungen gegen die experimentellen Bestimmungen. Für die

innere Rohrwand ergibt die Berechnung eine Temperatur, welche die der äußeren in keinem Falle der vorstehenden Tabelle um 2° übersteigen könnte. Auch für die Rohrachse sind die berechneten Werte beträchtlich kleiner als die entsprechenden experimentellen Bestimmungen.

Wahrscheinlich trifft die Voraussetzung, die Stromdichte sei im ganzen Rohrquerschnitt konstant, nicht zu. Auch der Einfluß der Rohrwände auf die Entladung ist noch wenig aufgeklärt.¹⁾ Wie eigenartig übrigens die Verhältnisse unter gewissen Bedingungen sein können, zeigt eine Erscheinung, die ich mehrmals beobachtet habe und auch anderen Herren des hiesigen Instituts demonstrieren konnte. Es zeigte sich nämlich, daß Platindrähte, wie sie als Sonden dienten, zuerst in den den Glaswänden benachbarten Teilen zu glühen begannen, während sie in der Mitte noch nichtleuchtend waren. Die Temperaturverteilung muß also eine allen sonstigen Anschauungen widersprechende gewesen sein. Es gelang leider nicht, die speziellen Bedingungen für die beschriebene Erscheinung festzustellen.

III. Potentialmessungen.

§ 11.

Der Potentialgradient im positiven ungeschichteten Licht ist abhängig von Gasdruck und Gasinhalt, sowie von Rohrweite und Stromstärke. Die hierüber bereits von Hittorf²⁾ unternommenen Potentialmessungen wurden wesentlich ergänzt und erweitert durch eine Arbeit von A. Herz.³⁾ Herz findet:

Der Potentialgradient im positiven Licht wächst mit wachsendem Drucke.

Der Potentialgradient ist unter sonst gleichen Verhältnissen kleiner in einem weiten Rohr und umgekehrt.

1) Bei den theoretischen Bestimmungen müßte auch das aus der (p. 992) bereits zitierten Arbeit von Lilienfeld sich ergebende Resultat berücksichtigt werden, daß die Leitfähigkeit eines Gases eine bedeutend höhere ist, wenn das Gas ionisiert ist.

2) W. Hittorf, Wied. Ann. 20. p. 705. 1883.

3) A. Herz, Wied. Ann. 44. p. 241. 1895.

Der Potentialgradient nimmt geradlinig ab mit wachsender Stromstärke.

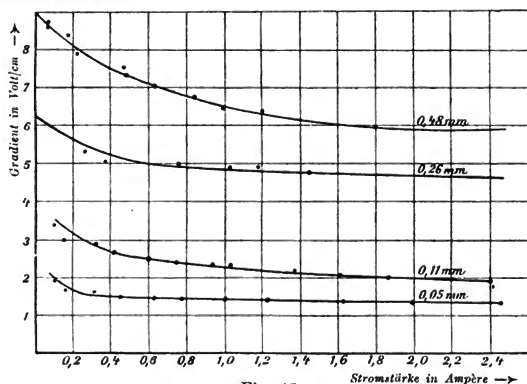


Fig. 15.

In bezug auf den letzten Satz hat bereits Schwienhorst¹⁾ gezeigt, daß die Abweichungen von der Geraden, namentlich in engen Röhren, wo man über einen größeren Meßbereich in bezug auf Stromdichte verfügt, beträchtlich werden. Es nimmt der Potentialgradient mit zunehmender Stromstärke zuerst rascher, dann langsamer ab. Auch die Versuche von R. Reiger²⁾, die namentlich bei sehr tiefen Gasdrücken ausgeführt sind, bestätigen vorstehendes Resultat.

Die im folgenden mitgeteilten Potentialmessungen waren gleichzeitig mit Strahlungs- bez.

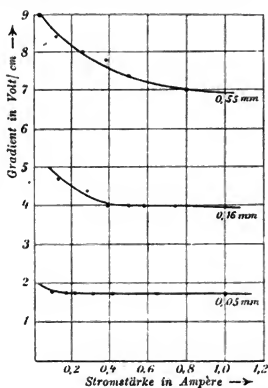


Fig. 16.

1) Schwienhorst, Diss. Göttingen 1903.

2) R. Reiger, Habilitationsschrift Erlangen p. 92. 1905.

Temperaturmessungen ausgeführt und sind aus Gründen der Übersichtlichkeit hier in einem eigenen Abschnitt zusammengestellt. In den Kurven Figg. 15 und 16 sind als Abszissen die Stromstärken, als Ordinaten die Potentialgradienten aufgetragen. Die Werte sind den Tabellen 7 und 8 p. 994 ff. entnommen. Die Kurven ergeben folgende zwei Sätze:

1. Der Gradient nimmt ab mit wachsender Stromstärke und nähert sich allmählich einem konstanten Wert.

2. Je tiefer der Druck ist, um so früher wird dieser konstante Wert erreicht.

Es waren auch einige Potentialmessungen mittels einer verschiebbaren Doppelsonde in der geschichteten Entladung durchgeführt worden. Man erhielt ähnliche Kurven des Potentialverlaufs, wie Graham¹⁾; es zeigte sich auch, daß an den Stellen, wo die Temperaturkurve ein Maximum besaß, auch dV/dx seinen größten Wert hatte.

§ 12. Resultate.

Die hauptsächlichsten Resultate, die sich aus den vorstehenden Untersuchungen ergeben haben, mögen hier zusammengestellt werden.

Strahlungsmessungen.

Die Strahlung des positiven Lichtes wächst in weiten Röhren und bei tiefen Drucken proportional mit der Stromstärke (nachgewiesen für Ströme bis zu einem Ampère an Stickstoff, Wasserstoff und atmosphärische Luft).

Dieser Satz gilt für die Gesamtstrahlung, wie für eine einzelne Wellenlänge.

Der optische Nutzeffekt, d. h. das Verhältnis der Lichtstrahlung zur Gesamtstrahlung, ist für Stickstoff ca. 18 mal so groß, als für eine Amylacetatlampe.

Temperaturmessungen.

Die Temperatur des positiven Lichtes kann in weiten Röhren schon bei relativ schwachen Strömen 1000° und darüber betragen.

1) W. F. Graham, Wied. Ann. 64. p. 49. 1898.

Im positiven Licht ist die Temperatur angenähert proportional dem Produkt aus Stromstärke und Spannungsabfall.

Die Temperatur in den leuchtenden Teilen einer geschichteten Entladung ist höher als die Temperatur in den dunklen Zwischenräumen. Diese Unterschiede können in weiten Röhren bis zu 50° betragen.

Von der Rohrachse gegen die Rohrwand ist ein beträchtlicher Temperaturabfall vorhanden.

Zwischen den nach der Warburgschen Theorie berechneten und den experimentell bestimmten Temperaturen dürften Abweichungen bestehen.

Potentialmessungen.

Der Gradient nimmt mit wachsender Stromstärke ab und nähert sich allmählich einem konstanten Wert.

Je tiefer der Druck, um so früher wird dieser konstante Wert erreicht.

Vorstehende Arbeit wurde in den Jahren 1905 und 1906 im physikalischen Institut der königlichen Universität Erlangen ausgeführt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof Dr. E. Wiedemann für die Anregung und vielfache Unterstützung bei Ausführung der Arbeit, ebenso auch Hrn. Prof. Dr. A. Wehnelt und Hrn. Privatdozenten Dr. R. Reiger meinen ergebensten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 9. April 1907.)

7. Beobachtungen zur Herstellung und Messung hoher Spannungen; von Hans Lohmann.

I. Herstellung hoher Spannung.

In einer von der bekannten Machschen¹⁾ verschiedenen Art habe ich einen Apparat²⁾ konstruiert, mit Hilfe dessen sich eine Batterie leicht und schnell von Menge auf Spannung schalten läßt. In der schematischen Fig. 1 sind die äußeren Belege von zwei Flaschen durch das Metallstück v_1 , die inneren durch v_2 miteinander verbunden, während die Ladung durch a und b von der Toeplerschen Influenzmaschine M aus erfolgt. Löst man nun die Verbindung mit der Maschine M

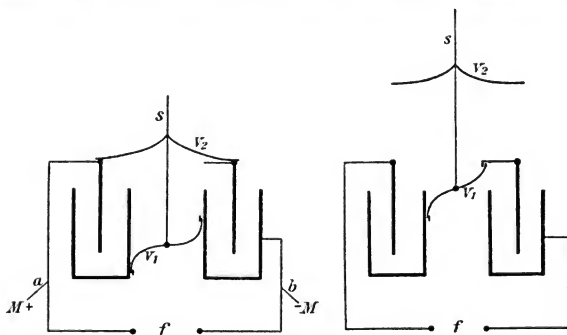


Fig. 1.

Fig. 2.

und zieht den isolierten Schieber s in die Höhe, so sind, wie Fig. 2 zeigt, die Flaschen hintereinander geschaltet, so daß bei f der Funken überspringen kann. Das Emporziehen des Schiebers läßt sich durch einen Hebel sicher und schnell bewerkstelligen, wodurch die Umschaltung sehr rasch vorgenommen

1) E. Mach, Anzeiger der Wiener Akademie 1876. p. 107.

2) Ausgeführt von der Firma Meiser und Mertig, Dresden-N.

werden kann. Bei dem zu den Versuchen verwendeten Apparate wurden auf die erwähnte Art fünf große Leidener Flaschen, die in einem Kreise angeordnet waren, miteinander verbunden. Mit Hilfe dieser Vorrichtung war es möglich, experimentell schöne Wirkungen (kräftige Funken bis 32 cm Länge¹⁾ zu erzielen, es ließen sich aber auch Beobachtungen über das Transformationsverhältnis bei der Umschaltung auf Spannung und über die Funkenspannungen zwischen Spitzen bei großen Schlagweiten (bis 32 cm) anstellen.

Zu diesen Messungen wurde, um ein Maß für die Spannung bei nebeneinandergeschalteten Flaschen zu erhalten (Fig. 3), vor die Batterie (L) eine Funkenstrecke F eingeschaltet, die sich von der Batterie kurz

vor der Umschaltung auf Spannung mit Hilfe des Bügels B trennen ließ. Der Augenblick der Umschaltung wurde durch sorgfältiges Ausprobieren ermittelt. Ich ließ bei einer bestimmten Funkenstrecke F , während die Influenzmaschine mit konstanter Geschwindigkeit gedreht wurde, mehrere Male hinter-

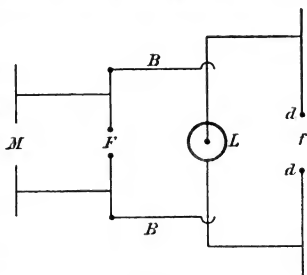


Fig. 3.

einander die Batterie (in Nebeneinanderschaltung) sich bei F entladen und bestimmte die Zeit von einer Selbstentladung bis zur nächsten mit Hilfe eines Metronomes. Von der dritten Entladung an blieb diese Zeit unverändert, so daß der Moment abgepaßt werden konnte, der einer Selbstentladung unmittelbar vorausging. In diesem Augenblicke klappte der Bügel B auf, und die Batterie wurde mit einem kräftigen Ruck auf Spannung geschaltet. Diese Versuche wurden für verschiedene Funkenlängen F (1,3 cm war die Maximalfunkenweite) bei Kugeln von 2 cm Durchmesser ausgeführt und zu jedem F die Maximalschlagweite f ermittelt. Bei f benutzte ich Entladungskugeln von verschiedenen Durch-

1) Neuerdings wurden bei einem noch einfacheren Mechanismus mit 6 Flaschen in Vorversuchen Funken von 43 cm Länge zwischen Kugeln erzielt.

messern d (5 cm, 4 cm, 2,3 cm und Spitzen). Die auf die angegebene Weise gemessenen Maximalfunkenweiten f für verschiedene Durchmesser d der Entladungskugeln sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle I.

F in cm	f in cm für $d = 5$ cm	f in cm für $d = 4$ cm	f in cm für $d = 2,3$ cm	f in cm für Spitzen $d = 0$
0,5	2,9	—	—	13,4
0,6	—	—	8	—
0,7	—	—	15,5	18,5
0,8	6	7,5	19	22
0,9	7	9,2	20,5	23
1,0	—	12,5	—	—
1,1	10,5	17	26,5	28,5
1,2	—	19	—	—
1,3	17	24	29,5	32

Trägt man die Mikrometerfunkenweiten F als Ordinaten, die für diese ermittelten Maximalschlagweiten f als Abszissen auf, so ersieht man (aus Fig. 4), daß die Schlagweite f zunächst,

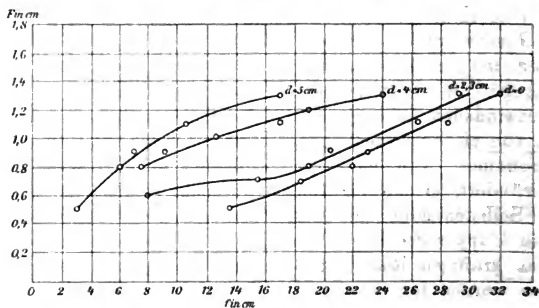


Fig. 4.

wenn $f/d < \text{ca. } 8$ ist, sehr vom Durchmesser d der Entladungskugeln abhängig ist. Erst für $f/d > 8$ hört diese Abhängigkeit fast auf, und die Kurven verlaufen der Spitzenkurve ($d = 0$) ungefähr parallel. Diese letztere ist nahezu eine Gerade.

Aus den in Tab. I zusammengestellten Beobachtungen läßt sich nun zweierlei ermitteln. *Erstens* kann man das Transformationsverhältnis berechnen, das bei der Umschaltung der fünf Flaschen von Menge auf Spannung eintritt, und *zweitens* können auf zwei voneinander verschiedenen Wegen Gleichungen für die Funkenspannungen an Spitzen abgeleitet werden.

Um das Transformationsverhältnis zu berechnen, entnahm ich aus bekannten Tabellen¹⁾ die Spannungen (A_1), welche zu den jeweiligen Funkenweiten F zwischen Kugeln von 2 cm Durchmesser gehören. Hierauf berechnete ich mit Hilfe der von Toepler²⁾ angegebenen Formel:

$$(a) \quad A_2 = 600 d \left(96 + \frac{64}{\sqrt{d}} \right) \frac{f + d}{f + 5,8 d} \text{ (Volt)}, \text{ gültig für } f/d > 1,$$

die Spannungen, welche bei einem bestimmten Durchmesser d der Entladungskugeln den zugehörigen Maximalschlagweiten f entsprechen.

Auf diesem Wege ergaben sich folgende Werte:

Tabelle II.

	F in cm	A_1 in Kilovolt	f in cm	A_2 in Kilovolt	$\frac{A_2}{A_1}$
für $d = 5$ cm	0,5	17,4	2,9	76,17	4,38 ³⁾
	0,8	26,1	6	117,48	4,50
	0,9	28,8	7	128,19	4,45
	1,1	33,3	10,5	146,68	4,40
	1,3	37,2	17	178,79	4,81
für $d = 4$ cm	0,8	26,1	7,5	115,08	4,41
	0,9	28,8	9,2	125,15	4,35
	1,1	33,3	17	160,39	4,81
	1,3	37,2	24	182,24	4,90
für $d = 2,3$ cm	0,6	20,4	8	91,99	4,51
	0,7	23,1	15,5	117,63	5,09
	0,8	26,1	19	121,99	4,67
	0,9	28,8	20,5	128,41	4,46
	1,1	33,3	26,5	137,10	4,12
	1,3	37,2	29,5	141,47	3,80

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik.

2) M. Toepler, Ann. d. Phys. 19. p. 194. 1906.

3) Dieser Fall, wo $f/d < 1$ ist, wurde nach einer anderweitigen Angabe von Toepler berechnet.

Der aus den Werten in dieser Tabelle berechnete Mittelwert für das Transformationsverhältnis bei Umschaltung auf Spannung ist $A_2/A_1 = 4,51$, also ein Wert etwas kleiner als 5, wie zu erwarten war. Da nämlich die Umschaltung auf Spannung in dem Augenblicke vollzogen wurde, der einer Selbstentladung bei F unmittelbar vorausging, so werden die aus der Tab. I entnommenen Werte für A_1 immer etwas größer sein als die tatsächlich vorhandenen Spannungsdifferenzen im Augenblicke der Umschaltung. Außerdem werden bei der Umschaltung und bei der Entladung bei f Verluste eintreten, die den Wert A_2 praktisch nicht ganz die theoretisch zu erwartende Größe annehmen lassen werden (vor allem bei großen Schlagweiten).

II. Bemerkungen über Funkenspannungen an Spitzen.

Um aus den genannten Beobachtungen eine Gleichung für die Funkenspannungen bei *Spitzenentladung* abzuleiten, bediene ich mich zunächst des folgenden Weges. Aus dem oben erwähnten mittleren Transformationsverhältnisse $A_2/A_1 = 4,51$, das ja von der Art der Elektroden (d) unabhängig ist, berechnet man mit Hilfe der für die Mikrometerschlagweiten F bekannten Spannungen A_1 die zu diesen gehörigen Potentialdifferenzen A_2 . Diese müssen dann den beobachteten Funkenweiten f zwischen Spitzen entsprechen. Auf diese Weise ergibt sich die mittlere Reihe in der folgenden Tabelle.

Tabelle III.

F in cm	A_1 in Kilovolt	A_2 in Kilovolt	f in cm	A_2 in Kilovolt nach der Interpolations- formel (b)
0,5	17,4	78,47	13,4	79,41
0,7	23,1	104,18	18,5	103,73
0,8	26,1	117,71	22	120,42
0,9	28,8	129,89	23	125,19
1,1	33,3	150,18	28,5	151,41
1,3	37,2	167,77	32	168,10

Trägt man die aus Tab. III ermittelten Werte von A_2 als Ordinaten in einer Ebene auf, während als Abszissen die

zugehörigen Funkenweiten f dienen (Fig. 5), so erkennt man, daß die Werte für Spitzenentladungen angenähert auf einer Geraden liegen. Man ist also berechtigt, die Spannungsdifferenz bei Spitzenentladung im Beobachtungsbereiche als

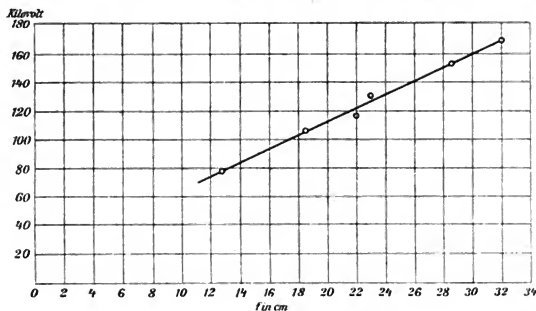


Fig. 5.

lineare Funktion der Schlagweite f aufzufassen. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate läßt sich dann aus den beobachteten Werten als Interpolationsformel für Funkenspannung bei Spitzenentladung

$$(b) \quad A = 15,523 + 4,768 f^1)$$

aufstellen. Die mit Hilfe dieser Gleichung berechneten Werte sind in Tab. III zum Vergleiche in die letzte Kolumne aufgenommen worden.

Es läßt sich aber aus den Beobachtungen noch auf einem anderen Wege eine Gleichung für die Funkenspannungen zwischen Spitzen ableiten. Zeichnet man nach Toepler²⁾ die Kurven konstanter Funkenspannung (Fig. 6) in einer Koordinatenebene, in der die Schlagweiten f die Ordinaten und die

1) Nach dieser Formel würde man vergleichsweise folgende Funkenspannungen zwischen Spitzen erhalten

Schlagweiten in cm	10	15	20	25	30	35
Spannungen in Kilovolt	63,2	87,0	110,9	134,7	158,6	182,4

2) M. Toepler, Ann. d. Phys. 19. p. 203. 1906.

Elektroden Durchmesser d die Abszissen sind, so ergibt sich, daß die Punkte L , wie Toepler gefunden hat, auf einer Geraden, in diesem Falle auf der Geraden $(f/d) = \text{ca. } 11$ liegen.

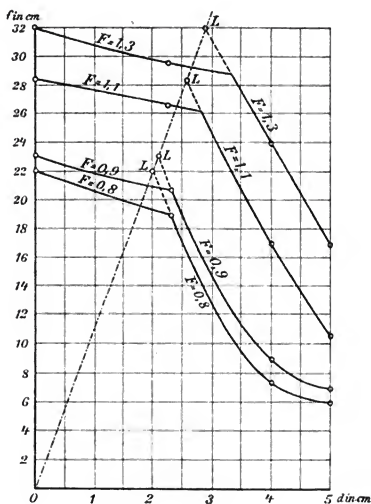


Fig. 6.

Durch Rechnung wurde hierfür die Gleichung $(f/d) = 10,62$ gefunden. Setzt man nun diesen letzteren Wert in die Gleichung (a) ein, so folgt als Formel für die Spannung bei Spitzenentladung:

$$(c) \quad A = 3,838 f + 8,339 \sqrt{f}. \quad 1)$$

Der Wert des konstanten Verhältnisses (f/d) hängt, wie ein Vergleich der bisher bekannten Werte für diesen Quotienten zeigt, besonders von der *Andauer* der Spannungsdifferenz

1) Berechnet man aus dieser Gleichung die Spannungen A_2 , welche zu den beobachteten Funkenweiten zwischen Spitzen gehören, und setzt sie ins Verhältnis zu den entsprechenden Werten von A_1 , die aus dem zugehörigen F folgen, so ergibt sich in annähernder Übereinstimmung mit dem auf anderem Wege berechneten Werte (4,51) $A_2/A_1 = 4,62$ als Transformationsverhältnis.

zwischen den Elektroden bei den einzelnen Entladungen ab. So läßt sich aus dem Diagramm, das Toepler bei seinen Messungen mit dem Paraffintransformator¹⁾ angibt, als geometrischen Ort für die Punkte L die Gerade $(f/d) = \text{ca. } 6$ ablesen. Bei seinen Untersuchungen mit dem Funkeninduktor²⁾ findet derselbe Verfasser $(f/d) = 7,8$ und bei seinen Bestimmungen des Scheitelfaktors an einem Wechselstromtransformator (104 Wechsel in der Sekunde) $(f/d) = 10,4$.³⁾ Bei meinen Messungen wurde $(f/d) = 10,62$ berechnet, und es ist offenbar bei meiner Versuchsanordnung die Andauer der Spannung zur Entladung am größten, während sie bei den vorher erwähnten Beobachtungen um so kürzer ist, je kleiner (f/d) ist. Setzt man die verschiedenen Werte von (f/d) in die Gleichung (a) ein, so ergibt sich, wie aus der nachfolgenden Zusammenstellung zu erkennen ist, daß bei gleicher Funkenweite die Spannung um so größer sein muß, je kürzer die Andauer der Spannung ist.

Um einen Vergleich mit anderen Beobachtungen zu ermöglichen, mögen im folgenden die Spannungen für einige Funkenweiten zwischen Spitzen zusammengestellt werden.

Schlagweiten in cm		10	15	20	25	30	35
Spannungen in Kilovolt	I.	70,3	98,0	124,8	151,0	176,8	202,8
	II.	65,6	91,0	115,6	139,5	163,0	186,2
	III.	64,8	89,9	114,1	137,7	160,8	183,7

Es bedeuten hierbei:

I. Messungsergebnisse von M. Toepler für sehr kurze Andauer der Spannung (Funkeninduktor) bei 5 Proz. Treffer nach der Gleichung

$$A = 4,35 f + 8,48 \sqrt{f}.^4)$$

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 10. p. 741. 1903. (Die Andauer einer Halbschwingung ist hierbei nach Toepler 10^{-5} sec).

2) M. Toepler, l. c. 19. p. 205. 1906.

3) M. Toepler, l. c. 22. p. 128. 1907.

4) Diese Formel ist aus der von Toepler l. c. für 50 Proz. Treffer angegebenen Gleichung für den in derselben Abhandlung gegebenen Unterschied der Schlagweiten bei 50 und 5 Proz. Treffern auf letztere Trefferzahl umgerechnet.

II. Messungsergebnisse von M. Toepler für längere Andauer der Spannung (Wechselstromtransformator, 104 Wechsel) nach der Gleichung $A = 3,90 f + 8,4 \sqrt{f}$.¹⁾

III. Messungsergebnisse von H. Lohmann für lange Andauer der Spannung (Batterieumschalter) nach der Gleichung $A = 3,84 f + 8,34 \sqrt{f}$.

Die Messungen, welche zu den Gleichungen (b) und (c) führten, wurden bei einem mittleren Barometerstand von 749,1 mm ausgeführt. Da es sich aber bei der angewendeten Methode nur um Relativmessungen handelt, so kommt der Einfluß des Barometerstandes nicht in Betracht.

Zum Schlusse möchte ich Hrn. Prof. Hallwachs für die Erlaubnis, vorstehende Untersuchung im physikalischen Institute der technischen Hochschule Dresden auszuführen, meinen verbindlichen Dank aussprechen.

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 22. p. 128. 1907.

(Eingegangen 6. Februar 1907.)

Adressen

Agens:

Wien

8.21

lang:

Gleich

8.34j

) und

and

wende

mtt:

s für

Inst:

inen

11

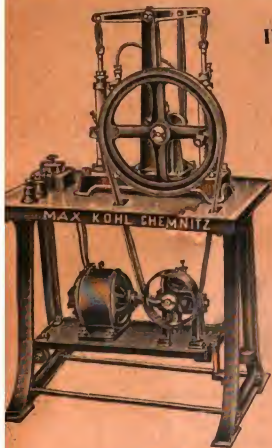
R

M
CT
A

MAX KOHL, Chemnitz i. S.



beits-(Praktikanten-)Tische
 in möglichen Ausführungen, ganz den je-
 tigen örtlichen Verhältnissen angepaßt.



Radiumbromid von überraschender
 chemisch reln. Wirkung; —
 Preis auf Anfrage.

Weltausstellung Lüttich 1905: 2 Grands Prix!
Weltausstellung St. Louis 1904: Grand Prix und Gold. Medaille,

ersteren in der Sonderausstellung des Königl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im
 Auftrage der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsaales, letztere in der
 deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung: wissenschaftliche Instrumente.

Ehrendiplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Düsseldorf 1898.
 Goldene Medallion Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900, Aussig 1903, Athen 1904.

Liste mit ausführlichen Kostenanschlägen, Beschreibungen, Referenzen usw. gratis und franko.

Experimentier-Schalttafeln

für Lehranstalten u. Laboratorien, als Wandtableau
 und in Form fahrbarer Tische ausgeführt, gestatten
 die Verwendung

des Stromes
 städtischer Cen-
 tralen bis 110, 100,
 220 Volt u. 20 oder
 30 Amp. für alle
 im Experimental-
 unterricht vor-
 kommende Arbei-
 ten. Die Schalt-
 tafeln sind für
 kleine und große
 Stromstärken bei
 beliebigen Span-
 nungen von 0,3 bis
 110 resp. 220 Volt
 zu verwenden.

Höhere Span-
 nungen als wie
 eingestellt, treten
 auch bei Strom-
 unterbrechung
 nicht auf. — Es ist
 damit also einem
 wirklichen, lang-
 gefühlten Bedürf-
 nis abgeholfen.

la. Referenzen. Man verlange Spezial-Prospekt!



D. D. Thermoskope nach Kolbe
 in neuester, verbesserter Ausführung.

Neu!

Öl-Luftpumpen

System Kohl, D.R.P. 169180.

Allein-Vertrieb

und Alleinberechtigung zur Fabrikation.

Die Pumpe verdünnt bis auf 0,0606 mm
 und verspritzt während des Pumpens
 kein Öl! Sie eignet sich vorzüglich zum
 Auspumpen von Röntgen-Röhren

Man verlange Spezial-Prospekt!

Neue rotierende

Quecksilber-Hochvakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede, D.R.P. angemeldet.

Einfachste Konstruktion, sehr hohes Vakuum,
 geringe Wartung, einfachste Handhabung.

Hochvakuum-Pumpen liefern Vakua bis zu
 0,00015 mm in 14 Minuten in einem Raum
 von 300 ccm.

E. Leybold's Nachfolger

==== Cöln a. Rh. ====

Alleinvertrieb und alleinige Berechtigung zur Fabrikation der

Neuen Hoch-Vakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede.

D. R. P. angemeldet.

D. R. P. angemeldet.



Garantirtes Vakuum: 0,00004 mm.

Die Pumpe evakuiert in $2\frac{1}{2}$ Minuten eine Röntgenröhre von Atmosphärendruck auf Röntgenvakuum und ermöglicht in kürzester Zeit die höchsten bisher erreichten Verdünnungen zu erzielen.

==== Preis ohne Quecksilber M. 330.—. ====

Alleinige Inseratenannahme durch: Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Ulrichstr.
Mit einer Beilage von Siemens & Halske, Berlin-Nonnendamm.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



This book should be returned to
the Library on or before the last date
stamped below.

A fine is incurred by retaining it
beyond the specified time.

Please return promptly.

AUG 28 '67 H
386627

WIDENER
BOOK DUE
CANCELLED
FEB 10 1988
FEB 16 1988
2563074

Widener Library



3 2044 089 556 047